





BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Ernest Lebon*, Secrétaire de la Rédaction, rue des Écoles, 4 *bis*, Paris, 5e.

57460 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS et Cie, quai des Grands-Augustins, 55.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX ET É. PICARD,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. P. APPELL, E. CARTAN, J. DRACH, C. GUICHARD, J. HADAMARD, G. KŒNIGS, ER. LEBON, G. LORIA, S. RINDI, H. G. ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL,
CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY;
DE 1886 A 1905 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY
ET DE 1905 A 1910 PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XLI. — ANNÉE 1917.

(LIIe VOLUME DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS,
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1917

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

ŒUVRES DE HENRI POINCARÉ publiées sous les Auspices du Ministère de l'Instruction publique par G. DARBOUX. TOME II publié avec la collaboration de N. E. NÖRLUND et de ERNEST LEBON. 1 vol. in-8° (28 × 22), LXXIV-632 pages, avec un portrait de HENRI POINCARÉ; Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1916.

En présentant ce Volume à l'Académie des Sciences, le 16 octobre 1916, M. Gaston Darboux, Secrétaire perpétuel, s'est exprimé en ces termes (¹) :

« Au lendemain de la mort prématurée d'Henri Poincaré, ses confrères, ses amis, ses admirateurs ont été unanimes à penser que notre pays devait rendre au géomètre qu'il venait de perdre le même hommage qu'il avait rendu aux plus grands : à Lagrange, à Laplace, à Fourier, à Cauchy. Le Ministère de l'Instruction publique a décidé de publier sans tarder les *Œuvres* de Henri Poincaré. Un traité a été conclu à cet effet avec l'éditeur, M. Gauthier-Villars, que tant de travaux analogues, exécutés avec un désintéressement et une habileté universellement reconnus, désignaient pour cette tâche nouvelle. Le soin de surveiller et de diriger la publication m'a été confié. Je n'en verrai pas l'achèvement; mais ce sera l'honneur de ma carrière d'en avoir provoqué et commencé l'exécution.

(¹) *Comptes rendus*, t. 163, n° 16, 16 octobre 1916, p. 381-382.

Le plan et le contenu des divers Volumes ont été complètement arrêtés. Dans le désir de provoquer des recherches, j'ai cru devoir commencer par le Tome II, parce qu'il contient les travaux les plus importants de la jeunesse de Poincaré, ceux qui concernent les fonctions fuchsiennes. L'hommage ainsi rendu à un savant illustre se doublera, je l'espère, d'un service rendu aux géomètres.

» Dans la revision et la correction du texte, j'ai eu l'heureuse fortune d'être aidé et secondé par un jeune géomètre des plus distingués, M. Nörlund, professeur à l'Université de Lund. Il avait fait, depuis longtemps, l'étude la plus approfondie des travaux que Poincaré a publiés sur ce beau sujet. Les notes nombreuses qu'il a ajoutées en différents endroits et à la fin du Volume mettront en évidence toute la valeur de sa collaboration. M. Nörlund unit à son beau talent mathématique une parfaite connaissance de la langue française.

» Aux remerciements bien vifs et bien mérités que j'ai le plaisir et le devoir de lui offrir, je désire associer M. Ernest Lebon, professeur honoraire de l'Université, lauréat de deux de nos Académies, qui a revu avec le plus grand soin les épreuves et qui m'a déjà donné son concours si précieux pour la publication du *Bulletin des Sciences mathématiques* et pour celle de mes *Leçons*.

» Commencée avant la guerre déchaînée par des mains criminelles, la publication de ce Volume, qui contient un beau portrait dû à notre Confrère de l'Académie des Beaux-Arts, M. Waltner, s'est poursuivie et achevée au milieu de difficultés de toute sorte et malgré la lenteur des communications. »

Pour donner une idée de ce que contient le Tome II des Œuvres de Henri Poincaré, nous ne croyons pas pouvoir mieux faire que de reproduire la Section V du bel Éloge historique lu par M. Gaston Darboux, en qualité de Secrétaire perpétuel, dans la Séance publique annuelle de l'Académie des Sciences le 15 décembre 1913, et reproduit en tête de ce Volume :

« Nous sommes obligé de passer sous silence bien d'autres recherches publiées pendant cette période de jeunesse, pour aborder la partie la plus brillante des travaux d'Henri Poincaré, celle qui concerne les *fonctions fuchsiennes* et *kleinéennes*.

» L'Académie avait mis au concours, pour le grand prix des

Sciences mathématiques à décerner en 1880, la question suivante :

» Perfectionner en un point important la théorie des équations différentielles linéaires.

» Le prix échut à Georges Halphen qui allait devenir, pour bien peu de temps, hélas! notre confrère. Mais Poincaré avait présenté au concours un travail où il avait adopté la fière devise de sa ville natale : *Non inultus premor*.

» Dans ce Mémoire, qui fut retenu par la Commission et obtint la mention la plus honorable, il faisait connaître le résultat de ses premières études sur un problème qu'il n'avait pas craint de se poser, malgré son extrême généralité :

» Intégrer toutes les équations différentielles à coefficients algébriques.

» Il serait trop long d'indiquer par quelle suite de déductions il fut conduit, pour le résoudre, à introduire de nouvelles transcendantes, *fonctions fuchsiennes et kleinéennes*, dont la découverte constitue, aujourd'hui encore, son titre de gloire le plus éclatant. Je me bornerai à donner une idée de ces nouvelles fonctions, autant qu'on peut le faire, sans recourir à aucun signe mathématique.

» La théorie des fonctions elliptiques nous avait fait déjà connaître les propriétés de la plus simple des fonctions fuchsiennes, le module de la fonction elliptique envisagé comme fonction du rapport des périodes. Cette *fonction modulaire* avait été complètement étudiée par Hermite qui avait fait connaître, en particulier, la remarquable propriété qu'elle possède, de se reproduire par des substitutions fractionnaires à coefficients entiers et au déterminant *un*. C'est cette propriété de la fonction modulaire [1] que généralise Poincaré en considérant des substitutions de même forme, mais à coefficients quelconques. La question se dédouble alors : il faut d'abord trouver tous les groupes discontinus formés de telles substitutions; il faut ensuite former les fonctions qui demeurent invariables quand on applique ces substitutions à la

---

[1] Il convient de ne pas oublier ici les recherches de M. H.-A. Schwarz sur la série hypergéométrique.

variable indépendante. C'est ce double problème que Poincaré résout avec une simplicité inespérée, créant ainsi une théorie qui embrasse comme cas très particulier les fonctions trigonométriques et les fonctions elliptiques. Son analyse lui permet d'énoncer les mémorables propositions suivantes qui, comme l'a dit notre confrère G. Humbert, lui donnent les clefs du monde algébrique :

Deux fonctions fuchsiennes qui se reproduisent lorsqu'on effectue sur la variable indépendante les substitutions d'un même groupe sont liées par une équation algébrique.

Inversement, les coordonnées d'un point d'une courbe algébrique quelconque s'expriment par des fonctions fuchsiennes et, par conséquent, par des fonctions uniformes d'un même paramètre.

Voici enfin les deux théorèmes qui le conduisent au but qu'il s'était proposé : l'intégration de toutes les équations linéaires à coefficients algébriques.

« Toute fonction fuchsienne provient de l'inversion du quotient de deux solutions d'une équation linéaire du second ordre à coefficients algébriques.

» L'intégrale générale de l'équation linéaire à coefficients algébriques d'un ordre quelconque peut être obtenue par les fonctions *zétafuchsiennes*. »

Cette dernière proposition attend aujourd'hui encore ceux qui en montreront toute la fécondité.

TABLE DES MATIÈRES.

(1) Il y a treize Notes et un long Mémoire ayant ce titre.

prix du Budget). Sur la théorie des fonctions fuchsiennes. Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires. Théorie des groupes fuchsiens. Mémoire sur les groupes kleinéens. Sur les groupes des équations linéaires. Mémoire sur les fonctions zétafuchsiennes. Les fonctions fuchsiennes et l'Arithmétique. Les fonctions fuchsiennes et l'équation $\Delta u = e^u$. Fonctions modulaires et fonctions fuchsiennes.

Notes, par M. N. E. Nörlund.

La R.

COOLIDGE (Julian Lowell). — A Treatise on the Circle and the Sphere. 1 vol. gr. in-8, 602 pages. Oxford, at the Clarendon Press, 1916.

1. Les problèmes dans lesquels le Cercle ou la Sphère jouent un rôle sont innombrables. Il était bien tentant de réunir en un Traité l'ensemble des résultats obtenus; la principale difficulté était l'abondance même des matières. L'Auteur n'a pas voulu passer sous silence le côté élémentaire. L'inversion, les problèmes sur les cercles tangents, les rapports de la théorie des cercles et de celle du triangle, l'étude du cercle en coordonnées trilinéaires, les problèmes de construction célèbres l'occupent tour à tour, ainsi que les questions analogues relatives à la sphère. La théorie de ce qu'il appelle le *plan tétracyclique*, et l'*espace pentasphérique*, l'étude du groupe des transformations circulaires et des transformations sphériques, celle du cercle orienté, ou des sphères orientées, les systèmes de cercles orthogonaux à une sphère, ou plus généralement les systèmes de cercles dans l'espace forment le reste du Traité qui contient un très grand nombre de résultats harmonieusement groupés, avec, de temps à autre, des indications sur des sujets de recherches.

2. L'équation d'une sphère, en coordonnées cartésiennes rectangulaires homogènes, peut s'écrire

$$i x_0 (x^2 + y^2 + z^2 + t^2) + x_1 (x^2 + y^2 + z^2 - t^2) + 2 x_2 x t + 2 x_3 y t + 2 x_4 z t = 0.$$

Les quantités complexes x_h $(h = 0, 1, 2, 3, 4)$ sont dites *coordonnées* de la sphère.

Si l'on pose

$$(yz) = \sum_{h=0}^{4} y_h z_h,$$

le rayon r de la sphère et l'angle θ des deux sphères x, y sont donnés par les formules

$$r^2 = \frac{(xx)}{(x_0 - x_1)^2}, \qquad \cos^2\theta = \frac{(xy)^2}{(xx)(yy)}.$$

L'ensemble des systèmes des valeurs $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ satisfaisant à la relation

$$(xx) = x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$$

s'appelle *l'espace pentasphérique*. x_0, x_1, ..., x_4 sont les coordonnées d'un point de cet espace. Ceux de ces points, dont les coordonnées satisfont à une équation linéaire de la forme

$$(yx) = y_0 x_0 + y_1 x_1 + \ldots + y_4 x_4 = 0,$$

seront sur une sphère, et y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 sont les coordonnées de cette sphère (y).

On peut dire que l'espace pentasphérique correspond à une hypersphère euclidienne Λ *dans l'espace à quatre dimensions.*

Dans cet espace pentasphérique, l'équation générale d'une cyclide sera

$$\sum_{h=0}^{4} \sum_{k=0}^{4} a_{hk} x_h x_k = 0 \qquad (a_{hk} = a_{kh}),$$

le discriminant $|a_{hk}|$ étant différent de zéro et l'étude des cyclides revient à celle de cette forme quadratique.

Il est naturel de faire intervenir l'étude du groupe des transformations ponctuelles de l'espace à quatre dimensions qui laissent invariante l'hypersphère euclidienne Λ, correspondant au complexe des sphères de rayon nul.

En résumé, il est important de remarquer que l'étude de l'ensemble des sphères revient à celle d'un espace non euclidien à quatre dimensions, où l'absolu correspondrait au complexe des sphères de rayon nul.

3. Dans ce qui précède, r et $\cos\theta$ ne sont connus que par leurs carrés. On apportera plus de précision en *orientant* la sphère et en regardant le rayon comme susceptible d'un signe. Par exemple, on le considérera comme positif quand chaque normale sera orientée à l'intérieur de la sphère, et l'on définira $\cos\theta$ par la

formule

$$\cos\theta = \frac{r^2 + r'^2 - d^2}{2rr'},$$

r et r' étant pris avec leurs signes et d désignant la distance des centres des deux sphères.

Ce qui précède permet de définir la transformation par semi-plans réciproques, que l'Auteur appelle *inversion de Laguerre*. Analytiquement, une sphère orientée a pour équation

$$x_0(x^2+y^2+z^2) + 2x_2xt + 2x_3yt + 2x_4zt + 2x_1t^2 = 0$$

avec

$$-2x_0x_1 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 = 0$$

r est défini par la formule

$$r = \frac{ix_5}{x_0}.$$

4. Dans l'étude des cercles orthogonaux à une sphère fixe ou dans celle des systèmes algébriques de cercles dans l'espace, l'Auteur fait usage des coordonnées pluckériennes de ces cercles. La méthode est toujours la même. Si l'on choisit une figure quelconque comme élément de l'espace, on fait correspondre un à un ces éléments aux points d'une certaine variété dans un espace d'un nombre de dimensions convenablement choisi, et, considérant les transformations de cet espace qui changent la variété en elle-même, le problème se pose de chercher et d'interpréter les invariants de ce groupe de transformations.

Prenons, par exemple, les cercles orientés de l'espace, c'est-à-dire les cercles pour lesquels les foyers sont pris dans un ordre déterminé; si (x) et $(\overline{x})$ désignent les coordonnées de ces deux foyers, dans l'espace pentasphérique, un cercle orienté aura 21 coordonnées homogènes, p_{ij}, p

$$\rho p_{ij} = x_i\overline{x}_j - x_j\overline{x}_i \qquad \rho p = (x\overline{x})$$

liées par les 16 relations

$$p_{ji} \equiv -p_{ij}, \qquad \Omega_i(pp) = 0 \qquad (i = 0, \ldots, 4),$$

$$\sum p_{ij}^2 - p^2 = 0.$$

où

$$\frac{1}{2}\Omega_\alpha(pp) = p_{\beta\gamma}p_{\delta\varepsilon} + p_{\beta\delta}p_{\varepsilon\gamma} + p_{\beta\varepsilon}p_{\gamma\delta}$$

et l'Auteur démontre que *la totalité des cercles orientés de l'espace pentasphérique correspond un à un aux points d'une variété à six dimensions, du dixième ordre,* S_6^{10}, *dans un espace à dix dimensions.*

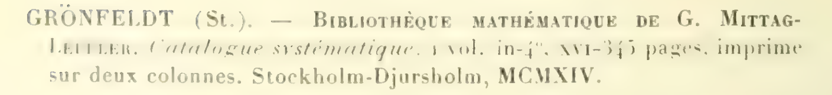
Comme application, il étudie la méthode bien connue de Laguerre pour représenter les points imaginaires de l'espace.

5. Le dernier Chapitre est consacré à ce que l'Auteur appelle la « Géométrie différentielle des systèmes de cercles non orientés », c'est-à-dire à celle d'une certaine variété S_6^5 dans S_9. On peut envisager, à ce point de vue, d'abord les surfaces cerclées, puis les congruences de cercles, etc., et démontrer leurs propriétés infinitésimales.

La méthode de Kummer, relativement au même sujet, consiste à faire correspondre aux cercles de l'espace pentasphérique les droites d'un espace à quatre dimensions, l'absolu de cet espace non euclidien correspondant toujours au complexe des sphères de rayon nul; on peut ainsi avec fruit appliquer la méthode d'étude de l'espace réglé aux systèmes linéaires de cercles, et en particulier aux congruences de cercles.

6. Dans cette étude, nécessairement très succincte, il m'est naturellement impossible de rendre compte de tous les points abordés dans ce volumineux Traité. Très riche en résultats, sa lecture sera nécessaire à ceux qui désireront diriger leurs recherches de ce côté. La voie leur est nettement indiquée, et les sujets d'études ne manquent pas dans cette interprétation au moyen des systèmes de sphères de l'espace non euclidien à quatre dimensions.

R. Le Vavasseur.



GRÖNFELDT (St.). — Bibliothèque mathématique de G. Mittag-Leffler. *Catalogue systématique.* 1 vol. in-4°, XVI-345 pages, imprimé sur deux colonnes. Stockholm-Djursholm, MCMXIV.

Pour donner une idée précise de cet important Ouvrage, nous ne saurions mieux faire que de reproduire la très intéressante Préface dans laquelle M. Grönfeldt, Conservateur à la Bibliothèque Royale de Stockholm, nous fait connaître le but et l'utilité de son travail.

PRÉFACE.

One of the first and most important questions for the student of mathematical History is that relating to the avrilable Sources of informations [1].

Cette importante question, dont la solution, suivant cette citation, constitue une condition primordiale, surtout pour l'étude de l'Histoire des Mathématiques, se pose en réalité, pourrait-on dire, dans tous les domaines de cette science. D'un autre côté, il est vrai que, lorsqu'il s'agit d'études limitées aux différentes branches des Mathématiques modernes, les sources d'information sont assez abondantes grâce à l'activité des Bibliothèques publiques; au point de vue bibliographique, ces sources sont, au surplus, faciles à consulter [2]. Il n'en est pas moins certain que, pour peu qu'on approfondisse telle ou telle partie d'une science quelconque, on se trouvera fatalement entraîné vers ses origines, c'est-à-dire vers le passé et les devanciers qui ont tracé la route à suivre. Et cela s'applique d'une façon toute particulière aux sciences mathématiques, étant donnée leur caractéristique méthodologique, qui est la déduction. Or, lorsqu'il s'agit d'étudier les Mathématiques des temps plus ou moins lointains, la recherche des sources d'information indispensables est l'un des problèmes préliminaires qu'il convient chaque fois de résoudre. Cela est parfois d'une exécution peu facile. En effet, le personnel restreint dont disposent les Bibliothèques publiques est le plus souvent entièrement occupé à suivre à la trace l'évolution de la science contemporaine et à consigner les résultats, toujours plus nombreux, que nous vaut chaque nouvelle année de travail scientifique; c'est seulement pour un petit nombre de ces bibliothèques que le service comporte en outre le devoir de recueillir les œuvres et les documents du passé, devoir qui est toutefois généralement limité au seul passé national.

Par bonheur, l'initiative privée a, presque de tout temps, complété heureusement sur ce point l'effort public. C'est ainsi que, notamment, les adeptes et les protecteurs des sciences mathéma-

---

(1) D.-E. Smith, *Rara arithmetica;* Boston and London, 1908, p. IX.

(2) *Cf.* F. Müller, *Führer durch die mathematische Literatur;* Leipzig and Berlin, 1909.

tiques ont souvent réuni de riches collections amplement pourvues des trésors livresques, rares ou anciens, traitant de leur spécialité. Parmi ces bibliothèques privées, appartenant à une époque plus récente, citons celles, très importantes, de Libri, du Prince Boncompagni, de Morgan, sans oublier celles du Prince Roland Bonaparte et de M. Plimpton.

Il convient de ranger, à la suite de ces collections, malheureusement toutes dispersées à l'exception des deux dernières ci-dessus mentionnées, la bibliothèque du professeur Mittag-Leffler, à Djursholm, près Stockholm. Cette bibliothèque comprend actuellement environ 30000 numéros occupant une longueur de rayons de 600^{m}; le nombre des manuscrits s'élève à plus de 1250 numéros, sans compter les 110 cartons remplis de lettres. Les livres reliés forment près de 11000 volumes; le reste (soit pour la plupart des extraits et des thèses de doctorat) se compose de brochures de moindre étendue, conservées dans 870 cartons différents.

Parmi les manuscrits, la partie de beaucoup la plus importante (soit plus de 1200 numéros) se compose d'une collection de copies et de fac-similés de manuscrits traitant de sciences mathématiques et d'histoire naturelle et datant, partie du moyen âge, partie des premiers siècles des temps modernes, collection qui fut originairement réunie, au prix des plus grands sacrifices en temps et en argent, par le prince Baldassare Boncompagni [1].

Une liste des manuscrits de ce trésor unique pour l'étude de l'histoire des sciences mathématiques a été déjà dressée et publiée sous le titre de *Catalogo della Biblioteca Boncompagni* (Partie I; Roma, 1898). La partie acquise par le professeur Mittag-Leffler figure dans cette liste sous les n°s 507-1223, elle se compose en majeure partie d'Ouvrages anciens sur les Mathématiques, l'Astronomie et la Physique, ainsi que de notices biographiques sur des savants ayant cultivé l'une ou l'autre de ces sciences. C'est ainsi, sans parler d'un certain nombre de lettres émanant d'illustres savants, qu'on y relève quantité d'algorithmes

(1) Cf. *Zeitschrift f. Mathematik u. Physik*, Hist. lit. ablh., t. XXXIX, [illegible] p. [illegible] et le *Bibliographe moderne*, courrier publié par H. STEIN, t. II, [illegible], p. [illegible].

et d'abaques, ainsi que des Traités d'Arithmétique, d'Algèbre, de Géométrie, d'Astronomie, de Physique, de Géodésie, etc., dont les auteurs sont tant des Arabes que des Occidentaux. Tout en renvoyant le lecteur au Catalogue précité, nous nous permettrons de citer ici un choix de noms portés par les très nombreux auteurs, anciens ou modernes, représentés dans cette collection, soit par des lettres, soit par des Ouvrages plus importants, ou dont la vie et l'œuvre s'illuminent par les documents qui s'y trouvent : Adelard (vers 1180); Adelbold (vers l'an 1000); Albategnus (albatani, vers 900); Alkindi (vers 850); Albertus, Magnus (1205-1280); Albertus de Saxonia (XIVe siècle); Alphonse X (1223-1284); Arnoldo de Villa Nova (1248-1314); Arzachel (vers 1080); Bernard, Edw. (1638-1696); Bianchini, Fr. (1662-1729); Bernoulli (Lettres datant de 1695, etc.); Blanchinus, Io (XVe siècle); Blasius de Parma; Boethius (vers 470-526); Guido Bonatti (XIIIe siècle); Bonincontro, L. (1410-1502); Brunetto, Latini (1220-1295); Giovanni, Campano (XIIIe siècle); Castelli, Bened. (1577-1644); Cataneo, Pietro (XVIe siècle); Cauchy, Augustin (1789-1857); deux longs Traités autographes inédits datant de l'année 1831 et remis à l'Académie de Turin ([1]); Chasles, Michel (1793-1880); Cossali, Pietro (1748-1815); Dell'Abacco, Paolo (vers 1281-1365); Della Porta, Giov. (1538-1615); Diophantus; Euclide; Forcadel, P. (XVIe siècle); Frontinus; Galigai (vers 1500); Gherardo Cremonese (1114-1187); Gerbert (Sylvestre II; Xe siècle); Leonardo Pisano (XIIIe siècle); Lionardo da Vinci (1452-1519); Leibniz G.-W. v. (1646-1716); Kircher, Athanas (1601-1680); Lagrange (1736-1813); Marlianus, Io (XVe siècle); Mersenne, M. (1588-1648); Muhammed ibn Mûsâ (IXe siècle); Murio (Meurs), Io de (XIVe siècle); Nunez, P. (1492-1577); Nemore, Iord de (XIIIe siècle); Paccioli, Luca (vers 1450-1509); Ptolemæus; Sacrobosco, Io de (XIIIe siècle); Tartaglia, Nicc. (1506-1559); Torricelli (1608-1647); Viete, Fr. (1540-1603); Viviano, Vinc. (1622-1703); Wallis, John (1616-1703); et autres. La plupart des originaux de ces copies et de ces fac-similés, tous exécutés avec une exactitude diplomatique, sont dispersés dans les différentes bibliothèques italiennes, publiques ou privées, et

([1]) *Cf.* VALSON, *Vie de Cauchy*, t. II, p. VII; Paris, 1868.

avant tout dans la Bibliothèque du Vatican; d'autres sont conservés dans des bibliothèques anglaises, françaises, belges, allemandes, autrichiennes et suisses.

Proviennent également de la collection Boncompagni (anciennement collection Libri) trois manuscrits originaux de Niels Henrik Abel : *Théories (Recherches) sur les fonctions elliptiques*, Christiania, 27 août 1828, 28 pages in-8°; *Recherches sur les fonctions elliptiques (continuation)*, 37 pages in-8°; *Notes sur quelques formules elliptiques*, Christiania, 25 septembre 1828, 4 pages in-4°.

En dehors des manuscrits Boncompagni, qui constituent un tout à part, la collection des manuscrits de la bibliothèque de M. Mittag-Leffler se compose surtout de cours universitaires et de la correspondance scientifique du propriétaire. Il faut cependant citer quelques pièces rares de moindre importance telles que : Extrait d'un Mémoire contenant une nouvelle théorie des attractions d'un corps homogène de figure sphéroïdique elliptique, Gœttingue, 5 novembre 1912, en transcription originale de C.-F. Gauss, don de Joseph Bertrand à Sophie Kowalewski, et donné par elle au propriétaire actuel; une lettre de C.-G. Jacobi à Leverrier, datée de Berlin 11 octobre 1848; une poésie religieuse de caractère patriotique et un livre de Caisse de Cauchy, etc.

Parmi les cours professés à l'Université et qui constituent une soixantaine de volumes, on relève, outre ceux de M. Mittag-Leffler, des cours de Borchardt, Jacobi, Kronecker, Kummer, J. Liouville et Weierstrass (ce dernier représenté par 22 volumes).

A cela il convient enfin d'ajouter, ainsi que nous l'avons dit plus haut, la correspondance scientifique que M. Mittag-Leffler, pendant toute sa carrière scientifique embrassant plus de 40 ans, a entretenue avec des savants contemporains. Cette correspondance compte plus de 15000 numéros. Parmi ces correspondants de M. Mittag-Leffler nous citerons les suivants : Appell, Paul; Baltzer, R.; Beltrami, E.; Bertrand, Joseph; Betti, E.; Burens de Haan, D.; Bjerknes, C.-A.; du Bois Raymond, Paul; Boltzmann, L.; Boncompagni (le prince B.); Brioschi, F.; Cantor, Georg.; Casorati, F.; Cayley, A.; Chasles (Michel); Cremona, L.; Curie, Marie; Darboux, Gaston; Darwin, G.-H.; Dedekind, R.; Dini, U.; Echegaray, José; Einstein, A.; Ericsson, John;

Fuchs, L.; Fujisawa, R.; Ghasi Moukhtar Pacha; Hadamard, J.; Halphen, G.; Hermite, Charles; Hertz, Heinrich; Hilbert, D.; Jordan, Camille; lord Kelvin; Kœnigsberger, L.; Kowalewski, Sonja; Kronecker, L.; Kummer, E.-E.; Laguerre, E.; Landau, E.; Lie, Sophus, Lipschitz, R.; Lorentz, H.-A.; Lüroth, J.; Malmsten, C.-J.; Menabrea de Val Dora; Minkowski, H.; Newcomb, S.; Painlevé, P.; Picard, E.; Poincaré, H.; lord Rayleigh; Rosanes, J.; Schering, E.; Schiaparelli, G.; Schläfli, L.; Schwarz, H.-A.; Stieltjes, T.-J.; Stokes, G.-G.; Tisserand, F.; Tannery, J.; Tchebychef, P.-L.; Sylvester, J.-J.; Volterra, V.; Weber, H.; Weierstrass, K.; Angström, A.-J.

Sont actuellement en préparation, parmi les lettres de cette collection, en vue de leur publication prochaine dans les Tomes XXXVII-XXXVIII des *Acta mathematica*, un certain nombre de lettres traitant de questions scientifiques et émanant de Henri Poincaré.

Mentionnons également comme se rattachant aux diverses questions susindiquées une très riche collection de portraits (gravures et photographies) de mathématiciens, tant anciens que modernes. Une partie des photographies, soit 200 environ, se trouvent reproduites dans les *Acta mathematica*, Table générale des Tomes I-XXXV; 1913 : ce sont celles des savants ayant collaboré à cette revue connue, dont M. Mittag-Leffler est le fondateur et le directeur.

La partie la plus importante de la bibliothèque de M. Mittag-Leffler se compose toutefois des Ouvrages imprimés consignés dans le présent Catalogue, ils forment 11 000 volumes. En ce qui concerne cette partie de la bibliothèque, nous renvoyons en principe le lecteur aux pages suivantes.

Cependant nous voudrions attirer l'attention sur les très nombreux Acta et Revues, dont la plupart se présentent par séries complètes, ainsi que sur la section des auteurs anciens. Il est rare en effet qu'on trouve, dans une bibliothèque privée, des Ouvrages de ce genre représentés d'une façon aussi complète. Nous avons déjà insisté, comme il convient, sur l'avantage qu'offre aux intéressés, pour l'étude historique des Mathématiques, la section des auteurs anciens, avec ses très nombreuses éditions originales, dont une dizaine d'incunables. Point n'est besoin, dans ces

conditions, de motiver spécialement ce fait que nous avons cru devoir ranger cette section à part au point de vue bibliographique.

Outre les Ouvrages rentrant dans l'un quelconque des groupes de matières qui figurent dans le présent Catalogue, on trouve dans la bibliothèque de M. Mittag-Leffler quantité d'Ouvrages élémentaires, traitant des diverses parties des sciences mathématiques, tels que manuels scolaires, recueils d'exemples, etc. On trouve encore une très nombreuse collection de publications mathématiques de moindre étendue, mais choisis avec beaucoup de soin, les publications d'une réelle valeur étant seules conservées dans la collection, telles que extraits et thèses de doctorat.

Le fait que les Mathématiques élémentaires ont été omises dans le Catalogue, consacré à la description d'une bibliothèque éminemment scientifique, nous paraît susceptible de se passer de commentaires. Il n'en va pas de même pour les extraits ; on sait, en effet, que ces publications, en apparence peu intéressantes, traitent souvent des progrès les plus importants de la Science. Si ces publications ont néanmoins été exclues du Catalogue, cela a tenu uniquement à des raisons d'ordre pratique. Cette partie de la bibliothèque comprend, en effet, 18000 numéros environ. De plus, le profit qu'on pourrait tirer, au point de vue scientifique, de la classification et de la spécification de toutes ces publications nous paraît d'autant plus illusoire que ce genre de publications a déjà fait l'objet d'une bibliographie systématique et complète [1]. Quant aux thèses de doctorat, généralement moins importantes au point de vue scientifique, il est relativement facile d'en avoir connaissance, au besoin, par l'intermédiaire des bibliothèques publiques.

Comme toutefois nous nous sommes proposé, en rédigeant le présent Catalogue, non seulement de mettre à la disposition des intéressés un manuel bibliographique pouvant servir, le cas échéant, à l'étude des hautes Mathématiques, mais encore de donner une fidèle image d'une bibliothèque existante, telle qu'elle a été inventoriée par nous, il nous est arrivé de mentionner par-

---

(1) ROYAL SOCIETY OF LONDON, *Catalogue of scientific Papers* 1800-1900, *Subject index*. Vol. I : *Pure mathematics*; Cambridge, 1908.

fois des publications isolées rentrant dans les catégories mentionnées plus haut, mais étant rangées, pour une raison ou pour une autre, parmi les livres annotés. Aussi, en nous efforçant d'atteindre le second des objectifs mentionnés ci-dessus, se peut-il que nous nous soyons quelquefois écarté des exigences rigoureuses d'une ordonnance objective et scientifique; grâce à l'index alphabétique, il est toutefois à espérer qu'on pourra se tirer d'affaire sans difficulté.

En terminant, nous nous faisons un devoir d'exprimer ici publiquement notre profonde gratitude à M. C. Grönblad, Conservateur à la Bibliothèque Nobel, à qui nous sommes redevables de maints précieux conseils.

STANISLAUS GRÖNFELDT.

A cet exposé si intéressant il nous suffira, pour donner à nos lecteurs une idée complète de la publication, de joindre la Table des Matières de l'Ouvrage :

C. D.

LORIA (GINO). — GUIDA ALLO STUDIO DELLA STORIA DELLE MATEMATICHE. *Manuali Hœpli*. 1 vol. in-8°, XVI-228 pages. Ulrico Hœpli, Milan, 1916.

Le petit Livre que M. Gino Loria présente aujourd'hui au public appartient à la collection bien connue des *Manuali Hœpli*, c'est-à-dire qu'il offre au lecteur, en plus de sa valeur intrinsèque, tout ce qu'il peut désirer au point de vue typographique. Le caractère est agréable à lire, le format commode, aussi bien pour la bibliothèque que pour la poche, et, ce qui ne gâte rien et caractérise bien nos amis les Italiens, le tout présente un certain souci d'élégance, même de recherche.

Ce Livre est le résultat ou, pour mieux dire, la manifestation d'un long labeur et d'une idée poursuivie avec méthode et persévérance. Au reste, si les circonstances avaient été différentes, il aurait eu une tout autre destinée. Avant que de paraître, ce Livre avait déjà une histoire.

Au quatrième Congrès de Mathématiciens, tenu en avril 1908, M. Gino Loria, dans une Communication *Sur les moyens pour faciliter et diriger les études sur l'Histoire des Mathématiques* (*Comptes rendus du IVe Congrès de Mathématiciens*, t. III, 1908), avait manifesté l'opinion que, pour accroître le nombre trop restreint de ceux qui s'occupent de l'Histoire des Sciences exactes, il convenait de rédiger un guide, ou un Manuel si ce dernier terme convenait mieux, destiné à éviter, à ceux qui voudraient se consacrer à ce genre d'études, les hésitations pénibles du début, les faux pas et la perte de temps. Il ne s'agissait pas bien entendu de former artificiellement des historiens. Cela aurait été aussi illusoire que de formuler une recette pour former des savants ou des artistes. Mais il était indubitablement utile, et

cela était possible, de recueillir et de coordonner les règles à suivre par ceux qui cherchent à apporter quelques contributions à nos connaissances sur l'évolution des idées et des méthodes en Mathématiques.

Ces idées étaient depuis longtemps déjà chères à M. Gino Loria et il leur avait consacré certaines études, tout particulièrement dans les *Comptes rendus de la Société italienne pour l'Avancement des Sciences*. Encouragé par des personnes compétentes, il avait songé à les réaliser et il avait pensé à un Livre collectif de caractère international. Évidemment les conditions politiques du monde sont devenues telles que, pour une période de temps dont il est impossible de préciser le terme, cette réalisation est impossible, même pour un Livre d'un caractère exclusivement scientifique. M. Gino Loria avait depuis longtemps continué à rassembler les matériaux utiles à la réaction d'un tel Livre; depuis 1898 c'est par ses soins qu'est publié le *Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze matematiche*; il n'a pas voulu retarder davantage son apparition et il vient de publier cet Ouvrage qu'il appelle modestement un essai qui, disons-le tout de suite, est fort heureux.

Le Livre est divisé en deux Parties d'inégal développement.

Dans la première, courte par son objet lui-même, se trouve succinctement recueilli tout ce que, d'après l'Auteur, doit nécessairement connaître celui qui veut se consacrer à l'étude de l'Histoire des Mathématiques. Cette histoire, comme, du reste, tout autre branche de l'histoire, est une reconstruction du passé faite à l'aide de toutes les sources d'informations aujourd'hui existantes. Aussi les méthodes de recherches ne diffèrent-elles pas, quant au fond, de celles en usage dans les autres branches de l'histoire. M. Gino Loria a cru bon de donner quelques généralités sur la méthode historique en général et tout particulièrement sur les applications à la critique littéraire. Ceci fait, il passe rapidement en revue les œuvres et périodiques qui permettront de fixer les points auxquels, aujourd'hui, sont arrivées les recherches sur l'Histoire des Sciences exactes. L'Auteur, en citant un Ouvrage, donne un rapide aperçu ou tout au moins une appréciation sur son contenu. Pour bien faire comprendre sa pensée, je citerai quelques noms d'auteurs français et quelques titres d'Ouvrages bien connus :

E. Picard, « La Science moderne et son état actuel »; P. Tannery, Pour l'histoire de la science hellène. De Thalès à Empédocle »; G. Milhaud, « Les philosophes géomètres de la Grèce, Platon et ses prédécesseurs ». Il dénombre aussi, avec une parfaite connaissance, les grands périodiques, en citant, dans chacun d'eux, les études les plus remarquables sur l'Histoire des Mathématiques qui y figurent.

Dans la seconde Partie, l'Auteur fait connaître les moyens qui sont aujourd'hui à la disposition de ceux qui veulent entreprendre quelques recherches historiques nouvelles sur une des branches des Sciences mathématiques. « Ce sont, dit-il, les auxiliaires de cette recherche. » Il les classe en trois espèces : les uns sont biographiques, les autres bibliographiques, enfin les derniers de nature critique. M. Gino Loria s'est particulièrement étendu sur la biographie et les collections biographiques. Il a noté par pays, et dans chaque pays par régions, les sources fondamentales. Pour citer quelques noms et quelques Ouvrages, je mentionnerai les « Éloges académiques et Discours » de M. G. Darboux, la collection intitulée *Les Savants du jour*, due à M. E. Lebon. Un long Chapitre est consacré aux œuvres complètes et correspondances scientifiques. Dans l'énumération de ces collections, on a plaisir à constater que, grâce à l'Institut de France tout particulièrement, notre pays est un de ceux qui est le plus qualifié pour faire connaître les œuvres de ses savants. Nous y trouvons mentionné, en outre, les œuvres de A. Cauchy, de Fermat, de Laplace, de Ch. Hermite, etc. Parlant des renseignements bibliographiques, l'Auteur ne pouvait pas ne pas citer le Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques. Enfin un Chapitre entier est consacré aux moyens de nature critique. M. Gino Loria y mentionne les différents périodiques qui sont publiés tant en France qu'à l'étranger et dont le but est, en particulier, de faire paraître, sur tout ce qui est publié en sciences mathématiques des articles de critique et les analyses.

Pour terminer, M. Gino Loria expose comment, à son idée, il faut procéder pour écrire soit la biographie d'un mathématicien, soit l'histoire d'une théorie déterminée, soit une histoire générale les Mathématiques pendant une période limitée de temps.

Ed. Ouivet.

MÉLANGES.

SUR UN THÉORÈME DE JOSEPH BERTRAND RELATIF A LA CINÉMATIQUE DES MILIEUX CONTINUS;

PAR M. PAUL APPELL.

I. Joseph Bertrand, à la suite d'une discussion avec Helmholtz relative à la théorie des tourbillons, a démontré le théorème suivant : *Dans tout volume élémentaire d'un fluide en mouvement, entourant un point* M *du fluide, il existe un ou trois éléments plans* B, *contenant* M *à leur intérieur et tels qu'après un temps infiniment petit dt les molécules actuellement situées sur* B *se retrouvent sur un plan parallèle* (*Comptes rendus*, t. LXVI, 1868, 1er semestre, p. 1227). J. Bertrand termine sa Note en indiquant qu'il y a désaccord entre ce résultat et « ceux d'un Mémoire fort remarqué du *Journal de Crelle*, t. 55, p. 25 ».

On sait que ce désaccord n'existe pas; on sait d'autre part que les résultats du *Journal de Crelle* avaient été donnés, bien auparavant, sous forme analytique, par Cauchy, dans un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences de Paris, en 1815 et imprimé dans le *Recueil des Savants étrangers* en 1827; ce Mémoire, intitulé *Théorie de la propagation des ondes à la surface d'un fluide pesant d'une profondeur indéfinie*, est reproduit dans le premier Volume (1re série) des *Œuvres complètes de Cauchy*, imprimé chez Gauthier-Villars en 1882 (2e Partie, Section 1re).

Je me propose de montrer sommairement comment le théorème de J. Bertrand conduit à des recherches dignes d'intérêt, dans la cinématique et la mécanique des fluides.

II. On sait que la déformation infiniment petite que subit pendant le temps dt un volume élémentaire fluide entourant un point $M(x, y, z)$ d'un fluide peut être considérée comme résul-

tant d'une translation et d'une déformation homogène (dite *tangente à la déformation finie*). Cette déformation homogène est définie par rapport à des axes rectangulaires $Mx'y'z'$ de directions fixes passant par M, par des formules [1] telles que

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} x_1 &= (1 + a_{11})x' + a_{12}y' + a_{13}z',\\ y_1 &= a_{21}x' + (1 + a_{22})y' + a_{23}z',\\ z_1 &= a_{31}x' + a_{32}y' + (1 + a_{33})z', \end{aligned}\right.$$

dans lesquelles

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x}\,dt, & a_{12} &= \frac{\partial u}{\partial y}\,dt, & a_{13} &= \frac{\partial u}{\partial z}\,dt,\\ a_{21} &= \frac{\partial v}{\partial x}\,dt, & a_{22} &= \frac{\partial v}{\partial y}\,dt, & a_{23} &= \frac{\partial v}{\partial z}\,dt,\\ a_{31} &= \frac{\partial w}{\partial x}\,dt, & a_{32} &= \frac{\partial w}{\partial y}\,dt, & a_{33} &= \frac{\partial w}{\partial z}\,dt, \end{aligned}\right.$$

u, v, w désignant les composantes à l'instant t de la vitesse du point M.

Le théorème classique est que cette déformation pure peut être considérée comme résultant de trois dilatations rectangulaires et d'une rotation élémentaire de composantes $\xi\,dt$, $\eta\,dt$, $\zeta\,dt$, où le vecteur ξ, η, ζ est le vecteur tourbillon Ω au point M.

Soient α, β, γ; α', β', γ'; $\alpha'', \beta'', \gamma''$ les cosinus directeurs de trois demi-droites MD, MD′, MD″ formant un véritable trièdre ayant pour sommet l'origine des axes $Mx'y'z'$, et $\lambda, \lambda', \lambda''$ trois coefficients relatifs au point M à l'instant t; le théorème de J. Bertrand revient à ce fait que l'on peut toujours déterminer ces diverses quantités de façon que les équations (1) puissent être mises sous la forme

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 &= (1 + \lambda\,dt)(\alpha x' + \beta y' + \gamma z'),\\ \alpha' x_1 + \beta' y_1 + \gamma' z_1 &= (1 + \lambda'\,dt)(\alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z'),\\ \alpha'' x_1 + \beta'' y_1 + \gamma'' z_1 &= (1 + \lambda''\,dt)(\alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' z'). \end{aligned}\right.$$

En effet, remplaçant x_1, y_1, z_1 par leurs expressions (1) et identifiant, on a trois groupes de trois équations dont le premier est

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha(a_{11} - \lambda\,dt) + \beta a_{21} + \gamma a_{31} &= 0,\\ \alpha a_{12} + \beta(a_{22} - \lambda\,dt) + \gamma a_{32} &= 0,\\ \alpha a_{13} + \beta a_{23} + \gamma(a_{33} - \lambda\,dt) &= 0. \end{aligned}\right.$$

---

(1) Voir notre *Traité de Mécanique*, t. III, Chap. XXXII.

les autres s'obtenant en accentuant une fois ou deux fois les lettres grecques.

On voit alors que les nombres λ, λ', λ'' sont les trois racines de l'équation cubique

$$D(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda\, dt & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda\, dt & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda\, dt \end{vmatrix} = 0.$$

Si nous prenons ici le cas général où les trois racines sont distinctes, d'ailleurs réelles ou imaginaires, nous trouvons donc trois directions MD, MD', MD'' dont une réelle, les deux autres réelles ou imaginaires. On a ainsi le résultat suivant, en interprétant les équations (3) : *la déformation pure tangente peut être considérée comme résultant de trois dilatations suivant les trois axes* D, D', D'', *les trois coefficients de dilatation étant* λ, λ', λ''. Si une molécule se trouve à l'instant t dans un des plans B, B', B'' perpendiculaires à ces trois directions, elle s'y trouve encore à l'instant $t + dt$; car si l'on a par exemple à l'instant t

$$\alpha x' + \beta y' + \gamma z' = \text{const.},$$

on a aussi, à l'instant $t + dt$,

$$\alpha x'_1 + \beta y'_1 + \gamma z'_1 = \text{const.}$$

Les trois plans B, B', B'' forment un trièdre supplémentaire de D, D', D''. Les arêtes C, C', C'' intersections respectives des plans B'B'', B''B, BB' sont, comme les plans B, B', B'', conservées dans la déformation.

On démontrera facilement que le théorème de J. Bertrand est, au point de vue analytique, le même que le théorème suivant aujourd'hui bien connu et discuté dans tous ses détails : *Dans une transformation homographique d'un plan en lui-même, il existe trois points qui coïncident avec leurs homologues.*

III. Employons maintenant les notations classiques

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \varepsilon_1 = \dfrac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_2 = \dfrac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_3 = \dfrac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_1 = \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}, & \gamma_2 = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}, & \gamma_3 = \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}, \\ 2\xi = \dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z}, & 2\eta = \dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x}, & 2\zeta = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{array} \right.$$

et celles dont j'ai fait usage dans des recherches *Sur quelques fonctions de point dans le mouvement d'un fluide* (1),

$$(6)\quad \begin{cases} \theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \\ \delta = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 4(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2), \\ \chi = 4\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 - \varepsilon_1\gamma_1^2 - \varepsilon_2\gamma_2^2 - \varepsilon_3\gamma_3^2, \\ \Omega^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, \\ \varphi = \varepsilon_1\xi^2 + \varepsilon_2\eta^2 + \varepsilon_3\zeta^2 + \gamma_1\eta\zeta + \gamma_2\zeta\xi + \gamma_3\xi\eta. \end{cases}$$

Nous verrons, en développant, que l'équation $D(\lambda) = 0$ s'écrit

$$(7)\quad \lambda^3 - \lambda^2\theta - \lambda\left(\Omega^2 - \frac{1}{4}\delta\right) + \varphi + \frac{1}{4}\chi = 0.$$

Il est à remarquer que, dans la dérivée totale par rapport au temps, de chacun des coefficients de cette équation, figure le suivant. Ainsi on a, d'après les formules du Mémoire cité,

$$\frac{d\theta}{dt} = \theta' - \theta^2 + 2\left(\Omega^2 - \frac{1}{4}\delta\right),$$

où θ' est formé avec le vecteur accélération

$$(A)\quad \begin{cases} u' = \dfrac{du}{dt} = \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x}u + \dfrac{\partial u}{\partial y}v + \dfrac{\partial u}{\partial z}w, \\ v' = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial v}{\partial x}u + \dfrac{\partial v}{\partial y}v + \dfrac{\partial v}{\partial z}w, \\ w' = \dfrac{dw}{dt} = \dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\partial w}{\partial x}u + \dfrac{\partial w}{\partial y}v + \dfrac{\partial w}{\partial z}w, \end{cases}$$

comme θ avec le vecteur vitesse.

De même

$$(8)\quad \frac{d}{dt}\left(\Omega^2 - \frac{1}{4}\delta\right) = 2(\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta') - \frac{1}{2}\Sigma[\gamma_1\gamma_1' - 2(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)\varepsilon_1'] \\ - \theta\left(\Omega^2 - \frac{1}{4}\delta\right) + 3\left(\varphi + \frac{1}{4}\chi\right),$$

(1) *Journal de Mathématiques* de M. Jordan, 5e série, t. IX, 1903, p. 5, et *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXXI, 1903, p. 68.

où l'on a posé

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\varepsilon'_1 = \frac{\partial u'}{\partial x}, && \varepsilon'_2 = \frac{\partial v'}{\partial y}, && \varepsilon'_3 = \frac{\partial u'}{\partial z}, \\ &\gamma'_1 = \frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z}, && \gamma'_2 = \frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x}, && \gamma'_3 = \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y}, \\ &2\xi' = \frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z}, && 2\eta' = \frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x}, && 2\zeta' = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}. \end{aligned}\right.$$

Enfin

$$(10)\quad \begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\varphi + \frac{1}{4}\chi\right) &= \sum \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\xi' + \sum(\varepsilon'_1\xi^2 + \gamma'_1\eta\zeta) \\ &+ \frac{1}{4}\sum\left[(4\varepsilon_1\varepsilon_2 - \gamma_1^2)\varepsilon'_1 + (\gamma_2\gamma_3 - 2\varepsilon_1\gamma_1)\gamma'_1\right] \\ &- \theta\left(\varphi + \frac{1}{4}\chi\right). \end{aligned}$$

IV. Sans développer davantage ces calculs, je montrerai en terminant comment le vecteur tourbillon se rattache à la représentation précédente.

Écrivons les équations (4) :

$$\begin{aligned} \lambda\,\alpha &= \alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial v}{\partial x} + \gamma\frac{\partial w}{\partial x}, \\ \lambda\,\beta &= \alpha\frac{\partial u}{\partial y} + \beta\frac{\partial v}{\partial y} + \gamma\frac{\partial w}{\partial y}, \\ \lambda\,\gamma &= \alpha\frac{\partial u}{\partial z} + \beta\frac{\partial v}{\partial z} + \gamma\frac{\partial w}{\partial z}; \\ \lambda'\alpha' &= \alpha'\frac{\partial u}{\partial x} + \beta'\frac{\partial v}{\partial x} + \gamma'\frac{\partial w}{\partial x}, \\ \lambda'\beta' &= \alpha'\frac{\partial u}{\partial y} + \beta'\frac{\partial v}{\partial y} + \gamma'\frac{\partial w}{\partial y}, \\ \lambda'\gamma' &= \alpha'\frac{\partial u}{\partial z} + \beta'\frac{\partial v}{\partial z} + \gamma'\frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}$$

Ajoutons les trois premières équations après les avoir multipliées respectivement par α', β', γ'; les trois dernières après les avoir multipliées respectivement par α, β, γ; puis retranchons membre à membre les deux équations obtenues, nous aurons

$$\begin{aligned} &(\lambda - \lambda')(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma') \\ &\quad = (\gamma\beta' - \beta\gamma')\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + (\alpha\gamma' - \gamma\alpha')\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ &\quad + (\beta\alpha' - \alpha\beta')\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

Nous obtiendrons deux autres relations analogues en permutant les accents de λ, λ', α_1, β_1, γ_1, α'_1, β'_1, γ'_1. La quantité $\alpha_1\alpha'_1 + \beta_1\beta'_1 + \gamma_1\gamma'_1$ est cos DD'. Désignons par a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'', les cosinus directeurs des arêtes C, C', C'' du trièdre dont les faces sont B, B', B''. Nous aurons

$$\frac{a''}{\gamma_1\beta'_1 - \beta_1\gamma'_1} = \frac{b''}{\alpha_1\gamma'_1 - \gamma_1\alpha'_1} = \frac{c''}{\beta_1\alpha'_1 - \alpha_1\beta'_1} = \frac{1}{\sin \mathrm{DD}'}.$$

L'équation ci-dessus s'écrit donc

$$(\lambda - \lambda') \cot \mathrm{DD}' = 2(\xi a'' + \eta b'' + \zeta c''),$$

où le second membre est la projection $\Omega_{C''}$ du vecteur tourbillon sur l'arête C''. On a ainsi le groupe des trois formules

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2}(\lambda - \lambda') \cot \mathrm{DD}' = \Omega_{C''}, \\ &\frac{1}{2}(\lambda' - \lambda'') \cot \mathrm{D'D''} = \Omega_{C}, \\ &\frac{1}{2}(\lambda'' - \lambda) \cot \mathrm{D''D} = \Omega_{C'}. \end{aligned}\right.$$

Quand, dans l'élément considéré, le trièdre des trois demi-droites MD, MD', MD'' est *trirectangle*, le tourbillon Ω est *nul*, et réciproquement. Si donc, dans un élément, ce trièdre est trirectangle à l'instant initial, les accélérations dérivant d'un potentiel, il l'est toujours. Dans un mouvement irrotationnel, tous les trièdres MDD'D'' relatifs à tous les points M sont trirectangles à chaque instant.

Si deux des droites, par exemple MD et MD', sont rectangulaires, le tourbillon Ω est dans le plan de ces deux droites.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Œuvres de G.-H. HALPHEN publiées par les soins de *C. Jordan*, *H. Poincaré*, *E. Picard* avec la collaboration de *E. Vessiot*. Tome I : 1 vol. gr. in-8 (25-16), XLIII-570 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1916. Prix : 20fr.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

INSTITUT DE FRANCE. ACADÉMIE DES SCIENCES. — PROCÈS-VERBAUX DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE TENUES DEPUIS LA FONDATION DE L'INSTITUT JUSQU'AU MOIS D'AOUT 1835, publiés conformément à une décision de l'Académie, par MM. les Secrétaires perpétuels. Tome IV : An 1808-1811. 1 vol. in-4 jésus (32 × 25), IV + IV — 627 pages. Hendaye (Basses-Pyrénées), imprimerie de l'Observatoire d'Abbadia, 1913. (En vente chez Gauthier-Villars, Paris.)

Pour l'an 1808, Bougainville, qui passe normalement à la présidence, désire se démettre de ses fonctions pour raisons de santé : la Classe n'accède pas à sa demande, le nouveau vice-président, Tenon, pouvant le remplacer éventuellement.

Le 11 janvier, le Ministre de l'Intérieur annonce que l'intention de S. M. I. est de recevoir séparément le compte que chaque Classe doit lui rendre, et qu'elle ordonne qu'il lui soit fait un discours d'une demi-heure de lecture qui soit un résumé du compte général. La députation qui portera le Rapport sur l'Histoire des Sciences à S. M. I. sera composée du plus ancien de chaque Section.

Le 18, beau Rapport de Vauquelin sur un Mémoire de Chevreul relatif à l'indigo.

Le 25, la Classe interdit à ses membres de prendre à la tête d'un livre ou dans les journaux le titre de Membre de l'Institut sans le faire précéder de son nom.

Gay-Lussac lit un Rapport sur un Mémoire de Malus concernant l'action des corps opaques sur la lumière.

Le 1er février, Vauquelin analyse un travail de Thénard sur les combinaisons des acides végétaux avec l'alcool.

Le 8, Tenon rend compte de la présentation à Napoléon du rapport sur l'Histoire des Sciences. La députation a été introduite par un chambellan dans la salle du Conseil d'État ; S. M. I. a daigné faire donner des sièges au Président et au Vice-Président. Au discours lu par Delambre, S. M. I. a répondu en ces termes : « J'ai

voulu vous entendre sur les progrès de l'esprit humain dans ces derniers temps, afin que ce que vous auriez à me dire fût entendu de toutes les Nations et fermât la bouche aux détracteurs de notre Siècle qui, cherchant à faire rétrograder l'esprit humain, paraissent avoir pour but de l'éteindre. J'ai voulu connaître ce qui me restait à faire pour encourager vos travaux, pour me consoler de ne pouvoir plus concourir autrement à leur succès. Le bien de mes peuples et la gloire de mon trône....

Le 22, rapport intéressant sur le *Traité de Navigation* de Du Bourguet.

Le 14 mars, aperçus curieux dans un Rapport de Charles sur divers Mémoires de Hassenfratz concernant la coloration des corps.

Le 21, compte rendu des opérations imaginées et exécutées par Bremontier pour la fixation des dunes.

Le 28, présentation d'un nouveau cristal très supérieur au flint-glass anglais.

Le 11 avril, nouvelle édition de la *Théorie de la Terre*, de Clairaut, donnée par Poisson.

Le 25, Rapport monumental lu par Cuvier sur les recherches de Gall et Spursheim relatives au système nerveux en général et sur le cerveau en particulier : les Commissaires ne dissimulent pas qu'ils ont un instant hésité à se charger de cet examen ; leur étude, qui n'occupe pas moins de trente colonnes d'impression, est cependant la plus longue qui ait été insérée aux *Procès-Verbaux*.

Le 9 mai, un membre réclame contre un article du *Journal de l'Empire* dans lequel on a dénaturé les conclusions d'un Rapport adopté par la Classe.

Le 23, un membre demande expressément qu'il soit placé deux planches noires dans la salle des séances : il en est ainsi ordonné.

Rapport de Huzard sur l'impression des Cartes géographiques par le procédé Poterat.

Le 6 juin, accident survenu à Gay-Lussac par une explosion de potasse caustique qui s'est portée dans les yeux. Réglementation du régime des correspondants qui, au nombre de 100, seront plus équitablement répartis entre les diverses sections de la classe des Sciences.

Le 16 août, important Rapport de Lagrange, Laplace et Biot sur le Mémoire de Poisson relatif aux perturbations des planètes.

Le 29, examen d'une proposition de Burckhardt touchant la mesure d'un arc du parallèle qui passe par l'Observatoire de Milan.

Le 12 septembre, Rapport sur une voiture destinée au service de la poste aux lettres. — Rapport sur un métier à fabriquer le « Thull », dit « toile d'araignée » ou « tricot de Berlin ». — Rapport digne d'attention sur le plan d'une caisse de prévoyance et de secours, dont l'auteur est un membre de l'Administration des Hospices civils de Paris : quiconque s'occupe d'œuvres d'assistance et de mutualité y trouverait encore matière à réflexion.

Le 26, Laplace présente un supplément à son *Traité de Mécanique céleste*, dont l'objet est de perfectionner la théorie des perturbations planétaires.

Le 3 octobre, la Classe constate qu'elle n'a reçu aucun Mémoire sur la question des perturbations des planètes à orbites très excentriques et très inclinées.

Le 17, il faut retenir un Rapport de Delambre et Burckhardt sur un travail d'Oltmanns concernant les positions géographiques du royaume de Westphalie, notamment celle de l'Observatoire de Göttingen.

Le 24, présentation de l'*Acoustique* de Chladni. Très humoristique Rapport sur l'histoire, les espèces et les vertus des Narcisses.

Le 31, Watt est élu correspondant dans la Section de Mécanique. — Saint-Michel, procureur général à Douai, adresse un Mémoire d'*Algèbre descriptive*.

Le 7 novembre, Biot rend compte d'expériences sur la propagation du son à travers les corps solides et à travers l'air dans les tuyaux cylindriques très allongés.

Le 14, la Classe accorde l'entrée des séances au médecin Friedlander qui offre ses services à l'Institut pour donner des extraits des ouvrages allemands qui seront adressés à la Compagnie.

Le 21, analyse d'un Mémoire de Larrey sur la colique de Madrid.

Le 5 décembre, Des Essartz et Pinel résument un Mémoire sur la plique polonaise, par Robin, ancien médecin du grand Frédéric alors domicilié à Berny.

Le 19, Rapport important de Laplace, Berthollet, Chaptal et Haüy sur un Mémoire consacré par Malus à la double réfraction.

Le 26, la Classe propose pour sujet de prix de physique en 1809 la question suivante : « Rechercher s'il existe une circulation dans les animaux connus sous le nom d'astéries ou d'étoiles de mer, d'échinus, oursins, etc., et, dans le cas où elle existerait, en décrire la marche et les organes. »

Pour 1809, Tenon devient président et Prony est élu vice-président.

Le 16 janvier, Rapport de Prony sur les moyens employés à l'Hôtel de la Monnaie pour opérer la combustion de la fumée de la « machine à feu » qui met en jeu les laminoirs.

Le 30, Laplace lit un Mémoire sur la loi de la réfraction extraordinaire de la lumière dans les milieux transparents.

Le 20 février, Prony, Tessier et Berthollet donnent un Rapport intéressant et important sur les moyens proposés pour dessécher l'étang de Capestrang, situé près de Narbonne.

Le 27, il est décidé qu'un prix de 3000fr sera décerné au savant qui donnera la théorie mathématique des expériences acoustiques de Chladni.

Le 13 mars, Lagrange lit un Mémoire sur la Théorie générale de la variation des constantes arbitraires dans tous les problèmes de Mécanique. — Rapport sur le sextant à réflexion de Lenoir (intérêt historique).

Le 20, Berthollet rend compte des résultats du concours relatif aux phénomènes de phosphorescence.

Le 10 avril, rapport sur un nouveau flint-glass qui donne lieu à une étude historique de la fabrication des objectifs achromatiques. — Rapport de Laplace et Lacroix sur un Mémoire de Poisson relatif à la rotation de la Terre.

Le 24, le Ministre de l'Intérieur transmet une ampliation d'un décret impérial sur les formes à suivre pour les discours qui doivent être prononcés au nom des Corps devant sa Majesté.

Le 8 mai, rapport de Carnot, Charles et Prony sur une nouvelle machine à feu pour élever l'eau.

Le 15, Rapport de Desmarest sur un métier à filet.

Le 22, Rapport sur un Mémoire de Magendie et Delille ayant pour titre : *Examen de l'action de quelques végétaux sur la moelle épinière.*

Le 3 juillet, Rapport sur un Mémoire de Chevreul relatif au *principe amer* formé par l'action de l'acide nitrique sur l'indigo (acide picrique).

Le 10, Note de Burckhardt sur la comète de Halley dont il a calculé les perturbations.

Le 17 juillet, une Commission examine les moyens d'augmenter l'activité de la Classe : en juin en effet, deux fois de suite, le défaut de matière a obligé de lever la séance peu de minutes après l'ouverture. La Classe, alarmée d'une disette à laquelle elle n'était pas accoutumée, croit y trouver trois causes : 1° la trop grande affluence des étrangers aux séances, ce qui intimide plusieurs membres; 2° la concurrence de sociétés savantes particulières; 3° l'accroissement du nombre des périodiques scientifiques qui permettent une publicité rapide. Elle adopte trois mesures : restriction des entrées aux séances; création d'interprètes qui donneront des analyses des travaux étrangers; impression, dans les Mémoires de la Classe, des travaux importants des Membres, même lorsqu'ils auraient été publiés ailleurs.

Le 31, Rapport de Desmarest sur un métier à bas de Wiedmann.

Le 7 août, analyse d'un travail de Chevreul sur les substances précipitant la gélatine. — La Classe arrête une liste de 56 personnes qui auront le droit d'entrée aux séances, pour avoir remporté un prix ou présenté deux Mémoires : on y relève les noms d'Ampère, Chevreul, Decandolle, Clément, Desormes, Perceval, Poisson, Thénard, Venturi, ...

Le 17, Rapport de Lagrange, Legendre et Delambre sur la traduction des *Données d'Euclide* dont Peyrard a établi aussi un texte critique (il s'agit des Livres 7, 8, 9 et 10 qui traitent des quantités numériques) : Delambre apprécie avec compétence les variantes relevées sur divers manuscrits.

Le 4 septembre, Arago lit un Mémoire sur les opérations qu'il a exécutées en Espagne pour la prolongation de la méridienne. — Delambre analyse un Mémoire du même Arago, datant déjà de trois ans et relatif à la vitesse de la lumière : il donne à cette occasion un historique de la question. — L'Académie se décide à pourvoir à la vacance créée dans la Section d'Astronomie par la mort de Lalande qui sera encore, malgré cela, porté encore comme absent jusqu'à

la fin d'octobre. — Les fonctions des interprètes (Helma, Eisenmann, Friedlander) sont réglementées, mais leur rétribution est ajournée.

Le 18, Arago est élu en remplacement de Lalande. — Laplace lit un Mémoire sur la libration de la Lune.

Le 24, compte rendu d'un Mémoire de Chevreul sur différents composés formés par la réaction de l'acide sulfurique sur le camphre.

Le 9 octobre, étude des moyens de faire disparaître et réapparaître l'écriture, et de fabriquer une encre indélébile.

Le 16, Rapport de Legendre sur les nouveaux polygones et polyèdres étoilés de Poinsot, professeur de Mathématiques au Lycée Bonaparte.

Le 30, Rapport de Deyeux sur les manufactures de produits chimiques qui peuvent être dangereux : ces établissements sont répartis en trois classes suivant leur insalubrité.

Le 13 novembre, lecture d'un Mémoire de Legendre sur diverses sortes d'intégrales définies. — Rapport sur un Mémoire de Delille et Magendie concernant les substances émétiques, et où la méthode expérimentale moderne est déjà judicieusement appliquée : « Sans le danger de mettre au jour les effets puissants de ces sortes de poisons, ce Mémoire aurait dû trouver place parmi ceux des Savants étrangers. »

Le 5 décembre, à propos d'une nouvelle lampe de Lange, étude critique des systèmes d'éclairage.

Le 11, présentation de l'*Histoire générale des Mathématiques* de Bossut.

Le 26, Rapport de Lacroix et Laplace sur un Mémoire de Poisson sur les variations des constantes arbitraires dans les problèmes de Mécanique céleste. — Le prix de la double réfraction est attribué à l'unanimité à Malus, lieutenant-colonel au corps du Génie, Membre de l'Institut d'Égypte. La Classe propose comme nouveau sujet de prix la théorie mathématique de la propagation de la chaleur dans les corps solides. — La médaille Lalande est décernée à Gauss, pour sa théorie des planètes et son moyen de déterminer l'orbite de première approximation d'après trois observations et sans connaissance préliminaire d'aucun des éléments. — Rapport de Legendre sur un travail d'application des logarithmes aux changes, à l'usage des commerçants. — Le président sortant Tenon lit un

Rapport sur quelques objets qui paraissent devoir fixer l'attention de la Classe (liste des académiciens défunts et encore sans « éloge »; état de la bibliothèque; négligence des membres pour le dépôt des rapports; situation languissante des publications).

Durant 1810, la Classe sera présidée par De Prony; elle nomme De Lacépède vice-président.

Le 8 janvier, annonce de la mort du comte de Fourcroy. — Présentation par Gay-Lussac d'une méthode d'analyse des substances végétales et animales.

Le 22, nouveau Rapport sur les divers systèmes de lampes à huile.

Le 29, Thénard est élu dans la section de Chimie.

Le 26 février, intéressant Rapport d'Huzard sur l'*Art de l'Imprimerie*, de Pierres. — Rapport de Chaptal sur un Mémoire de Bérard consacré à l'acide oxalique et aux oxalates; de Pinel sur un Mémoire relatif aux accidents causés par la tarentule.

Le 5 mars, le Ministre de l'Intérieur invite l'Institut à lui présenter le dessin et l'aperçu de la dépense de ce qu'il se propose de faire pour l'illumination générale de Paris à l'occasion du mariage de S. M. I. — Carnot fait hommage de son Ouvrage intitulé : *De la défense des places fortes*.

Le 21 mai, Rapport de Laplace, Biot et Arago sur la mesure des hauteurs par le baromètre, d'après Daubuisson.

Le 28, Rapport de Burckhardt sur une pendule à éphémérides.

Le 18 juin, lecture d'un Mémoire de Rochon sur la double réfraction.

Le 9 juillet, Gergonne et Lavernède adressent le premier cahier des *Annales de Mathématiques pures et appliquées*. — La Classe adopte le principe de désigner à l'avance des commissaires pour ses divers prix.

Le 30, Malus présente un goniomètre de son invention.

Le 13 août, Malus est élu dans la Section de Physique.

Le 1[er] octobre, le prix d'Anatomie et de Médecine est accordé à Cuvier pour ses *Leçons d'Anatomie comparée*.

Le 15, Rapport de Lacroix sur un Mémoire présenté par Wronski et ayant pour titre : *Premiers principes des méthodes analytiques*.

Le 26 novembre, compte rendu par Vauquelin de deux Mémoires de Nysten sur les effets asphyxiants des gaz, et notamment sur l'influence des gaz injectés dans les veines à l'égard des phénomènes de la respiration.

Le 3 décembre, Legendre lit un Mémoire sur la réduction des fonctions de l'ellipse (fonctions elliptiques).

Le 17, Rapport sur les observations des solstices et des équinoxes de Mathieu; sur une nouvelle roue hydraulique de Cagniard-Latour examinée par Carnot.

Le 24, la Classe reçoit les *Leçons de Mécanique analytique*, données à l'École Polytechnique par De Prony, et le *Traité élémentaire d'Astronomie physique* de Biot. — Le sujet suivant est proposé pour le prix de Physique : « Déterminer la chaleur spécifique des gaz, en la comparant à celle de l'eau; déterminer, au moins approximativement, la variation de chaleur spécifique qui est produite par la dilatation des gaz; indiquer les principales conséquences de ces nouvelles déterminations dans les théories physiques. »

Le 31, le Grand-Maître des cérémonies prévient l'Institut que S. M. I. en recevra les Membres individuellement le 1er janvier, et qu'ils devront être en grand costume complet. — Le prix Lalande est décerné aux Mémoires analytiques de Poisson. — Le Ministre de la Guerre demande un rapport sur les moyens de mettre des bornes aux ravages des teignes qui vivent aux dépens des étoffes, des fourrures et autres objets analogues. — Rapport sur l'analyse du bois de campêche, faite par Chevreul.

Pour 1811, Laplace est élu vice-président après un scrutin de ballottage, à une voix de majorité sur Cassini.

Le 21 janvier, Rapport lu par Berthollet sur l'Ouvrage de Thénard et Gay-Lussac, intitulé : *Expériences physico-chimiques faites à l'occasion de la grande batterie voltaïque donnée à l'École Polytechnique par S. M. I.* Ce rapport, auquel ont collaboré Laplace, Monge, Chaptal, Haüy, ne comprend pas moins de 56 colonnes; il est le plus étendu qui ait été publié et constitue un document fondamental pour l'histoire de l'électrolyse. — La fabrication des grandes lunettes astronomiques donne lieu à un Rapport technique de Biot qui occupe plus de 20 colonnes.

Le 28, Rapport désapprobatif sur un nouveau système de navigation par bâtiments à fond plat à semelle.

Le 4 février, Rapport sur une nouvelle poudre à tirer, composée de muriate suroxygéné de potasse, de nitrate de potasse, de soufre et de lycopode. — Rapport de Lacroix et Legendre sur un Mémoire de Mourgues consacré à la fondation de sociétés de secours mutuels.

Le 11, Cauchy lit un Mémoire sur les polygones et les polyèdres, où il généralise les principes donnés par Poinsot. Il donne notamment ce théorème : *Si l'on décompose un polyèdre en tant d'autres que l'on voudra en prenant à l'intérieur de nouveaux sommets, la somme faite du nombre des sommets et de celui des faces surpasse d'une unité la somme des nombres des arêtes et celui des polyèdres* (théorème dont celui d'Euler est un cas particulier où l'on ne considère qu'un polyèdre).

Le 18, Arago lit une Note sur les anneaux colorés et sur un nouvel exemple de polarisation de la lumière.

Le 25, Hachette fait hommage de son *Traité élémentaire des machines*.

Le 4 mars, compte rendu d'expériences relatives au Strychnos et à d'autres plantes empoisonnées.

Le 11, Mémoires de Malus et de Biot sur la réflexion de la lumière.

Le 18, Rapport de Lagrange et Lacroix sur un Mémoire de Corancez relatif aux conditions qui excluent tous les facteurs réels d'un polynome algébrique de degré pair, et la distinction à établir entre divers ordres d'imaginaires, et où l'on trouve plusieurs points dignes de remarque.

Le 1er avril, Rapport de Carnot sur le *nautile sous-marin* des frères Cœssin, fondamental pour l'histoire de la navigation sous-marine : « Il n'y a plus de doute qu'on puisse établir une navigation sous-marine très expéditivement et à peu de frais, et nous croyons que MM. Cœssin ont établi ce fait par des expériences certaines. » (p. 468-470).

Le 15, Rapport sur la conversion de l'alcool en éther par l'acide arsénique, effectuée par Boullay.

Le 29, Laplace lit un Mémoire sur les intégrales définies.

Le 13 mai, la maison Pleyel adresse des cordes métalliques

fabriquées dans ses ateliers avec des métaux de France (il s'agit de faire concurrence aux cordes de Nuremberg). — Jenner est élu associé étranger.

Le 20, Corvisart est élu dans la Section de Médecine.

Le 27, Desormes et Clément présentent un nouveau procédé de congélation.

Le 10 juin, Rapport sur un système de signalement méthodique des plantes, proposé par Lefèvre.

Le 17, Lacroix, chargé de rendre compte d'un Ouvrage de Wronski, intitulé *Introduction à la philosophie des Mathématiques et technie de l'algorithmie*, déclare que ce travail est fondé sur une métaphysique qu'il n'a point étudiée et qu'il lui est impossible de rendre le compte qu'on lui demande.

Le 24, Biot et Laplace examinent un Mémoire sur la *Théorie des moments d'inertie*, présenté par Binet, répétiteur à l'École Polytechnique. Une grande partie de ce travail est devenue classique; l'analyse cependant mérite encore lecture; elle se termine ainsi : « La manière dont M. Binet est parvenu à ses théorèmes montre beaucoup de sagacité et surtout une habitude très heureuse de lire, dans les expressions souvent compliquées des formules analytiques, les résultats simples qu'elles renferment, de manière à pouvoir ensuite les rendre sensibles par d'élégantes constructions. Cette élégance est en quelque sorte devenue un devoir pour les jeunes géomètres après les beaux exemples qu'ils ont eus sous les yeux. Elle en est surtout un pour ceux qui, comme M. Binet, ont étudié à l'École Polytechnique. L'alliance de la Géométrie et de l'Analyse a été portée à un tel point dans cette école célèbre, que des considérations qui paraîtraient extrêmement compliquées et difficiles pour les personnes peu familiarisées avec la Géométrie descriptive, ne paraissent qu'un jeu pour celles qui se sont appliquées à ce genre d'étude, et qui se sont exercées à réaliser dans leur entendement et, pour ainsi dire, à voir des yeux de l'esprit, ce que l'on ne pourrait tracer par des figures que d'une manière extrêmement pénible et grossière. »

Le 3 septembre 1810, l'Académie avait décerné le prix relatif à l'application des Sciences aux Arts utiles, à l'Ouvrage de Delambre sur la méridienne, encore que Méchain ait collaboré à ce travail : sur une réclamation des enfants de Méchain, Arago lit le 1er juil-

let 1811 un Rapport où il amoindrit le rôle de Méchain avec un manque de générosité et de tact qui choque surtout chez l'ami et le protégé de Delambre.

Le 22 juillet S. A. E. Mgr le Grand-Duc de Frankfort adresse à la Classe un premier Mémoire intitulé : *Recherches sur les analogies dans les sections coniques.*

Le 12 août, Rapport sur un travail de Larrey concernant les amputations dans les cas de gangrène. — Lecture d'un Mémoire d'Arago sur de nouveaux phénomènes optiques qu'il a observés sur la lumière polarisée.

Le 19, lecture d'un Mémoire de Malus sur l'axe de réfraction des cristaux et des substances organisées. — Rapport sur un Mémoire de Larrey concernant le tétanos (les travaux de Larrey sur la chirurgie militaire sont plus que jamais d'actualité). — Le Ministre de l'Intérieur transmet un décret impérial réglementant les formalités à remplir quand une Classe de l'Institut voudra exceptionnellement changer le jour d'une séance.

Le 26 août, Deschamps est élu au second tour pour remplacer Sabatier dans la Section de Médecine : Larrey n'arrive qu'en troisième ligne.

Le 2 septembre, mort de M. de Bougainville. — Présentation d'un planimètre graphique pour le toisé des surfaces. — Rapport humoristique d'Arago sur un Mémoire grotesque de Marc-Antoine-César-Auguste Sanchès, ex-professeur doctrinaire aux collèges de Bordeaux et autres villes. — Le Conseil de perfectionnement de l'École Polytechnique comprendra : Monge, Ampère, Poisson et Deshays, nommés par l'École; Lagrange, Laplace, Berthollet, nommés par la Classe.

Le 30, Delambre présente, de la part de l'auteur, le *Traité de Mécanique* de Poisson.

Le 7 octobre, Delambre lit une Notice où il compare l'optique de Ptolémée à celles d'Euclide, d'Alhazen et de Vitellion.

Le 14, Legendre présente ses *Exercices de calcul sur divers ordres de transcendantes et sur les quadratures.*

Le 21, Rapport de Legendre sur un Mémoire de Budan qui n'arrive pas à démontrer rigoureusement des théorèmes entrevus concernant la recherche des racines réelles d'une équation algébrique.

Le 28, Budan proteste contre quelques expressions du Rapport précédent. — Rapport de Lacroix sur un Mémoire de Paoli ayant pour titre : *Réflexions sur les équations primitives qui satisfont aux équations différentielles entre trois ou un plus grand nombre de variables.*

Le 4 novembre, un membre demande l'exécution d'un arrêté pris par la Classe pour que l'on conserve au Secrétariat les Mémoires sur lesquels on aura fait des Rapports.

Le 11, Rapport d'Arago sur la *Réfutation de la théorie des fonctions* de Hœné de Wronski : c'est une défense très nette de la théorie de Lagrange, et une appréciation sévère des prétentions du rêveur polonais. Arago a contribué par là à faire omettre pendant longtemps la prise en considération de résultats neufs enfouis, il est vrai, sous un fatras de déclamations philosophiques.

Le 25, Rapport de Sané sur une nouvelle manière d'enfoncer les pilotis : l'auteur formulera bientôt une réclamation contre ce Rapport.

Le 2 décembre, découverte d'une nouvelle comète par Pons, concierge de l'Observatoire de Marseille.

Le 16, la Classe décerne le prix relatif à la chaleur au Mémoire portant pour épigraphe : *Et ignem regunt numeri*, et dont l'auteur est Joseph Fourier. Elle propose pour nouveau sujet de prix de Mathématiques la recherche des lois de l'équilibre électrique de deux sphères mises en présence.

Le 23, Bessel adresse un Mémoire sur les observations de Bradley dont il a déduit les ascensions des étoiles, leurs déclinaisons, la latitude, l'obliquité, les réfractions. Les résultats de ce beau travail confirment presque entièrement tous les éléments qui servent de fondement à l'Astronomie.

Le 30, le prix Lalande est attribué à Oltmanns et à Bessel.

La période couverte par le Volume que nous venons de feuilleter est marquée par un ralentissement d'activité que la Classe elle-même a reconnu et dont la cause pourrait bien être dans l'influence déprimante du gouvernement impérial. Des tableaux permettent de juger de l'assiduité aux séances : pour 1811, les ronds d'absence sont presque aussi nombreux que les barres de présence. Les Rap-

ports publiés présentent cependant une forme toujours très soignée et restent des documents très importants à consulter.

Terminons par une observation pratique qui s'applique aux quatre Volumes parus : des Tables alphabétiques permettent de trouver aisément tout ce qui concerne un savant ou une institution, et peuvent rendre de grands services pour l'établissement de monographies.

A. BOULANGER.

GRIALOU (J.). — COURS D'HYDRAULIQUE. 1 vol. gr. in-8, VI-549 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1916.

L'Ouvrage que M. Grialou vient de publier contient l'exposé du cours d'Hydraulique appliquée qu'il professe à l'*École centrale lyonnaise*. L'Auteur y a joint quelques études d'Hydrodynamique.

La tâche de l'ingénieur qui doit calculer le rendement d'une machine est assez délicate. Il doit en effet construire un schème qui soit une approximation plus ou moins grande de la machine réelle, et auquel soient applicables les raisonnements mathématiques. Pour cette construction, il devra s'appuyer sur des résultats d'expériences, et c'est là que gît la difficulté, car un appel peu judicieux à l'expérience peut fausser tous les calculs. Il importe donc que le professeur d'école technique sache faire acquérir à ses élèves l'habileté et le jugement nécessaires à ce genre de travaux. Nous ne doutons pas que M. Grialou ne réussisse dans cette voie : à chaque pas, l'attention de l'étudiant est appelée sur les résultats expérimentaux auxquels le professeur a recours pour étayer ses calculs et sur l'usage qu'il fait des équations de l'Hydrodynamique théorique.

On sait quelles ressources les chutes d'eau des régions montagneuses du sud-ouest de la France offrent à l'industrie. Lyon est trop près de ces régions pour que M. Grialou ne se soit pas spécialement attaché dans son cours à l'étude des roues et turbines hydrauliques. C'est donc ces questions qui occupent le plus de place dans l'Ouvrage. Celui-ci débute par un rappel des notions fondamentales d'Hydrostatique et d'Hydrodynamique théoriques, dans le cas des fluides parfaits. La relation de Bernoulli est obtenue de deux manières, soit comme corollaire des équations de l'Hydro-

dynamique appliquées aux fluides pesants et incompressibles, soit en appliquant le principe des forces vives. Vient ensuite l'étude des questions d'écoulement des liquides dans lesquelles on peut négliger la viscosité et le frottement contre les parois : écoulement par les orifices, les ajutages et la théorie des déversoirs. Nous mentionnerons ici l'étude que M. Grialou fait de l'écoulement dans un canal ou un tuyau dont la section varie brusquement. On sait qu'une telle variation produit une perte de charge dont la valeur est déterminée par le théorème de Bélanger ou de Borda-Carnot. L'Auteur détermine cette perte de charge en tenant compte du frottement qu'exercent l'un sur l'autre les différents filets liquides. Pour cela, il admet que, dans un tuyau prismatique, la vitesse d'un filet liquide situé à la distance r de l'axe du tuyau a une expression de la forme $\mathrm{A} - \mathrm{M}(e^{nz} + e^{-nz})$. Si le tuyau est cylindrique, cette expression est remplacée par $\mathrm{A} - \mathrm{M}r^2$. Ces deux hypothèses sont justifiées dans une note placée à la fin du Volume.

M. Grialou passe alors à l'étude si importante des tuyaux de conduite. On sait qu'on doit, dans ces questions, tenir compte du frottement du liquide contre les parois du tuyau et introduire ainsi une fonction de la vitesse moyenne du liquide exprimant ce frottement. Différentes expressions ont été proposées pour cette fonction. En se basant sur l'hypothèse de Navier d'après laquelle le mouvement d'un liquide dans un tuyau circulaire à section constante se ferait par tranches concentriques dont la vitesse décroît à mesure qu'on s'éloigne de l'axe du tuyau, l'Auteur se propose d'établir une théorie rationnelle de ce mouvement. Il arrive ainsi, pour la perte de charge, à une expression qui dépend du coefficient de frottement d'une tranche liquide sur une autre tranche liquide, et du coefficient de frottement du liquide sur la paroi du tuyau. Après avoir étudié différentes questions : conduites branchées, tuyaux de diamètre variable, etc., M. Grialou fait l'étude d'une distribution d'eau en indiquant sur quels principes on se base pour tracer le réseau et en calculant ensuite le diamètre des tuyaux. Le Chapitre se termine par la théorie des [illegible] dans les tuyaux de conduite.

Le Chapitre suivant traite de l'écoulement dans les canaux. Le problème, bien qu'analogue au précédent, est plus compliqué en

ce sens que le frottement contre les parois amène une sorte de dissymétrie dans le mouvement des couches liquides. Là aussi l'Auteur, après avoir exposé les théories déjà connues, donnera une théorie rationnelle de la question. La première étude est celle du mouvement d'un liquide permanent et uniforme dans un canal dont la section admet un axe de symétrie. L'Auteur étudie d'abord ce mouvement dans l'hypothèse où la vitesse est constante dans une tranche horizontale. Le problème se ramène à l'intégration de l'équation différentielle

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{f'(z)}{f(z)}\frac{du}{dz} - \frac{k}{\varepsilon}\frac{1}{f(z)}\sqrt{1+f'^2(z)}\,u + \frac{\varpi \sin\alpha}{\varepsilon} = 0,$$

où u désigne la vitesse, $x = f(z)$ étant l'équation de la section du canal, α l'inclinaison du canal, k, ε respectivement les coefficients de rugosité des parois et de viscosité du liquide, z la hauteur. M. Grialou étudie spécialement le cas d'une section rectangulaire, où l'équation différentielle devient

$$\frac{d^2u}{dz^2} - \frac{2k}{\varepsilon l}u + \frac{\varpi \sin\alpha}{\varepsilon} = 0,$$

dont l'intégrale est

$$u = \frac{\varpi l \sin\alpha}{2k} + M e^{\sqrt{\frac{2k}{\varepsilon l}}z} + N e^{-\sqrt{\frac{2k}{\varepsilon l}}z}.$$

M et N sont des constantes déterminées par les conditions aux limites.

L'Auteur passe ensuite au cas où la vitesse varie dans une tranche horizontale. Le problème conduit alors à l'équation différentielle

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{\varpi \sin\alpha}{\varepsilon} = 0,$$

dont l'intégrale est

$$u = (M e^{nz} + N e^{-nz})\cos ny - \frac{\varpi \sin\alpha}{2\varepsilon}y^2 + A,$$

les constantes M, N, n, A étant déterminées par les mêmes conditions aux limites que dans le problème précédent.

Le mouvement permanent d'un liquide dans un canal ne peut, dans tous les cas, être considéré comme uniforme avec assez d'approximation pour les besoins pratiques. Dans le cas de barrages,

par exemple, il est nécessaire de considérer le mouvement comme varié. On aborde généralement ce problème en supposant que le mouvement se fait par tranches successives, et c'est dans cette hypothèse que M. Grialou traitera cette question tout d'abord. Mais l'expérience montre que cela n'est pas conforme à la réalité; il y a des parties de liquides qui restent stagnantes. Ces considérations ont amené l'Auteur à traiter la question en tenant compte de ce dernier point. Il se borne d'ailleurs au cas d'un barrage établi dans un canal à section rectangulaire constante, à pente constante également. Il revient sur cette question à la fin du Volume, après une étude sur le mouvement des liquides doués de viscosité. Différentes questions pratiques sur les barrages sont ensuite traitées et quelques pages sont consacrées aux écoulements souterrains.

Avant d'aborder l'étude des récepteurs hydrauliques, deux Chapitres sont consacrés, l'un à la question si peu avancée de la résistance des fluides, l'autre aux mouvements ondulatoires des liquides pesants incompressibles. En peu de pages, le lecteur est mis au courant des principales recherches sur le premier de ces problèmes. Le second problème est traité avec quelques détails; mentionnons notamment la théorie des colonnes oscillantes.

La théorie des récepteurs hydrauliques, roues et turbines, fait l'objet des trois Chapitres suivants. M. Grialou commence par établir d'une manière générale quelles sont les conditions pour qu'un récepteur hydraulique ait le rendement maximum; puis il passe à l'étude détaillée des roues et turbines. Ces études sont faites avec beaucoup de soin et d'une manière complète. L'Auteur revient plus loin sur ces questions dans un Chapitre où il se propose d'appliquer les coordonnées cylindriques à l'étude des turbines. En fait, il ne considère plus alors que deux espèces de turbines, celles que l'on appelle turbine *centrifuge* et turbine *centripète*.

L'étude des pompes à eau et du bélier hydraulique est également faite avec soin.

Les Chapitres restants du Livre de M. Grialou cessent d'être purement pratiques; ce sont des études originales de l'Auteur sur différentes questions d'Hydrodynamique. La première de ces études est relative au mouvement des liquides parfaits dans le cas où la

pesanteur est la seule force extérieure à considérer. Supposant le mouvement irrotationnel, l'Auteur se propose de montrer que, dans certains cas, on peut prendre comme fonction potentielle une somme de termes tels que

$$(Ae^{n\sqrt{2}z} + Be^{-n\sqrt{2}z}) \cos(mt - nx) \cos(m't - ny),$$

l'axe des z étant vertical, le plan des xy horizontal ; A, B, n, m, m' des constantes et t le temps ; ou d'autres analogues. A cet effet, il considère trois exemples d'écoulement par des orifices.

Dans une deuxième étude, partant des équations de Lamé de la théorie de l'élasticité, l'Auteur en fait l'application aux liquides visqueux et en déduit successivement l'équation analogue à celle de Bernoulli pour les liquides parfaits, celles de Helmholtz pour les composantes du vecteur tourbillon. Les formules trouvées sont appliquées à l'étude, déjà faite sommairement plus haut, des remous produits dans un canal à section rectangulaire et à pente constante, par l'établissement d'un barrage ; on y introduit toutefois un terme correctif tenant compte du frottement du liquide contre les parois du canal. Le résultat atteint est la détermination de l'étendue des remous et de la perte de force vive produite par le frottement de la partie liquide en mouvement sur la partie stagnante.

Une étude analogue est faite du déversoir en mince paroi, établi dans un canal à fond horizontal, illimité en amont.

Enfin, un dernier Chapitre est consacré au mouvement d'une plaque mince dans un liquide et dans un gaz. Ces études sont faites en partant des équations des liquides visqueux établies plus haut.

Trois Notes terminent l'Ouvrage. De la première, relative aux pertes de charge dans les tuyaux, nous avons déjà eu l'occasion de dire un mot. La seconde a trait à la formule de Bernoulli et la troisième au mouvement des liquides parfaits. L'Auteur recherche, dans cette dernière, des expressions remarquables de la vitesse.

A l'heure où l'on se préoccupe tant en France de l'avenir de l'enseignement technique et de la préparation des ingénieurs, il est agréable de voir paraître un Ouvrage tel que celui de M. Grialou. Ce Livre donne en effet une idée du niveau élevé que cet enseignement a déjà atteint ; il faut savoir gré à son auteur de l'avoir

publié et d'avoir permis ainsi à d'autres que ses auditeurs de l'École centrale lyonnaise de profiter de ses leçons.

L'Ouvrage est édité par la librairie Gauthier-Villars et Cie avec le soin habituel à cette maison.

LUCIEN GODEAUX.

CONWAY (A.-W.). — RELATIVITY (Edinburg Mathematical Tracts, n° 3). 1 vol. in-8°, VIII-43 pages. London, G. Bell and Sons, 1915.

Ce petit livre est la reproduction de quatre Leçons données à l'Edinburgh mathematical Colloquium par M. Arthur-W. Conway, professeur de Physique mathématique à University College (Dublin), sur la question de la Relativité.

L'auditoire étant très composite, l'Auteur a pensé que le mieux était de suivre l'ordre historique de Lorentz à Minkowski. C'est un excellent exposé à la manière anglaise, réduit au strict nécessaire pour bien savoir comment se présente aujourd'hui la question au point de vue strictement scientifique, un peu schématique, sans aucun encombrement de vues à prétentions philosophiques. On en jugera par le court sommaire de chacun des quatre Chapitres qui composent le livre.

CHAPITRE I. — *Les relations fondamentales établies par Einstein.* — Rappel très rapide des expériences relatives à l'influence du mouvement de la terre sur les phénomènes lumineux : l'aberration de Bradley; l'absence, inattendue, de tout effet du second ordre établie expérimentalement par Michelson et Mosley.

La transformation mathémathique de Fitzgerald-Lorentz, qui met la théorie d'accord (approximativement) avec les faits observés.

Renversement du point de vue. Einstein admet, en 1905, comme postulat rigoureux ce qui paraissait peu probable avant les expériences de Michelson-Morley, et ce que la transformation de Lorentz-Fitzgerald ne fournissait qu'approximativement, à savoir l'impossibilité de mettre en évidence par quelque procédé que ce soit un mouvement de translation rectiligne et uniforme d'un système matériel, avec toutes ses conséquences. Cinématique

d'Einstein, composition des vitesses, composition des accélérations.

Chapitre II. — *Transformation des équations électromagnétiques.* — Transformation générale. Exemples particuliers : effets d'une ligne chargée uniformément, en mouvement. Mouvement d'une sphère. Propagation des ondes planes. Effets Döppler. Aberration astronomique.

Chapitre III. — *Application au Rayonnement et à la théorie des électrons.* — Mouvement quasi-stationnaire. Mouvement arbitraire.

Chapitre IV. — *Transformation de Minkowski.* — Les coordonnées x, y, z, t par rapport à un système animé de la vitesse uniforme v suivant l'axe des x sont remplacées par

$$\xi_1 = \beta x + \beta \frac{v}{c} t \sqrt{-1},$$
$$\xi_2 = y,$$
$$\xi_3 = z,$$
$$\xi_4 = \beta t - \beta \frac{v}{c} x \sqrt{-1}$$

$$\left(c = \text{vitesse de la lumière} ; \beta = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right).$$

Posant

$$\beta = \cos\theta, \qquad \sin\theta = -\beta \frac{v}{c} \sqrt{-1},$$

la relation, entre x, t et ξ_1, ξ_4, est une rotation de l'angle *imaginaire* θ.

Pour bien faire comprendre la signification de cette transformation, M. Conway traite d'abord le mouvement rectiligne d'un point, puis le mouvement plan, et enfin l'existence de deux espèces de vecteurs, quadruple et sextuple, et leur relation avec les quantités électromagnétiques.

Tout l'intérêt de la transformation de Minkowski est dans la symétrie formelle qu'elle donne aux équations ; physiquement elle n'ajoute rien aux notions introduites par Einstein, et n'en diffère en rien.

M. Brillouin.

ECHEGARAY (José). — CONFERENCIAS SOBRE FÍSICA MATEMÁTICA. *Curso de* 1909 *à* 1910 : *Cuestiones de Analisis, Aplicación á la Fisica matemática.* 1 vol. gr. in-8, 392 pages. Madrid, Establecimiento Tipográfico y Editorial; 1910.

Ce cinquième Volume (¹) des Conférences de Physique mathématique de M. Echegaray est essentiellement consacré à l'étude de quelques questions d'Analyse, assez élémentaires, qui jouent un rôle constant en Physique mathématique. En les traitant ainsi à part, l'Auteur veut éviter d'avoir, dans les Volumes suivants de son œuvre, à interrompre l'exposition par des développements mathématiques, sans que pour cela ses Ouvrages perdent leur caractère d'introduction *très élémentaire* à la Physique mathématique.

Comme pourtant M. Echegaray n'a nulle répugnance pour les digressions, il n'a pas hésité, après l'examen de chacune des questions d'Analyse qu'il étudie, à s'étendre assez longuement sur quelques problèmes de Physique théorique où elles interviennent plus ou moins essentiellement : c'était tout indiqué, dans un Cours de Physique mathématique. D'ailleurs, dans ces Conférences qui sont plutôt, comme le dit leur Auteur, des causeries illustrées par le calcul, un programme et un plan rigoureusement suivi sont inutiles, et ce sera un charme de plus pour ses lecteurs que l'aisance avec laquelle M. Echegaray sait utiliser la moindre occasion pour ouvrir à côté du sujet principal d'attachants aperçus sur des questions voisines.

La première des questions traitées dans ce Livre est la Théorie des vecteurs (Conférences 3 et 4). Sans insister sur l'étude même de cette théorie, suffisamment classique, l'Auteur présente à ce propos d'intéressants développements philosophiques. Il précise par quelle abstraction se forme le concept de vecteur et comment elle entraîne naturellement la définition des opérations sur les vecteurs. Il définit enfin, d'après Grassmann, le produit interne et le produit externe de deux vecteurs et en indique les principales propriétés.

Le reste du Livre est consacré à l'établissement des théorèmes de Green et de Stokes et à diverses applications de ces théorèmes.

(¹) Pour l'analyse des Volumes précédents, cf. *Bulletin*, 1915 et 1916.

Après avoir indiqué comment, là comme en d'autres branches de la Science, la théorie mathématique a devancé l'expérimentation, il démontre la formule de Green (nommée plus souvent formule d'Ostrogradsky) et en fait quelques applications : il examine ainsi les deux cas où le champ des vecteurs considéré dérive d'un potentiel ou admet un facteur intégrant et arrive à l'importante formule, connue aussi sous le nom de Green,

$$\int\int\int(\psi\Delta\varphi - \varphi\Delta\psi)\,d\tau = \int\int\left(\frac{d\varphi}{dn} - \varphi\frac{d\psi}{dn}\right)d\sigma.$$

Il en déduit ensuite les deux équations, fondamentales en Électrostatique, de Laplace et de Poisson, et se trouve ainsi naturellement engagé dans une digression (Conférences 8 à 11) sur le problème fondamental de l'Électrostatique : il indique comment se pose ce problème dans les théories classiques et dans les théories modernes où l'éther joue un rôle actif.

M. Echegaray s'occupe alors de la formule de Stokes et de ses applications (Conférences 11 à 17). Il suit dans cette étude une marche analogue à celle qu'il a adoptée pour l'étude du théorème de Green. Il démontre d'abord le théorème de Stokes en suivant la démonstration donnée par Poincaré dans *Électricité et Optique*; je crois qu'en cet endroit l'Auteur aurait pu, vu le caractère élémentaire de son Livre, préciser, plus nettement qu'il ne le fait, le rapport entre le sens positif choisi sur la normale à la surface et le sens de circulation sur la courbe contour. Il examine ensuite les deux cas où le champ admet un facteur intégrant ou dérive d'un potentiel et obtient les conditions nécessaires et suffisantes pour que ces circonstances se produisent.

Pour terminer, de même que le théorème de Green l'a amené à faire une étude rapide de l'Électrostatique, il est conduit ici à donner une idée d'ensemble du développement de l'Électrodynamique depuis les recherches d'Ampère (il démontre la formule classique qui détermine l'action entre deux éléments de courant) jusqu'aux théories modernes.

Je passe rapidement sur cette fin du Livre, comme précédemment sur la partie consacrée à l'Électrostatique. On n'y trouvera pas un exposé systématique de ces théories, mais seulement un premier aperçu d'ensemble, souvent très rapide, toujours intéres-

sant par les qualités de vulgarisateur dont fait preuve M. Echegaray. L'Auteur en prépare ainsi une étude plus profonde qu'il réserve pour des Volumes suivants de son œuvre : j'aurai donc l'occasion de revenir plus longuement sur ces questions.

JOSEPH PÉRÈS.

ABENBEDER. — COMPENDIO DE ALGEBRA (Junta para ampliación de estudios e investigaciones científicas; Centro de estudios históricos). Texto árabe, Traducción y Estudio par JOSÉ-A. SÁNCHEZ PÉREZ. 1 vol. in-8°, XLVIII + 117 + 76 (texte arabe) pages. Madrid, Moreto, 1, 1916.

C'est à l'heure actuelle une tendance assez générale en Espagne, que de revendiquer comme espagnole la brillante civilisation musulmane dont les centres furent Cordoue, Grenade, Séville. Ainsi M. Sánchez Pérez, dans la Préface de ce Livre, affirme que l'histoire des mathématiciens hispano-musulmans n'est qu'une partie de l'histoire des Sciences espagnoles. Cette prétention est évidemment bien discutable : il est impossible de séparer l'étude des écoles mathématiques hispano-arabes de celle de l'extraordinaire mouvement scientifique qui, du VIIIe au XVe siècle, se développe dans tout le monde musulman; d'ailleurs, l'influence des savants arabes semble bien moindre en Espagne, où du XVIe au XVIIIe siècle le mouvement scientifique est à peu près nul, que dans d'autres pays d'Europe. Quoi qu'il en soit, ces tendances ont une heureuse influence en dirigeant, vers l'étude des nombreux documents arabes que conservent les bibliothèques de leur pays, un groupe notable de chercheurs espagnols.

Dans l'Ouvrage dont j'ai à m'occuper ici, M. Sánchez Pérez publie un manuscrit arabe, daté de 1343, actuellement conservé à la bibliothèque de l'Escurial : *Traité d'Algèbre* dû au mathématicien, probablement hispano-arabe, *Abenbéder*. Le Livre débute par une assez longue préface comprenant essentiellement :

1° Une brève étude historique « quelques données sur le manuscrit, son auteur, son époque ».

2° Un bon *résumé analytique* du manuscrit.

M. Sánchez Pérez nous donne ensuite une traduction espagnole, aussi littérale que possible du manuscrit; pour en faciliter la compréhension il a eu soin d'indiquer constamment, en notes,

l'interprétation avec les symboles mathématiques modernes, des calculs de Abenbéder. Enfin il publie le texte même du manuscrit.

Il montre dans sa préface que le Traité d'Abenbéder a constitué, chez les Arabes de l'Occident, un ouvrage didactique estimé, probablement assez répandu et dont, en tout cas, il a existé d'autres copies (p. xx, note 1). Nous ne savons à peu près rien sur son auteur, nous n'avons même aucun renseignement précis sur l'époque à laquelle il a vécu (XIIe ou XIIIe siècle ?) L'étude historique, d'ailleurs sans prétention, de M. Sánchez Pérez ne nous apporte pas de données nouvelles et importantes pour la résolution de ces questions délicates ([1]).

Quant au Traité d'Algèbre lui-même il présente de grandes analogies avec d'autres traités déjà connus, par exemple celui de Mohammed ben Mousa et celui d'Al-Karkhi ([2]). Abenbéder expose l'Algèbre sans employer aucune formule et en opérant toujours sur des exemples numériques. Son Traité comprend deux parties essentielles, une partie théorique et un choix de problèmes.

Dans la partie théorique, Abenbéder expose d'abord, sur des exemples numériques, les formules de résolution des équations du premier et du second degré ; il en ignore, bien entendu, les solutions négatives. Il ne nous donne malheureusement aucune indication sur la méthode qu'il a employée pour obtenir ces formules. Puis, après une digression sur les règles de calcul des racines carrées, il donne les règles de multiplication et division des monomes, indique la règle de multiplication des polynomes et termine par l'exposé des deux opérations fondamentales : al'djabr w'al moqabalah (passage d'un terme d'un membre dans un autre jusqu'à obtenir partout des termes additifs, réduction des termes semblables).

Les nombreux problèmes qui terminent le Traité d'Abenbéder conduisent en général, après diverses transformations, aux équations étudiées précédemment. Quelques-uns d'entre eux supposent connue la théorie des progressions arithmétiques ; nous possédons

---

([1]) Remarquons que, comme le montre M. Sánchez Pérez, il est impossible de confondre notre algébriste avec le géomètre hispano-arabe Abenbéder.

([2]) L'analogie se poursuit parfois dans les détails infimes. Je note que les exemples numériques d'équations du deuxième degré traités par Abenbéder au début de son Livre sont les mêmes que ceux de Mohammed ben Mousa.

d'ailleurs d'autres traités d'Algèbre arabe qui exposent cette théorie. Il est plus intéressant de noter qu'Abenbéder nous apporte des renseignements précieux sur la façon dont les Arabes entendaient l'Algèbre indéterminée. Les problèmes indéterminés de l'Algèbre d'Abenbéder, comme ceux de l'Algèbre d'Al-Karkhi ([1]), montrent que les Arabes, là encore, ont été les disciples de Diophante. Abenbéder, comme Diophante, se contente en général d'obtenir une solution rationnelle ou entière d'un système d'équations linéaires indéterminées; il traite pourtant plus complètement une équation du premier degré à deux inconnues, en en déterminant (probablement par essais successifs) toutes les solutions positives et entières. Il traite enfin, par les mêmes méthodes que Diophante, des problèmes indéterminés du second degré ([2]).

Comme on s'en rend compte d'après cette analyse, la publication du Traité d'Abenbéder ne semble pas devoir modifier, dans ses grandes lignes, l'opinion que nous pouvions nous faire sur la Science des algébristes arabes. Il existe probablement, parmi les documents nombreux et assez mal connus, que nous offrent sur les mathématiques arabes les bibliothèques espagnoles, des manuscrits plus importants que celui que publie M. Sánchez Pérez : en tout cas, je trouve faibles les raisons qui ont guidé son choix (*cf.* p. XVII, dernier alinéa).

Ceci ne diminue en rien l'importance du travail de M. Sánchez Pérez : il est bien clair que dès qu'on ne se contente plus d'une connaissance superficielle de l'*étendue* des mathématiques des Arabes, dès qu'on veut pénétrer plus profondément leur pensée, toujours enveloppée en des écrits où la méthode synthétique est presque exclusivement employée, il faut faire une très fine analyse et comparaison des textes qu'ils nous ont laissés. Pour cette étude, le Livre de M. Sánchez Pérez nous apporte un document de grande valeur. Tous ceux qui auront à l'utiliser apprécieront les hautes qualités d'orientaliste, la solide érudition dont M. Sánchez Pérez a fait preuve dans son édition du manuscrit d'Abenbéder.

JOSEPH PÉRÈS.

([1]) Publiée par Woepcke, Paris 1853.

([2]) Solutions rationnelles de $x^2+5=y^2$, $x^2-6x=y^2$, etc. *Cf.* aussi Al-Karkhi.

MÉLANGES.

DÉMONSTRATION DIRECTE DU DERNIER THÉORÈME DE HENRI POINCARÉ;

Par M. Tobias DANTZIG.

Le théorème en question a été énoncé sans démonstration par H. Poincaré en 1912 (¹). Depuis G.-D. Birkhoff (²) en a donné une démonstration indirecte et assez compliquée. L'essai direct et élémentaire qui suit ne sera pas, j'espère, dénué d'intérêt.

Énoncé et notations. — Un peu généralisée (³) la proposition peut être énoncée comme il suit :

Étant donnée une transformation plane T *jouissant des propriétés suivantes :*

a. Elle est continue et biunivoque;

b. Elle conserve les aires;

c. Elle laisse deux contours simples fermés, C *et c, dont un est à l'intérieur de l'autre, invariants;*

d. Elle fait avancer les points de c dans un sens, tandis qu'elle déplace les points de C *dans le sens opposé;*

e. Elle transforme l'anneau (Cc) *en lui-même.*

Dans ces conditions il y a à l'intérieur de l'anneau au moins deux points invariants.

Dans ce qui suit j'indiquerai ces hypothèses par les lettres a, b, c, d, e.

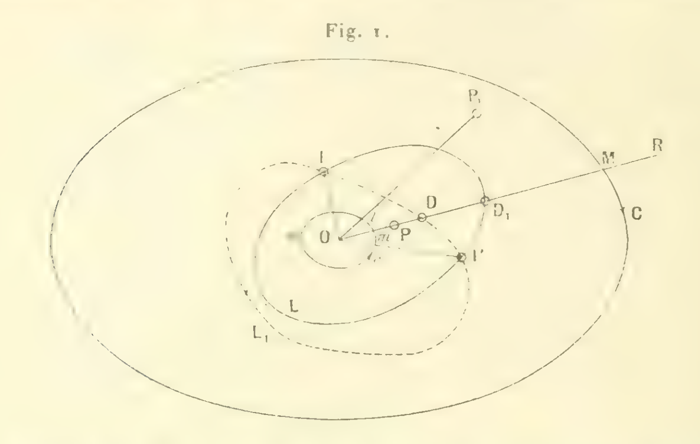
(¹) *Rendiconti del Circolo Mathematico di Palermo*, t. XXXVIII, 1912, p. 375-407.

(²) *Transactions of the American Mathematical Society*, t. XIV, 1913, p. 14-22. Traduit dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1914.

(³) Dans l'énoncé de Poincaré, les contours C et c sont des cercles concentriques.

Choisissons pour origine et axe de coordonnées polaires un point quelconque O à l'intérieur du contour c et une demi-droite arbitraire OX (*fig.* 1). Soit ρ, θ les coordonnées d'un point P,

Fig. 1.



ρ_1, θ_1 celles de son image P_1. Supposons de plus que les équations de la transformation aient été mises sous la forme

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \rho_1 = \varphi(\rho, \theta), \\ \theta_1 = \psi(\rho, \theta), \end{array} \right.$$

φ et ψ étant des fonctions continues et uniformes de ρ et θ (hypothèse a). Il en sera de même de la fonction

$$Z = \theta_1 - \theta = \psi(\rho, \theta) - \theta$$

qui représente en valeur et signe l'angle P_1OP. Cette quantité est parfaitement déterminée pour tout point du plan. Nous l'appelons la *déviation* du point P et nous posons

$$(2) \qquad Z = f(\rho, \theta).$$

Avec cette notation l'hypothèse d peut s'énoncer ainsi :

La déviation est positive pour tout point du contour intérieur c, négative pour tout point de C.

Le lieu de déviation nulle. — *Sur tout rayon* OR *il y a au moins un point pour lequel la déviation est nulle.* En effet, soient m et M les points où ce rayon rencontre les deux contours.

Quand le point P se déplace de m en M, Z est une fonction continue de ρ : positive en m et négative en M, cette fonction doit s'annuler au moins une fois dans l'intervalle mM.

Considérons le lieu de ces points de *déviation nulle*. Les points *invariants*, s'il y en a, font partie de ce lieu. Par conséquent, il est essentiel d'examiner de plus près ce lieu. Nous allons en établir des propriétés remarquables.

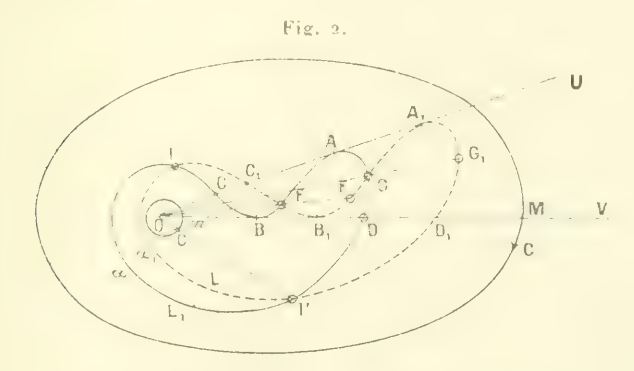
Lemme I. — *Tant qu'il s'agit du lieu des points de déviation nulle, tout se passe comme si T était une transformation centrale de centre O.*

Car, pour un point quelconque D de ce lieu, nous avons $\theta_1 = \theta$. Par conséquent, l'image D_1 de D est sur le rayon OD.

Il s'ensuit que si S est un point multiple du lieu, le point S_1, image de S, est sur OS. D'ailleurs T étant une transformation continue et univoque, ce point S_1 est un point multiple du lieu transformé et de même ordre de multiplicité. En particulier, si une quelconque des branches du lieu est une courbe simple fermée, il en sera de même de l'image de cette branche.

Une autre conséquence de ce lemme est la suivante : Si un rayon OU touche une quelconque des branches du lieu en un

Fig. 2.



point A, le contact sera conservé en A_1 entre le rayon et l'image de la branche (*fig.* 2).

En résumé, *l'image de l'une quelconque des branches du lieu de déviation nulle est une courbe de même nature, essentiellement.*

LEMME II. — *Parmi les branches du lieu de déviation nulle, il y en a au moins une* L *qui est fermée, ne sort pas de l'anneau* (Cc) *et entoure complètement le contour intérieur* c.

Pour le montrer, considérons (2) comme l'équation en coordonnées semi-polaires d'une surface S. D'après l'hypothèse a, cette surface est continue et une verticale quelconque ne la rencontre qu'en un seul point. Les cylindres verticaux ayant c et C pour bases coupent S suivant deux courbes gauches fermées γ et Γ respectivement. D'après l'hypothèse d, γ est au-dessus, tandis que Γ est entièrement au-dessous du plan Π de la transformation. La section de S par le plan Π comprendra, par conséquent, au moins une branche L qui sera nécessairement fermée, qui ne sortira pas de l'anneau et qui entourera c complètement. Or cette section n'est autre chose que le lieu des points de déviation nulle. L'existence de la branche est ainsi établie.

LEMME III. — *La branche* L *rencontre nécessairement son image* L_1 *et en deux points au moins.*

Supposons d'abord que L n'ait pas de points multiples. L'image L_1 sera aussi une courbe simple fermée, entourant complètement le contour c et ne sortant pas de l'anneau (hypothèse e). Si alors L et L_1 n'avaient pas des points en commun, L serait ou bien entièrement à l'intérieur de L_1 ou bien entièrement à l'extérieur de L_1. L'aire de l'anneau compris entre L et c ne saurait être égale à celle de *l'anneau transformé* ($L_1 c$), ce qui est contraire à l'hypothèse b (*fig.* 1).

Si L avait des points multiples en nombre quelconque S, S', S'', ..., $S^{(n)}$, en éliminant les boucles correspondantes, nous aurions obtenu un contour simple $SS'S''\ldots S^{(n)}$. Le contour transformé serait, par le même procédé, dépourvu des boucles (lemme I). Le raisonnement précédent s'appliquerait alors au *contour dépourvu des boucles*. Nous allons dans ce qui suit, en parlant de la courbe L, toujours supposer que ce procédé d'élimination des boucles a été appliqué.

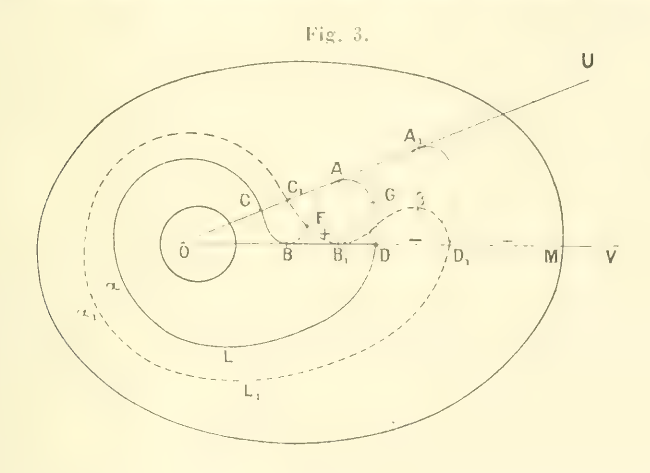
Quant à la seconde partie du lemme, elle suit immédiatement de ce fait que le nombre d'intersections réelles de deux courbes fermées est nécessairement pair.

Démonstration du théorème. — Ceci posé, la démonstration du théorème de Poincaré est immédiate dans le cas où la courbe L est *partout convexe* [1], c'est-à-dire quand un rayon quelconque ne la rencontre qu'en un seul point.

En effet, soit I un des points où la branche L rencontre son image L_1 (*fig.* 1). L'image I_1 de I, étant à l'intersection de OI avec L_1 (lemme I), ne peut que coïncider avec I. I *est donc un point invariant*. Et il en est de même de toute autre intersection.

Si maintenant la courbe L n'est pas partout convexe, elle aura (*fig.* 3) une *partie convexe* αD qui n'aura qu'un seul point d'in-

Fig. 3.



tersection avec un rayon quelconque et une *partie concave* telle que CBAD. D'après le lemme I, la courbe transformée L_1 se composera de deux parties semblables $C_1\alpha_1D_1$ et $C_1B_1A_1D_1$, images respectives des arcs considérés. Les parties concaves de L et L_1 sont comprises dans le même angle polaire UOV.

Si l'intersection de L et L_1 a lieu dans les parties concaves, les points de ces intersections ne seront pas nécessairement *invariants*, ainsi que le montre la figure 2. *Par contre, si le point de l'intersection est dans la partie convexe, il est nécessairement invariant.* Tout revient donc à montrer que les parties convexes se coupent toujours. Or ce fait est facile à établir.

---

(1) Bien entendu le mot *convexe* n'est pas ici employé dans le sens usuel. C'est plutôt de la convexité *polaire* qu'il s'agit ici.

En effet, supposons qu'il n'en soit pas ainsi (*fig.* 3). Considérons le contour fermé consistant en partie de l'arc $BC\alpha D$ de la courbe L et en partie du segment rectiligne BD du rayon extrême OV. L'image de ce segment est un arc $B_1\beta D_1$ qui n'ira pas croiser la courbe L_1 en d'autres points que B_1 et D_1. Je dis que cet arc est entièrement au-dessus du rayon OV. En effet, la déviation est négative en M et conséquemment dans l'intervalle DM [1]. Elle est donc positive entre B et D, et tout point du segment est *dévié* dans le sens positif. D'après cela, si les parties convexes de L et L_1 n'ont pas de points réels en commun, le contour considéré $BC\alpha DB$ sera entièrement à l'intérieur de son image $B_1C_1\alpha_1D_1\beta B_1$, contrairement à l'hypothèse de *conservation des aires*.

Le cas le plus général pouvant évidemment être ramené à celui-ci, le théorème est établi [2].

SUR LA FONCTION GÉNÉRATRICE DES FONCTIONS DE BESSEL A PLUSIEURS VARIABLES;

PAR M. B. JEKHOWSKY.

Dans une Note des *Comptes rendus* [3], M. Akimoff a donné l'expression des fonctions de Bessel à plusieurs variables pour un indice quelconque entier ou non entier sous forme de produits de

---

(1) S'il y avait d'autres points de déviation nulle entre D et M provenant d'autres branches, ils seraient nécessairement en nombre pair. Car toute branche du lieu de déviation nulle comprise dans l'anneau est fermée (intersection de la surface continue S avec le plan Π).

(2) Dans son essai de démonstration, Poincaré fait usage de la *déviation radiale*, $\rho_1 - \rho$, et non de la *déviation angulaire*, ce qui était naturel tant qu'on prenait pour les frontières des cercles concentriques. Le cas général des contours quelconques peut être regardé dans ce sens comme plus simple que le cas de Poincaré.

(3) *Comptes rendus*, t. 163, 1916, p. 26.

séries, en partant de la fonction

$$(1)\qquad e^{\frac{x_1}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)+\frac{x_2}{2}\left(u^2-\frac{1}{u^2}\right)+\ldots+\frac{x_n}{2}\left(u^n-\frac{1}{u^n}\right)}.$$

Je m'étais également occupé de cette question pour les fonctions à indice entier, sans avoir rien publié sur ce point spécial.

Je pars de ma formule générale [1],

$$
\begin{aligned}
(2)\quad \mathrm{J}_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \mathrm{J}_0(x_n)\,\mathrm{J}_k(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \\
&+\sum_{p=1}^{p=\infty} \mathrm{J}_{2p}(x_n)\big[\mathrm{J}_{k-2pn}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \\
&\qquad\qquad + \mathrm{J}_{k+2pn}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})\big] \\
&+\sum_{p=1}^{p=\infty} \mathrm{J}_{2p-1}(x_n)\big[\mathrm{J}_{k-(2p-1)n}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \\
&\qquad\qquad - \mathrm{J}_{k+(2p-1)n}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})\big].
\end{aligned}
$$

Les sommes qui figurent dans cette expression, en tenant compte des relations bien connues pour les fonctions de Bessel d'une variable, savoir

$$\mathrm{J}_p(x) = (-1)^p\,\mathrm{J}_{-p}(x),$$

se transforment en

$$
\begin{aligned}
&\sum_{p=1}^{p=\infty}\big[\mathrm{J}_{2p}(x_n)\,\mathrm{J}_{k-2pn}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \\
&\qquad + \mathrm{J}_{-2p}(x_n)\,\mathrm{J}_{k+2pn}(x_1, x_1, \ldots, x_{n-1})\big], \\
&\sum_{p=1}^{p=\infty}\big[\mathrm{J}_{2p-1}(x_n)\,\mathrm{J}_{k-(2p-1)n}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \\
&\qquad + \mathrm{J}_{-(2p-1)}(x_n)\,\mathrm{J}_{k+(2p-1)n}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})\big].
\end{aligned}
$$

On voit tout de suite que si q_n est un entier prenant les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, la formule (2) devient

$$(3)\qquad \mathrm{J}_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{q_n=-\infty}^{q_n=+\infty} \mathrm{J}_{k-nq_n}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})\,\mathrm{J}_{q_n}(x_n).$$

---

[1] *Comptes rendus*, t. 162, 1916, p. 518.

En appliquant cette formule à la fonction

$$J_{k-nq_n}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}),$$

on a

$$J_{k-nq_n}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$$
$$= \sum_{q_{n-1}=-\infty}^{q_{n-1}=+\infty} J_{k-(n-1)q_{n-1}-nq_n}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}) J_{q_{n-1}}(x_{n-1}),$$

et ainsi de suite. Après l'application de $n-1$ fois et après la substitution, on a la formule générale des fonctions de Bessel à plusieurs variables sous forme de produits de séries :

$$(4) \quad J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$= \sum_{q_2=-\infty}^{q_2=+\infty} \sum_{q_3=-\infty}^{q_3=+\infty} \cdots \sum_{q_n=-\infty}^{q_n=+\infty} J_{k-2q_2-\ldots-nq_n}(x_1) J_{q_2}(x_2) \ldots J_{q_n}(x_n)$$

qui conduit à la fonction génératrice u_n de M. Akimoff.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Œuvres de Henri Poincaré, publiées sous les Auspices du Ministère de l'Instruction publique par *G. Darboux*. Tome II publié avec la collaboration de *N. E. Nörlund* et de *Ernest Lebon*. 1 vol. in-4° (28-22), LXXIV-632 pages, avec un portrait de *Henri Poincaré*. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1916. Prix : 35fr.

Jessop (C.-M). — *Quartic Surfaces with singular points*. 1 vol. in-8°, X-198 pages. Cambridge, at the University Press, 1916, Price : 12 S.

Lamb (Horace). — *Hydrodynamics*. Fourth edition (First edition 1879). 1 vol. in-8° jésus, XVI-708 pages. Cambridge, at the University Press, 1916. Price : 24 S.

Rey Pastor (J.). — *Fundamentos de la Geometria proyectiva superior*. (Laboratorio y Seminario matemático. Publicaciones : Tome I). 1 vol. gr. in-8°, XXII-445 pages. Madrid, Junta para ampliación da estudios e investigaciones cientificas, Moreto 1, 1916. Precio : 12 pesetas.

GASTON DARBOUX.

Tous les amis des Sciences mathématiques ont appris avec une profonde tristesse la mort de M. Darboux. Les lecteurs du *Bulletin des Sciences mathématiques* savent que Darboux en a été le fondateur en 1870; il se proposait alors de reprendre la publication du Bulletin de de Férussac, interrompue au grand regret des géomètres. Depuis cette époque, il n'a cessé de diriger ce Recueil et de s'intéresser à ses progrès. Il y donna pendant de longues années des Articles variés, analyses d'Ouvrages et Travaux originaux. Quelques-unes de ses plus belles découvertes ont été publiées ici pour la première fois : tels les Mémoires sur les équations différentielles du premier ordre et du premier degré, et sur les solutions singulières des équations différentielles ordinaires. Le *Bulletin des Sciences mathématiques* restera connu sous le nom de *Bulletin de Darboux*.

Les travaux considérables de l'illustre savant demanderont plus tard une étude approfondie. Nous rappellerons dans le cahier du mois prochain quelques souvenirs de sa carrière, et nous essaierons de marquer dans ses traits généraux le caractère d'une œuvre qui a placé son auteur parmi les premiers mathématiciens de ce temps.

ÉMILE PICARD.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

PINCHERLE (Salvatore). — Lezioni di Calcolo infinitesimale, dettate nella R. Università di Bologna e redatte per uso degli studenti. 1 vol. gr. in-8, xv-774 pages. Bologna, Nicola Zanichelli, 1915.

Ces Leçons de Calcul infinitésimal s'adressent aux étudiants de première et deuxième année des Universités italiennes. Ce sont tant des étudiants en Mathématiques que des élèves ingénieurs; par conséquent, dit M. Pincherle dans sa Préface, le caractère de ces Leçons ne peut être ni essentiellement critique, ni essentiellement pratique. Je crois d'ailleurs que, si ce Livre s'adressait à de seuls étudiants en Mathématiques, il n'y aurait rien à modifier à son caractère : il est conçu comme doit l'être, en tout cas, un premier Cours d'Analyse. Il est encore permis de penser que même de futurs ingénieurs tireront profit de Leçons où, sans aucune exagération du point de vue critique, ils trouveront une très simple et très solide exposition d'ensemble des méthodes générales qui permettent d'introduire de la rigueur dans l'étude de l'Analyse.

Il est intéressant de noter ici que le programme de ce Cours, en somme commun aux deux enseignements technique et théorique, correspond à peu près en étendue à celui de notre certificat de Mathématiques générales, mais complété par l'étude de diverses questions qui sont presque toutes d'un intérêt très théorique; je cite au hasard : les éléments de la théorie des ensembles, les théorèmes d'existence des fonctions implicites et des solutions des équations différentielles, etc.

M. Pincherle débute par une introduction (p. 3, 48) sur diverses théories qu'il a, pour la plupart, développées en détail dans ses *Lezioni di Algebra elementare* (Bologne, Zanichelli, 1914) et *Lezioni di Algebra complementare* (*Ibid.*, 1906), auxquelles il renvoie constamment. La rédaction de cette introduction est très heureuse : les résultats sont rappelés de façon brève mais précise; pour les plus importants d'entre eux, l'Auteur donne la démonstration, ou du moins en indique la marche générale, d'une

façon très frappante et permettant au lecteur de la reconstituer sans difficultés.

L'Auteur revient ainsi sur la définition par une coupure des nombres irrationnels, sur la théorie des nombres complexes, sur les principes élémentaires de la théorie des ensembles linéaires ou à deux et trois dimensions (plus grande des limites, points limites, théorème de Weierstrass-Bolzano, ensembles parfaits et fermés, ensembles ordonnés, ensembles dénombrables ou non), sur le concept de limite et ses principales propriétés, enfin sur les théorèmes classiques de la théorie des séries à termes positifs et quelconques, les règles de convergence les plus simples et les propriétés les plus élémentaires des séries doubles.

La première Partie du Livre est ensuite consacrée au Calcul différentiel.

Les deux premiers Chapitres donnent une première idée du développement que prend, dans deux directions très différentes, la théorie des fonctions : le premier est consacré aux fonctions au sens général (sens de Dirichlet), le deuxième à des fonctions particulières définies par des expressions analytiques.

Dans le premier Chapitre, après avoir défini la fonction d'une variable, l'Auteur en étudie avec rigueur la continuité (continuité en un point et continuité uniforme : théorème de Heine-Borel et théorème de Cantor), les points de discontinuité et d'infini. Il étend enfin rapidement la théorie de la continuité aux fonctions de variable complexe.

Le second Chapitre est au contraire consacré aux fonctions élémentaires. L'Auteur revient sur les polynomes, les fonctions rationnelles et leur décomposition en éléments simples, indiquant en chemin la formule d'interpolation de Lagrange. Il passe ensuite à l'étude des séries de puissances. Après en avoir défini le rayon de convergence, en avoir donné les règles de calcul simples, il démontre pour ces séries le principe d'identité et expose comme application la méthode des coefficients indéterminés. Il démontre alors, en s'appuyant sur un des résultats les plus classiques de la théorie des séries doubles, les développements de Taylor et de Mac Laurin pour les séries de puissances, en déduit leur continuité et leur dérivabilité. Il étudie enfin la convergence uniforme et démontre

le théorème d'Abel. La fin de ce Chapitre est consacrée à l'étude de l'exponentielle et du logarithme.

Dans les deux Chapitres suivants, l'Auteur, après avoir étudié la comparaison des infiniment petits, définit les dérivées et différentielles, établit leurs règles de calcul et les applique au cas des fonctions élémentaires. Il passe ensuite au théorème de Rolle et à ses applications, puis définit les dérivées successives d'une fonction d'une variable. Il termine par l'étude des conditions pour que n fonctions soient linéairement dépendantes (déterminant wronskien).

Le Chapitre V débute par l'étude du développement limité de Taylor. La méthode employée par l'Auteur lui fournit immédiatement les deux formes de Cauchy et de Lagrange pour le reste. Il en déduit le développement en série correspondant en montrant par un exemple que la convergence de la série de Taylor ne suffit pas pour pouvoir affirmer la validité du développement infini correspondant. Il peut alors appliquer les théories précédentes au développement en série des fonctions élémentaires, pour en déduire ensuite la définition et les propriétés de ces fonctions pour les valeurs complexes de x. Deux autres applications occupent la fin de ce Chapitre, l'étude des indéterminations et celle des maximums et minimums des fonctions d'une variable.

Après l'étude de la continuité et de la dérivabilité des fonctions de plusieurs variables (Chap. VI), l'Auteur expose la théorie des fonctions implicites (Chap. VII). Il donne, du théorème d'existence, une démonstration classique qui, sans être plus simple, a l'inconvénient de ne pas fournir, comme la démonstration basée sur les approximations successives, un procédé analytique de formation de la solution. Après l'étude des propriétés du déterminant fonctionnel, il passe aux fonctions implicites définies par un système d'équations et termine en indiquant les règles de calcul des dérivées dans un changement de variables.

Enfin, le Chapitre VIII est consacré à l'étude rapide du développement de Taylor des fonctions de plusieurs variables et à ses applications. L'Auteur y donne entre autres quelques détails, en indiquant seulement les démonstrations, sur la théorie des séries de puissance à plusieurs variables (cercles de convergence associés, continuité, dérivabilité). Il y fait une étude très soigneuse des

maximums ou minimums libres ou liés des fonctions de plusieurs variables.

Dans la deuxième Partie du Livre, M. Pincherle s'occupe du Calcul intégral.

Le Chapitre IX contient un excellent exposé de la théorie de l'intégrale de Riemann, l'étude des propriétés de l'intégrale définie, la démonstration des deux théorèmes de la moyenne. L'Auteur donne ensuite (Chap. X), avec quelques applications bien choisies, les méthodes générales de recherche des fonctions primitives (changement de variables, intégration par parties et extensions, méthode d'intégration par séries) et s'occupe enfin de la généralisation de la notion d'intégrale définie quand la fonction, ou l'intervalle d'intégration, devient infini.

Les méthodes générales ainsi étudiées sont appliquées, dans le Chapitre suivant, à l'intégration des fonctions de forme analytique simple : fonctions rationnelles et fonctions irrationnelles simples qui s'y réduisent (différentielles binomes), fonctions transcendantes simples. L'Auteur donne, pour terminer, des renseignements suffisants sur les intégrales de différentielles algébriques (cas où elles deviennent rationnelles), les intégrales elliptiques et leur réduction aux intégrales de première, deuxième et troisième espèce de Legendre.

Lorsque, dans ce Chapitre, l'Auteur effectue l'intégration des fonctions rationnelles de x et d'un radical du deuxième degré, il pose, *a priori*, les changements de variable utilisés : il serait à peine plus long, et plus instructif, de montrer d'où viennent ces changements de variable, en les reliant aux considérations exposées plus loin à propos des intégrales de différentielles algébriques et en montrant comment ils réalisent des représentations unicursales simples de la conique correspondant à l'intégrale.

Les Chapitres XII et XIII sont enfin consacrés à l'intégration dans des champs à deux ou trois dimensions.

L'Auteur y étudie successivement les intégrales curvilignes, la continuité et la dérivation des intégrales définies dépendant d'un paramètre et la théorie des intégrales doubles. Sur ce dernier sujet, après la définition et les propriétés simples des intégrales doubles, il indique leur utilisation pour le calcul des volumes, leur calcul par intégrations successives. Il définit alors les intégrales doubles

lorsque la fonction à intégrer ou l'intervalle d'intégration devient infini et se trouve amené à donner, à côté de ce sujet, quelques détails sur les intégrales définies de forme

$$\int_a^{\infty} f(x, y)\,dx$$

(continuité et dérivabilité par rapport au paramètre, inversion de deux signes d'intégration). Après avoir démontré la formule de Green, l'Auteur la fait servir à la démonstration de la formule du changement de variable dans les intégrales doubles. Il passe enfin rapidement sur les intégrales triples (définition, calcul par intégrations successives, changement de variables), plus encore sur les intégrales multiples et consacre quelques pages à l'intégration des différentielles totales exactes.

Dans les cinq Chapitres de la troisième section du Livre sont développées des applications géométriques simples du Calcul infinitésimal.

En Géométrie plane (Chap. XIV), l'Auteur fait la théorie des tangentes et normales dans les divers systèmes de coordonnées; étudie les asymptotes comme limites de tangentes; donne des indications sur la recherche des points multiples et l'étude des tangentes en un point multiple. Il s'étend un peu plus sur la théorie du contact et la recherche du cercle osculateur en un point d'une courbe, puis sur la théorie des enveloppes, développées et développantes.

Il étudie ensuite (Chap. XV), en en faisant d'assez nombreuses applications, la quadrature (méthode des trapèzes, méthode de Simpson), la rectification et la courbure des courbes planes.

Il passe dans le Chapitre suivant à l'étude des courbes gauches : tangente, plan osculateur, rectification, courbure et torsion, formules de Frenet (l'exposition gagnerait, semble-t-il, en cet endroit, à l'introduction explicite des deux indicatrices sphériques), et consacre le Chapitre XVII à l'étude des surfaces : normale et plan tangent, coordonnées curvilignes, courbure, enveloppes. Il réserve le Chapitre XVIII au calcul des volumes et aires

des surfaces courbes, en précisant les difficultés particulières que présente la définition des aires.

Enfin une dernière Partie du Livre est consacrée à la théorie des équations différentielles et à quelques questions élémentaires de la théorie des équations aux dérivées partielles.

M. Pincherle étudie d'abord les théorèmes d'existence des intégrales et en donne la démonstration par la méthode des approximations successives et par celle des fonctions majorantes dans le seul cas des équations du premier ordre. C'est tout à fait suffisant pour donner une idée précise des méthodes employées dans les cas les plus généraux. Aussi l'Auteur se contente, pour une équation d'ordre quelconque, d'indiquer comment sa formation par élimination de constantes permet de prévoir le nombre d'arbitraires que renfermera la solution générale.

Les questions d'existence des intégrales étant ainsi précisées, l'Auteur s'occupe des types spéciaux d'équations du premier ordre (Chap. XX) : cas où les variables se séparent, équations homogènes, linéaires, de Bernoulli, de Riccati, de Lagrange et de Clairaut. Il a développé auparavant la théorie du facteur intégrant et donne aussi, ce qui contribue à mettre de l'unité dans ce Chapitre, la résolution d'un certain nombre des équations précédentes par la recherche d'un facteur intégrant. Le dernier paragraphe de ce Chapitre est consacré à des applications aux courbes planes et à l'étude des intégrales singulières : les applications géométriques de la théorie des équations différentielles mériteraient d'ailleurs d'être développées plus en détail que ne le fait l'Auteur, et un Chapitre tout entier aurait pu leur être consacré.

Pour les équations d'ordre supérieur (Chap. XXI), l'Auteur s'est surtout étendu sur celles qui sont linéaires et linéaires à coefficients constants. Je note ici l'absence de toute étude sur les systèmes d'équations linéaires à coefficients constants.

Après l'examen des équations aux différentielles totales exactes (facteurs intégrants), M. Pincherle s'occupe des équations aux dérivées partielles. Il indique la formation des équations linéaires du premier ordre par élimination d'une fonction arbitraire et en donne ensuite l'intégration sans négliger l'interprétation géométrique des calculs effectués. Il se contente, pour les équations non linéaires, d'analyser les différents procédés de formation de ces

équations, mettant en évidence, d'une façon simple et frappante, les relations qui existent entre une intégrale complète, l'intégrale générale et l'intégrale singulière.

Enfin, sur les équations d'ordre supérieur, il se borne à des indications très générales, développant seulement l'intégration de l'équation des cordes vibrantes, et donnant quelques détails sur la recherche des intégrales intermédiaires d'une équation du deuxième ordre, avec application à l'équation des surfaces développables.

Un bon index alphabétique termine le Volume.

Je signale enfin que chacun des Chapitres est suivi d'exercices simples, assez peu nombreux, mais très variés et choisis avec beaucoup de soin pour porter sur presque toutes les théories exposées dans ce Livre. L'Auteur aurait peut-être pu proposer plus souvent, comme exercice, des compléments à son Cours, en accompagnant au besoin les énoncés de quelques explications indiquant au lecteur la marche à suivre : il pouvait, par exemple, présenter ainsi la théorie des systèmes d'équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants.

Sans m'attarder à des détails sans importance, je veux dire en terminant comment le Livre de M. Pincherle, par sa solide tenue critique, par sa clarté qui résulte d'une remarquable concision du style et d'une grande élégance de l'exposition, vient se placer parmi les meilleurs des Ouvrages destinés à ceux qui commencent à approfondir les théories de l'Analyse.

JOSEPH PÉRÈS.

GAUSS (C.-F.). — SOLUTION GÉNÉRALE DE CE PROBLÈME : REPRÉSENTER LES PARTIES D'UNE SURFACE DONNÉE SUR UNE AUTRE SURFACE DONNÉE DE TELLE SORTE QUE LA REPRÉSENTATION SOIT SEMBLABLE A L'ORIGINAL DANS LES PARTIES INFINIMENT PETITES (REPRÉSENTATION CONFORME). Traduction de L. LAUGEL. 1 vol. gr. in-8, VI-38 pages. Paris, Hermann et Cie, 1915.

La théorie des Cartes géographiques fit l'objet, au XVIIIe siècle, de travaux assez nombreux : Euler, Lambert, Prony et surtout Lagrange y apportèrent d'importantes contributions. Mais ce fut Gauss en 1822, qui, le premier, résolut le problème de la représen-

tation conforme [1], faisant faire ainsi à cette doctrine un immense progrès. Son Mémoire répondait à une question posée par la Société royale des Sciences de Copenhague : il parut trois ans plus tard dans les *Astronomische Abhandlungen* de Schumacher. On ne saurait être trop reconnaissant à M. Laugel d'en avoir publié la traduction, car, à son intérêt historique, ce Mémoire joint le rare mérite de constituer une œuvre définitive.

Il est en effet difficile de réprimer un sentiment d'admiration lorsque, lisant cet Opuscule, on y trouve, à très peu près, la solution générale de la représentation conforme, telle qu'on l'expose encore aujourd'hui. C'est la considération des lignes de longueur nulle qui fournit le résultat. Soit $p \pm iq =$ const. le double système de ces lignes sur la première surface, et $P \pm iQ =$ const. le système analogue sur la seconde. On obtient la solution générale en égalant P à la partie réelle d'une fonction de $p + iq$ (nous ajouterions aujourd'hui : analytique) et $\pm iQ$ à sa partie imaginaire. Ce double signe a pour conséquence l'existence de deux série de solutions, correspondant, les unes à la similitude directe, et les autres à la similitude inverse : cette distinction, il est vrai, n'a de sens qu'après avoir défini sur chaque surface un côté déterminé : ce que l'on pourra faire en considérant deux fonctions φ et Ψ s'annulant respectivement sur les deux surfaces, positives du côté choisi et négatives de l'autre. Soient (x, y, z) un point de la première surface, répondant aux valeurs t et u des paramètres, X, Y, Z son homologue de la deuxième, répondant à T et U. La parité du nombre des quantités qui, parmi les suivantes :

$$\frac{1}{\varphi'_z}\frac{D(x, y)}{D(t, u)}, \qquad \frac{D(p, q)}{D(t, u)}, \qquad \frac{D(P, Q)}{D(T, U)}, \qquad \frac{1}{\Psi'_Z}\frac{D(X, Y)}{D(T, U)},$$

sont négatives, permet à Gauss de distinguer entre les deux séries de solutions celle qui correspond à la similitude directe.

Le Mémoire contient en outre quelques applications. Le globe terrestre étant assimilable à un ellipsoïde de révolution, cette surface joue un rôle important dans la pratique et il importe d'étudier sa représentation sur le plan et sur la sphère. C'est ce que Gauss entreprend avec quelque détail, indiquant dans chaque

---

[1] Cette dénomination ne fut introduite par Gauss que 20 ans plus tard.

cas le choix des fonctions qui fournissent les représentations les plus simples : il recherche en outre, lorsqu'on fait la Carte d'une faible portion de la terre, le moyen d'y diminuer autant que possible l'écart des valeurs extrêmes du rapport d'agrandissement : on y parvient en introduisant dans la fonction adoptée un paramètre auquel on donne ensuite la valeur la plus favorable. Au point de vue purement géométrique, le cas du cône et du plan fournit un exemple de surfaces applicables. Ajoutons que l'Auteur donne, pour la représentation plane d'une sphère, des formules d'une extrême simplicité. Au point x, y, z de la sphère qui a pour centre l'origine et pour rayon a, il suffit d'associer dans le plan le point X, Y donné par

$$X + iY = f\left(\frac{x + iy}{a + z}\right), \qquad X - iY = f_1\left(\frac{x - iy}{a + z}\right),$$

f et f_1 étant deux fonctions conjuguées.

Tels sont, à grands traits, les points essentiels de ce Mémoire. M. Laugel en a fait une traduction fidèle : parfois, et il faut lui en savoir gré, il a complété la pensée de l'Auteur par l'addition de mots que celui-ci sous-entendait. Ces mots ont été imprimés entre parenthèses et en italiques. Dans une courte préface, le traducteur fait remarquer, et c'est là une tendance fréquente outre-Rhin, que Gauss ne parle pas des travaux de ses devanciers. Quelques Notes font suite au Mémoire, contenant d'intéressantes indications historiques et bibliographiques. Ajoutons que la traduction de M. Laugel a été faite il y a dix ans et qu'elle est mise en vente intégralement au profit des victimes de la guerre.

G. Bouligand.

ENRIQUES (Federigo). — Questioni riguardanti le Matematiche elementari, raccolte e coordinate da Enriques. — Volume II : *Problemi classici della Geometria. Numeri primi e Analisi indeterminata. Massimi e minimi.* Articoli di E. Baroni, B. Calò, G. Castelnuovo, O. Chisini, A. Conti, E. Daniele, F. Enriques, A. Giacomini, A. Padoa, U. Scarpis. 1 vol. in-8°, vi-811 pages. Bologna, Nicola Zanichelli, 1914.

En analysant dans ce *Bulletin*, en 1916, le premier Volume de cette belle publication, nous avons montré le but et le caractère

de l'œuvre prise dans son ensemble. Il nous suffira donc d'indiquer ici le contenu du second Volume. Les articles du premier Volume se rapportaient spécialement à la critique des principes de l'Arithmétique et de la Géométrie. Les théories développées dans le second Volume peuvent être divisées en trois groupes :

1° Problèmes classiques de la Géométrie, possibilité d'en obtenir la solution à l'aide d'instruments donnés et théorie des équations algébriques.

2° Théorie des nombres.

3° Maximums et minimums en Algèbre élémentaire, en Géométrie élémentaire et dans l'Analyse moderne.

Ces deux derniers groupes sont formés d'articles nouveaux introduits dans cette deuxième édition ; ils constituent la plus grande partie du Volume, formant un ensemble de plus de 400 pages. Les articles du premier groupe, au contraire, figuraient déjà, à l'exception d'un seul, dans la première édition ; ce sont les neuf articles suivants :

E. Baroni. — *Sur les méthodes élémentaires pour la résolution des problèmes de Géométrie.*

E. Daniele. — *Sur la résolution des problèmes de Géométrie par le compas.*

A. Giacomini. — *Sur la résolution des problèmes de Géométrie par la règle et les instruments linéaires : contribution de la Géométrie projective.*

G. Castelnuovo. — *Sur la résolubilité des problèmes de Géométrie par les instruments élémentaires : contribution de la Géométrie analytique.*

F. Enriques. — *Sur les équations résolubles par radicaux carrés et sur les polygones réguliers qu'on peut construire élémentairement.*

E. Daniele. — *Sur les constructions du polygone régulier de 17 côtés.*

A. Conti. — *Problèmes du troisième degré ; duplication du cube ; trisection de l'angle.*

B. Calò. — *Sur les problèmes transcendants et en particulier sur la quadrature du cercle.*

F. Enriques — *Quelques observations générales sur les problèmes de Géométrie.*

Nous ne reviendrons pas sur le contenu des huit premiers articles qui a été indiqué dans l'analyse de la première édition [1],

---

[1] *Bulletin*, [illegible] série, t. XXIV, p. [illegible].

mais nous devons dire quelques mots de l'article de M. Enriques qui termine le groupe précédent et qui est nouveau. Dans son exposé, M. Enriques montre que ce sont les parties élevées de la Science qui ont permis de classer les problèmes de la Géométrie élémentaire, d'éliminer les tentatives vaines et les essais inutiles; mais M. Enriques ne rejette pas pour cela les méthodes de la Géométrie élémentaire et, s'il trouve bon qu'on fasse appel à la Science moderne, c'est surtout parce que celle-ci permet de mieux voir la portée exacte des méthodes particulières de la Géométrie élémentaire et fait mieux resplendir dans tous ses détails l'admirable édifice que nous devons aux Grecs.

La théorie des nombres comprend un seul article dû à M. U. Scarpis et intitulé *Sur les nombres premiers et sur les problèmes de l'Analyse indéterminée* (de la page 359 à la page 449). L'Auteur a choisi dans la théorie des nombres quelques parties qu'il était facile de développer sans sortir trop des éléments de l'Arithmétique et qui suffisent à donner une idée de la vaste étendue des problèmes qui se posent dans cette partie de la Science. L'article est divisé en trois Chapitres : 1° Nombres premiers; 2° Analyse indéterminée; 3° Nombres congrus et congruences.

On peut se poser au sujet de l'ensemble des nombres premiers deux problèmes différents : (a) en supposant connus certains des nombres premiers contenus dans un intervalle, déterminer combien il y a de nombres premiers dans cet intervalle; (b) construire une fonction du nombre x qui pour chaque valeur réelle et positive de x fournisse le nombre des entiers non supérieurs à x. On sait que le second problème a donné lieu à des travaux dont l'importance est capitale aussi bien au point de vue de l'Analyse et de la Théorie des fonctions qu'au point de vue de la théorie des nombres. M. Scarpis ne pouvait pas songer à exposer de pareils travaux en quelques pages; aussi se contente-t-il de donner, relativement au problème (b), un aperçu des Mémoires de Tchebycheff et de Riemann et il s'occupe plus particulièrement du problème (a). Ce dernier, bien que moins important, peut en effet être traité par des moyens plus élémentaires. C'est dans cette voie que l'Auteur établit la relation de Legendre qui donne le nombre des nombres premiers non supérieurs à n, lorsqu'on connaît les

nombres premiers inférieurs à $\sqrt{n}$, puis la relation de Meissel qui résout un autre cas particulier du problème (a).

Le second Chapitre renferme diverses méthodes de résolution en nombres entiers de l'équation du premier degré à deux inconnues et à coefficients entiers ; à cette question, l'Auteur rattache les propriétés des restes des termes d'une progression arithmétique ainsi que le théorème de Fermat. Passant ensuite aux équations indéterminées de degré supérieur au premier, M. Scarpis donne d'abord la solution générale en nombres entiers de l'équation

$$x^2 + y^2 = z^2$$

et, en généralisant cette équation, il est conduit tout naturellement à parler de la célèbre proposition de Fermat relative à l'impossibilité de résoudre en nombres entiers l'équation

$$x^n + y^n = z^n$$

pour $n > 2$. M. Scarpis indique les valeurs de n pour lesquelles cette impossibilité a pu être établie et il traite d'une façon élémentaire le cas de $n = 4$.

Dans le troisième Chapitre, M. Scarpis développe les éléments de la théorie des congruences algébriques, en particulier des congruences binomes. A ce sujet se rattachent la théorie des racines primitives des nombres premiers et la théorie des indices, lesquelles peuvent être utilisées pour la résolution des congruences binomes.

Le troisième groupe d'articles, relatif aux maximums et aux minimums, comprend les trois articles suivants :

A. Padoa. — *Sur les maximums et les minimums des fonctions algébriques élémentaires* (p. 453-540).

O. Chisini. — *Sur la théorie élémentaire des isopérimètres* (p. 541-640).

F. Enriques. — *Maximums et minimums dans l'Analyse moderne* (p. 641-795).

La théorie est envisagée par les trois auteurs à des points de vue différents. M. Padoa et M. Chisini partent directement des questions élémentaires qui se posent en Géométrie et les traitent par des procédés élémentaires, en ayant soin de signaler et d'éclaircir les difficultés critiques qui se présentent à propos de ces procédés.

La principale difficulté vient de ce que, dans certains raisonnements classiques qu'on faisait autrefois, l'on admettait le plus souvent l'existence d'un maximum ou d'un minimum, ce qui ôtait toute valeur à des méthodes qui, une fois cette existence admise, sont cependant très remarquables par leur simplicité et leur élégance. C'est ainsi que, depuis Pappus jusqu'à Steiner, on a donné des démonstrations nombreuses du théorème de Zénodore d'après lequel, parmi les polygones de n côtés ayant un périmètre donné, le polygone d'aire maxima est le polygone régulier. Toutes ces démonstrations présentent une lacune fondamentale mise en relief par l'analyse moderne : les surfaces des polygones de n côtés de périmètre donné constituent un ensemble de nombres qui admet évidemment une borne supérieure, mais il n'est nullement évident *a priori*, comme on l'admet dans les démonstrations dont nous parlons, que cette borne supérieure soit atteinte par un polygone de la famille considérée, c'est-à-dire qu'il existe un polygone de n côtés d'aire maxima parmi les polygones de n côtés de périmètre donné. M. Chisini donne d'une part un exposé élémentaire de la théorie des isopérimètres telle qu'elle a été développée par Pappus, Cramer, Steiner, en complétant cet exposé par la démonstration de l'existence du maximum; d'autre part, il reprend la théorie tout entière d'une façon élémentaire en la rendant indépendante du postulat relatif à l'existence d'un maximum, mais les démonstrations sont alors nécessairement plus compliquées; c'est pourquoi il est avantageux de démontrer *a priori* l'existence d'un maximum, avant de rechercher quelle est la figure qui le réalise.

La même difficulté se rencontre en Algèbre élémentaire lorsqu'on cherche le maximum d'un produit de facteur positifs dont la somme est constante. C'est précisément le théorème relatif à ce maximum qui est le point de départ de M. Padoa dans son étude sur les fonctions algébriques élémentaires. L'Auteur montre que certaines démonstrations classiques de ce théorème sont basées sur l'existence d'un maximum supposée *a priori*, et là encore, pour rendre la démonstration correcte, il suffit de démontrer d'abord l'existence du maximum que l'on détermine ensuite. On peut aussi donner des démonstrations directes, indépendantes du postulat d'existence. M. Padoa donne plusieurs démonstrations de ce genre, sans sortir du domaine de l'Algèbre élémentaire.

D'une façon générale, l'article de M. Padoa a surtout pour but de montrer l'intérêt pédagogique qu'il y a à étudier, lorsque c'est possible, les questions de maximum et de minimum par les méthodes de l'Algèbre élémentaire, sans faire appel à l'analyse ou à la théorie des fonctions et en particulier sans se servir de la théorie des dérivées. M. Padoa prend soin d'avertir le lecteur qu'il ne se propose pas d'exalter ou de déprécier l'une des méthodes au détriment de l'autre ; il est simplement d'avis, dit-il, qu'aucune partie de notre patrimoine intellectuel ne doit être aliénée, que toutes les méthodes rigoureuses présentent un certain intérêt et que, si des raisons d'économie de la pensée nous conduisent finalement à donner la préférence à l'une d'entre elles, toutes méritent notre attention. C'est pourquoi M. Padoa a développé dans son article, aussi loin qu'il était possible de le faire, et d'une façon parfaitement rigoureuse, les méthodes élémentaires de recherche des maximums et des minimums ; son étude est basée d'une part sur le théorème fondamental relatif à un produit de facteurs positifs dont la somme est constante, d'autre part sur l'étude de l'ensemble des valeurs possibles d'une des deux variables x, y liées par une relation, autrement dit sur ce que nous appelions en France la *méthode indirecte* dans les anciens programmes de l'enseignement secondaire. Faut-il regretter la disparition de ces méthodes et l'introduction de la théorie des dérivées dans l'enseignement secondaire ? La vigueur que M. Padoa déploie dans la défense de ces anciennes méthodes montre qu'en Italie la question est encore vivement discutée ; mais, malgré tout, il n'est pas douteux qu'elle finira, si ce n'est déjà fait, par être résolue comme en France. Ainsi qu'une expérience de quinze ans bientôt l'a montré, c'était bien à tort que certains s'étaient émus chez nous des difficultés que pouvait présenter chez de jeunes esprits la notion de dérivée, surtout lorsqu'on l'introduit sous sa forme géométrique par la notion intuitive de tangente (¹). Cela ne doit pas empêcher

---

(¹) Les seules difficultés, lorsqu'il y en a encore, proviennent probablement de ce que, au lieu de s'élever de la notion intuitive de la tangente à la notion de dérivée, certains préfèrent partir d'une définition abstraite de la dérivée. Ces difficultés disparaissent si l'on définit la dérivée comme la pente de la tangente à la courbe représentative de la fonction, conformément à l'esprit sinon à la lettre des programmes.

d'ailleurs un professeur d'indiquer à l'occasion, à propos de problèmes particuliers, quelques-uns de ces raisonnements, étrangers à la théorie des dérivées, qui permettent de déterminer le maximum ou le minimum absolu de certaines fonctions et auxquels est consacré l'article de M. Padoa; et c'est pourquoi dans tous les cas son travail devait avoir sa place dans le recueil que nous analysons.

Dans le bel article de M. Enriques qui termine le Volume, la question des maximums et des minimums est envisagée dans toute son ampleur en utilisant toutes les ressources de la théorie des fonctions et de l'Analyse moderne. L'article est divisé en deux parties consacrées : la première, aux fonctions d'une ou plusieurs variables et à la détermination des maximums et des minimums par les méthodes de l'Analyse infinitésimale; la deuxième, aux fonctions de lignes et au calcul des variations. Pour chacune des deux parties, M. Enriques s'occupe d'abord des théorèmes généraux d'existence et il passe ensuite aux méthodes de calcul qui permettent de déterminer les maximums et les minimums. C'est ainsi que, pour les fonctions d'une ou plusieurs variables, nous trouvons d'abord les démonstrations de quelques propositions générales sur les fonctions continues et les bornes d'une fonction continue dans un domaine fermé et borné; le fait que ces bornes sont atteintes pour un point au moins du domaine démontre l'existence d'un maximum et d'un minimum absolus. On peut appliquer ce résultat général à certaines des questions envisagées par M. Chisini et par M. Padoa dans les articles analysés plus haut et l'on voit que l'existence du maximum ou du minimum est ainsi établie *a priori*, ce qui rend complètement légitimes les méthodes anciennes très simples par lesquelles on déterminait ce maximum ou ce minimum.

En ce qui concerne la théorie des dérivées, signalons l'étude approfondie que fait M. Enriques du cas parabolique, pour les maximums ou minimums des fonctions de deux variables; la démonstration de la *loi de réciprocité* pour les maximums et les minimums liés et celle du *principe de symétrie*, propositions qu'on applique souvent sans une justification suffisante dans les méthodes élémentaires.

Dans l'étude des fonctions de lignes et du calcul des variations, M. Enriques procède comme il l'avait fait pour les fonctions d'une

ou plusieurs variables. Il expose d'abord les résultats généraux sur les courbes limites d'un ensemble de lignes, la notion d'*égale continuité* pour les courbes d'une même famille, les résultats dus dans cette voie à Ascoli, Arzelà, Hilbert ; la question en quelque sorte inverse consiste à approcher d'une courbe donnée par des courbes de nature donnée et M. Enriques est ainsi conduit à développer le théorème de Weierstrass sur l'approximation des fonctions continues par des polynomes. Toutes ces notions générales conduisent à la démonstration de théorèmes relatifs à l'existence de maximums ou de minimums pour les fonctions de ligne, autrement dit à l'existence des solutions dans les problèmes du calcul des variations. M. Enriques examine surtout deux de ces problèmes : celui des lignes de longueur minima sur une surface et celui des courbes d'aire maxima dans une famille d'isopérimètres. Ce sont de pareils théorèmes d'existence qui ont servi depuis quelques années à donner une nouvelle base au calcul des variations en permettant de justifier en toute rigueur les méthodes de calcul classiques.

En dehors de ces théorèmes d'existence, M. Enriques reprend les principales méthodes qui ont été données dans le calcul des variations, équations différentielles d'Euler et de Lagrange, conditions suffisantes de Legendre, de Jacobi, de Weierstrass. Les deux problèmes auxquels se limite M. Enriques et que nous avons indiqués plus haut ont joué un rôle fondamental dans l'histoire du calcul des variations depuis l'origine jusqu'à nos jours et, en exposant ainsi la théorie sur ces exemples concrets, on ne voit que mieux la portée des critiques qui ont été faites aux diverses méthodes et des perfectionnements successifs qui ont été apportés. Pour établir la propriété de minimum des géodésiques, M. Enriques donne diverses méthodes, entre autres la méthodes bien connue de M. Darboux dont l'importance est bien mise en évidence, mais il s'attache surtout aux méthodes récentes basées sur les théorèmes généraux d'existence. Après avoir démontré *a priori* l'existence d'un extremum, il devient en effet assez facile dans la plupart des cas de démontrer que cet extremum coïncide avec la courbe extrêmale donnée par le calcul des variations. M. Enriques donne à ce sujet un procédé de démonstration nouveau qui s'applique à d'autres problèmes que ceux qu'il traite et qui mérite quelque attention.

C'est pourquoi, pour terminer, nous l'indiquerons ici avec quelque détail, en prenant pour type l'une des questions traitées par M. Enriques : celle des géodésiques sur une surface.

Pour éviter toute confusion, réservons le nom de *géodésiques* aux courbes tracées sur la surface et telles qu'en chaque point le plan osculateur soit normal à la surface et appelons *lignes de longueur minima* les lignes les plus courtes joignant deux points quelconques de la surface. Les extrémales, c'est-à-dire les courbes intégrales fournies par les équations différentielles classiques, sont les géodésiques. On obtient l'équation différentielle de ces courbes en annulant la variation première δL de la longueur L de l'arc de courbe joignant deux points. D'après un théorème de M. Darboux, si le point B de la surface est situé dans un domaine suffisamment restreint entourant le point A, il passe par A et B une seule géodésique. Soit $v = f(u)$ l'équation de cette géodésique. D'autre part, on peut démontrer *a priori* (théorème d'existence d'Hilbert) que par A et B il passe une ligne de longueur minima $v = \varphi(u)$. Il reste à démontrer que cette ligne de longueur minima coïncide avec la géodésique passant par A et B. Ce serait évident si l'on était sûr que $\varphi(u)$ soit une fonction dérivable (condition requise pour établir l'équation des géodésiques). Mais l'on ne peut affirmer cela *a priori*. Pour résoudre cette difficulté, M. Enriques part du théorème de Weierstrass d'après lequel la fonction continue $\varphi(u) - f(u)$ peut être approchée indéfiniment par un polynome de degré n quelconque

$$f_n(u) = h_0 + h_1 u + \ldots + h_n u^n.$$

La fonction $\varphi(u)$ peut donc être approchée par une fonction du type $f(u) + f_n(u)$ et l'on démontre que l'approximation peut être faite de telle sorte que la longueur de la courbe approchée ait pour limite, pour n infini, la longueur de la courbe de longueur minimum. Par suite, pour démontrer que la géodésique est la courbe de longueur minimum, il suffira de prouver que sa longueur est inférieure à celle de n'importe laquelle des courbes

$$(1) \qquad v = f(u) + f_n(u).$$

Or, si on laisse $h_0, h_1, \ldots, h_n$ indéterminés, la longueur L de l'arc de courbe (1) pour une valeur donnée de n est une fonction

continue des n variables $h_0, h_1, \ldots, h_n$ qui admettra certainement une borne inférieure atteinte pour certaines valeurs de ces variables, autrement dit un minimum. Ce minimum vérifie les équations nécessaires

$$\frac{\partial L}{\partial h_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

qui, avec les conditions aux limites, ne peuvent être vérifiées qu'en annulant la variation δL, c'est-à-dire en prenant

$$h_0 = h_1 = \ldots = h_n = 0.$$

Si maintenant n varie, on voit que la courbe $v = f(u)$ est aussi la courbe de longueur minima dans la famille (1), quel que soit n, et par suite elle est aussi de longueur minima relativement à toutes les lignes joignant A et B et tracées dans le domaine considéré par deux points quelconques duquel passe une géodésique et une seule.

L'article de M. Enriques nous donne ainsi en quelques pages un aperçu des méthodes les plus récentes du calcul des variations. En montrant comment les recherches théoriques sur les fonctions de lignes et sur les ensembles de fonctions ont renouvelé cette partie de la Science, M. Enriques atteint l'un des buts qu'il s'était proposé par la publication de son Livre : il montre, en effet, que c'est en se plaçant dans la solution des problèmes à un point de vue élevé et plus général que dans l'énoncé, qu'on peut lever de la façon la meilleure et la plus féconde les difficultés critiques que présentent des problèmes, comme celui des géodésiques ou comme celui des isopérimètres, qui se rattachent à la fois aux Mathématiques élémentaires et aux théories les plus élevées de la Science.

S. Lattès.

MORGAN (Augustus de). — A Budget of Paradoxes. Reprinted, with the Author's Additions, from the Athenaeum. 2nd edition, edited by **David Eugene Smith**. 2 vol. in-8, VIII+402 et II-387 pages. Chicago, London; The Open Court, 1915.

Suivant de Morgan un paradoxe est quelque chose qui est loin de l'opinion générale ou dans son contenu, ou à cause de la méthode

employée pour y arriver, ou enfin en raison des conclusions auxquelles elle mène. Par suite, il y a des paradoxes qui sont de véritables découvertes, étant des anticipations dues à des hommes supérieurs; tel sont par exemple l'ouvrage *De Magnete*, de Gilbert, et l'invention du mouvement de la Terre autour du Soleil, que quelqu'un, au XVIe siècle, appelait le « paradoxe de Copernic ». Mais il y a malheureusement d'autres paradoxes qui sont de vraies erreurs, dont la Science doit se délivrer au plus tôt, comme d'un dangereux germe pathogène ; or c'est précisément des paradoxes ayant l'apparence de souillures sur le beau corps de la Science que s'occupe de préférence le savant anglais. On pouvait croire qu'il en eût fait un choix pour les présenter aux lecteurs ; il n'en est rien ; il a examiné tous (tous sans exception) les Ouvrages paradoxaux qui se trouvaient dans sa bibliothèque de bibliophile insatiable, ou bien qui ont été mis à sa disposition par des amis, ou enfin qui tombaient de quelque autre manière entre ses mains.

Non content d'étudier les *Ouvrages*, de Morgan s'est encore intéressé beaucoup aux *Auteurs*, et, après avoir connu personnellement environ cent cinquante spécimens de cette étrange espèce, il a cru avoir les éléments nécessaires pour en fixer les traits distinctifs. Le caractère le plus saisissant des créateurs de paradoxes, c'est l'*ignorance*, même une ignorance opiniâtre, qui résiste à tout effort pour la vaincre. Un exemple vraiment typique est offert par un monsieur qui se présenta un jour à de Morgan pour lui exposer sa soi-disant découverte de la composition du Soleil par les anciens éléments Air, Eau, Terre et Feu ; or, comme de Morgan lui observa que ces prétendus éléments avaient été déjà décomposés à leur tour, il s'écria : « Que voulez-vous dire, Monsieur ? Qui a jamais entendu parler de telles choses ? » Et il jugea indigne de lui de poursuivre son exposition.

Or les recherches comparées sur la psychologie de ces esprits monstrueux a amené naturellement de Morgan à faire des remarques très intéressantes sur les conditions nécessaires pour la découverte scientifique ; pour en présenter un échantillon aux lecteurs du *Bulletin*, je choisis comme exemple la suivante, qui est d'une justesse saisissante et d'une vérité vraiment axiomatique :

« Tous les hommes qu'on appelle aujourd'hui des *inventeurs*,

dans toute matière régie par la pensée, ont été des hommes connaissant bien les idées de leurs prédécesseurs et très instruits de ce qui a été fait avant eux. Il n'y a aucune exception. Je ne dis pas que chacun ait connu directement tous ses ancêtres intellectuels ; plusieurs, si je peux m'exprimer ainsi, ont connu leurs grands-pères seulement à travers le récit de leurs pères. Toutefois, il est à remarquer combien parmi les plus grands noms, dans toutes les provinces de la Science, ont été de véritables antiquaires dans leur spécialité. Je peux citer, parmi ceux qui exercèrent la plus vigoureuse influence sur la théorie et la pratique de la Science, Aristote, Platon, Ptolémée, Euclide, Archimède, Roger Bacon, Copernic, François Bacon, Ramus, Tycho-Brahé, Galilée, Neper, Descartes, Leibniz, Newton, Locke. Je ne cite que des noms bien connus en dehors de leur champ de travail ; et tous étaient des savants autant que des hommes de génie. »

La Physiologie et la Pathologie formant la base de toute Thérapie, on pouvait espérer que l'Auteur nous apprendrait quelque moyen pour corriger la tendance paradoxale de certains esprits ; comme, au contraire, il ne nous apprend rien à ce sujet, nous croyons qu'il considère tout essai dans ce sens fatalement stérile ; or nous pensons, d'après nos expériences personnelles, qu'il a parfaitement raison ; en conséquence, nous croyons que le mieux est de ne pas prendre trop au sérieux les soi-disant inventeurs et de s'inspirer plutôt de l'exemple donné par deux éminents géomètres : Jean Bernoulli et Samuel König. Ceux-ci ayant été appelés à juger une prétendue quadrature du cercle, déduite par un de leurs compatriotes à l'aide d'un tas d'équations très compliquées, ils se tirèrent d'affaire en lui livrant la déclaration suivante :

« Suivant les suppositions posées dans ce Mémoire, il est évident que t doit être $= 34$, $y = 1$ et $z = 1$, que cela n'a besoin ni de preuve ni d'autorité pour être reconnu par tout le monde.

« A Basle, le 7e mai 1749. « JEAN BERNOULLI. »

« Je souscris au jugement de M. Bernoulli, en conséquence de ces suppositions.

« A La Haye, le 21 juin 1749. « S. KOENIG. »

L'auteur fut si orgueilleux du certificat qu'il s'empressa de le publier, en ajoutant la remarque suivante : « Il conste clairement par ma présente Analyse et Démonstration, qu'ils y ont déjà reconnu et approuvé parfaitement que la quadrature du cercle est mathématiquement démontrée. » De manière que tout le monde finit par se sentir satisfait !

Les questions auxquelles se rapportent les Ouvrages analysés par de Morgan sont extrêmement différentes, de manière que le contenu des Volumes dont nous nous occupons est très varié. On y trouve, naturellement, bien souvent des essais sur la quadrature du cercle ; mais les travaux sur la trisection de l'angle, la duplication du cube et la théorie des parallèles ne manquent pas. Aujourd'hui on y pourrait ajouter un long Chapitre consacré aux prétendues démonstrations du dernier théorème de Fermat. Plusieurs pages se rapportent au mouvement perpétuel, à l'aviation, à la détermination du « nombre de la Bête » de l'*Apocalypse*, à de prétendues applications des mathématiques à l'interprétation des Livres sacrés et à d'autres questions de Théologie. Plus sérieux sont les essais dont parle de Morgan, sur le problème des Longitudes et sur une ancienne proposition d'une langue universelle artificielle. J'ajoute que, dans les beaux Volumes que nous examinons, on trouve par-ci par-là des données importantes relatives à des thèmes doués d'une véritable importance scientifique (je me borne à citer les renseignements relatifs à des systèmes de numération ayant comme bases des nombres différents de 10), ou à des savants mal connus en Angleterre et presque inconnus sur le continent.

Les auteurs dont s'occupe de Morgan sont, naturellement, en majorité Anglais, mais on en trouve de Français et d'Italiens, de Hollandais et de Suisses ; toutefois on ne pourrait pas choisir le *Budget of Paradoxes* comme base statistique pour une étude sur la distribution géographique des auteurs de paradoxes. Ajoutons que de Morgan, en écrivant pour une Revue destinée au grand public (*The Athenæum*), a évité soigneusement les détails techniques et les discussions exclusivement scientifiques.

La première édition de ce Livre parut en 1872, après la mort de

l'Auteur, par les soins de Mme Sophia de Morgan, qui réunit les Articles publiés par son mari dans *The Athenæum*, avec l'addition de notes trouvées parmi ses papiers. L'accueil fait par le public en général a été si flatteur que l'édition s'épuisa bien vite. De là l'idée de M. Smith, le savant et actif professeur de l'Université de New York, d'en publier une nouvelle. Pour mettre ce projet à exécution, il ne pouvait choisir un moment plus favorable que l'heure actuelle, car les soucis que chacun a aujourd'hui sur l'avenir de ce qui lui est le plus cher font rechercher et accueillir avec joie un Livre qui fait sourire et méditer à la fois.

Mais M. Smith ne s'est pas borné à une simple reproduction de la première édition : en effet, non seulement il a ajouté les traductions dans sa langue des passages extraits d'Ouvrages non anglais, mais il a ajouté en note des renseignements biographiques très exacts sur toutes les personnes citées et les titres complets des Ouvrages que de Morgan avait désignés d'une manière rapide. Or, comme il s'agit d'auteurs généralement peu connus et de Livres rares, la besogne n'était pas du tout facile, mais elle était très utile; par conséquent, M. Smith a fourni un précieux complément à bon nombre de Manuels biographiques et bibliographiques. Enfin, par une Table alphabétique des noms propres et des matières, rédigée très soigneusement, il a rendu très aisée la consultation de l'excellent Ouvrage que nous venons d'analyser.

GINO LORIA.

ANNUAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES POUR L'AN 1917, PUBLIÉ PAR LE BUREAU DES LONGITUDES, *avec des Notices scientifiques*. 1 vol. in-16 (16 × 9) VIII-452 + 20 + 91 + 44 + 18 + 36 pages, avec 11 figures, 5 cartes célestes et 2 portraits. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1917.

L'*Annuaire* dont la publication rentre dans les attributions du Bureau des Longitudes, parut, pour la première fois, en 1796; il se rapportait à l'an V (1796-1797).

Depuis 1900, toutes les dates et heures sont exprimées en temps civil moyen, compté sans interruption de 0^h à 24^h à partir de minuit.

Depuis 1912, par application de la loi du 9 mars 1911, les heures

des divers phénomènes sont exprimées *en temps légal*, c'est-à-dire en temps moyen de Paris, diminué de 9 minutes 21 secondes.

Conformément aux dispositions inaugurées en 1904, cet *Annuaire* devrait contenir des Tableaux détaillés relatifs à la Géographie, à la Statistique, à la Métrologie, aux Monnaies, aux Tables de Survie et d'Intérêt composé, à la Météorologie. En raison des événements actuels, cette partie a été réduite aux notions essentielles sur la Métrologie et à quelques Tableaux de Météorologie. Dès que les circonstances le permettront, on donnera à la Géographie et à la Statistique tout le développement que comportent ces importants sujets. L'*Annuaire* de 1917 ne contient pas les données physiques et chimiques qui se trouveront dans l'*Annuaire* de 1918.

La partie astronomique de ce Volume renferme les Tableaux relatifs à la déviation de la verticale en France, à l'intensité de la pesanteur en divers lieux et au calcul des altitudes par les observations barométriques; il contient aussi des données relatives aux constellations, aux parallaxes stellaires, aux étoiles doubles, aux mouvements propres des étoiles et à la spectroscopie stellaire, tandis qu'il ne contient pas la sismologie, la théorie des cadrans solaires, la physique solaire et les données relatives aux petites planètes : ces matières seront développées en 1918.

Voici maintenant les principales modifications apportées cette année à la rédaction de l'*Annuaire*.

Le Chapitre relatif aux corrections pour déduire les levers et couchers du Soleil et de la Lune en un lieu terrestre de ceux donnés pour Paris a été remanié et complété par un nouveau paragraphe sur l'éclairement de la Terre par le Soleil, dans lequel on donne, en particulier, l'azimut du Soleil à son lever et à son coucher, ainsi que son angle horaire au passage au premier vertical, pour les lieux compris entre 41° et 51° de latitude boréale.

Les données concernant les Calendriers grégorien et julien ont été rédigées par M. Andoyer sous une forme nouvelle, dans laquelle on a fait apparaître les formules algébriques fournissant les divers éléments du comput.

Dans le Chapitre consacré à la Terre, diverses additions ont été apportées; en particulier une Note de M. Hamy sur la longueur du mètre en longueur d'onde de la radiation rouge du cadmium.

La partie relative aux constellations a été remaniée par M. Bigourdan; le Catalogue donnant les positions moyennes des principales étoiles a été remplacé par une Note sur le moyen de reconnaître les constellations; une cinquième carte, relative à la calotte polaire australe, a été ajoutée à celles déjà données.

M. Bigourdan a fourni une Note sur les étoiles doubles et multiples, avec un catalogue des principaux couples, leurs angles de position, les distances, les grandeurs et couleurs des composantes.

M. de Gramont a revu et complété le Chapitre consacré aux spectres stellaires en insistant particulièrement sur les découvertes récentes.

Le nombre des données concernant la Météorologie a été réduit, mais on y a ajouté une Note de M. Renaud relative aux mesures employées sur les Cartes marines.

Dans la Météorologie, qui a été réduite aux tableaux relatifs à Paris, on donne une Note, due à M. Renaud, sur le nouveau mode d'indication de la pression barométrique aux États-Unis et en Angleterre, où il fait usage des unités absolues du système C. G. S. On sait que l'unité de pression est dans ce système la *barye*, c'est-à-dire la pression d'une *dyne* sur un centimètre carré. Cette unité étant trop petite, on emploie le *bar* qui représente 10^6 baryes. On emploie aussi les millibars et les centibars. La pression d'un millimètre de mercure est environ les $\frac{3}{4}$ de la pression évaluée en millibars.

Un supplément à l'*Annuaire* donne, pour l'année 1918, les principaux éléments des divers calendriers en usage, les heures des levers et couchers du Soleil et de la Lune, les phases lunaires, les éclipses de Soleil et de Lune et enfin des données relatives aux marées.

Ce Volume renferme quatre Notices scientifiques sur lesquelles nous ne pouvons dire que quelques mots, vu l'espace restreint dont nous disposons.

Le Calendrier babylonien; par M. G. Bigourdan (A. 1-A. 20).

Il y a d'abord des notions sur l'origine du Calendrier, sur l'usage du gnomon par les anciens, par les Babyloniens, par les Grecs; et sur le Calendrien égyptien. Ensuite l'étude du Calendrier babylonien est faite d'après les recherches les plus récentes; l'Auteur

donne des détails sur les mois, sur le commencement du mois, sur l'année et sur les ères. Cette Notice constitue un important Chapitre de l'Histoire de l'Astronomie.

L'avance de l'heure légale pendant l'été de l'année 1916; par M. J. Renaud (B. 1-B. 91). — M. Renaud retrace l'histoire du changement de l'heure en 1916, avec les discussions que ce changement souleva dans diverses Sociétés savantes et dans le Parlement. Il termine en souhaitant qu'on arrive à une entente internationale permettant d'établir enfin des règles définitives pour la mesure du temps au moyen du système des fuseaux horaires appliqué d'une façon bien plus complète qu'il ne l'est actuellement. « Les progrès de la Science, dit-il, exigent impérieusement qu'en dehors des cas de force majeure, on assure avant tout une stabilité absolue au mode d'indication de l'heure dans le monde entier. »

La détermination du Mètre en longueurs d'ondes lumineuses; par M. Maurice Hamy (C. 1-C. 44). — M. Hamy expose la méthode interférentielle de Michelson, puis celle de Fabry et Perot pour trouver le nombre de longueurs d'onde de la radiation rouge du cadmium dans l'air sec à 15° du thermomètre à hydrogène et sous la pression normale de 760^{mm}. Le résultat final est le suivant : on a pour le mètre

$$1\,553\,164,13.$$

La longueur d'onde considérée λ est donc égale à

$$0^{\mu},643\,846\,96,$$

μ représentant le micron (millième de millimètre).

La Vie et les Travaux de l'ingénieur hydrographe en chef Philippe Hatt; par M. J. Renaud (D. 1-D. 18). — L'Auteur de cette Notice biographique donne un beau résumé d'une carrière utilement remplie, ainsi que des travaux personnels de M. Hatt qui ont fait faire de notables progrès à la science hydraulique.

Er. L.

MÉLANGES.

SUR LA RELATION ENTRE LES PÉRIODES D'UNE FONCTION UNIFORME QUADRUPLEMENT PÉRIODIQUE DE DEUX VARIABLES ;

Par M. Émile PICARD.

Nous avons autrefois, Henri Poincaré et moi, succinctement indiqué (*Comptes rendus*, 3 décembre 1883, t. 97) une démonstration du théorème énoncé par Riemann sur les relations nécessaires entre les périodes d'une fonction uniforme $2p$ fois périodique de p variables.

Certains détails de la démonstration, qui est simple dans ses grandes lignes, demandent quelque soin. Aussi, je vais reprendre cette étude, en reproduisant ici la Leçon que j'ai faite sur cette question dans mon cours de 1916 à la Sorbonne. Je me borne au cas de *deux* variables.

1. Dans le domaine des deux variables complexes u et v, nous considérons un réseau de *prismatoïdes* de périodes distinctes correspondant au tableau

$$\begin{matrix} u & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4, \\ v & \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & \nu_4, \end{matrix}$$

et soit $f(u, v)$ une fonction uniforme de u et v, ayant partout à distance finie le caractère d'une fonction rationnelle. On suppose que l'on ait

$$f(u+\omega_i, v+\nu_i) = f(u, v) \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

On peut certainement obtenir, sauf dans un cas particulier sans intérêt, une autre fonction de même nature $\varphi(u, v)$, qui ne soit pas fonction de la première.

Posons en effet

$$\varphi(u, v) = f(u+h, v+k).$$

h et k étant deux constantes prises arbitrairement. Il n'y aura pas de relation entre f et φ. Si, en effet, ces fonctions étaient liées par une relation, on aurait

$$f'_u(u, v) f'_v(u+h, v+k) - f'_v(u, v) f'_u(u+h, v+k) = 0.$$

Donnons à (u, v) la valeur fixe (u_0, v_0); on aurait alors une relation de la forme

$$A f'_x(x, y) + B f'_y(x, y) = 0,$$

A et B étant deux constantes qui ne sont pas nulles toutes deux. Par suite $f(x, y)$ serait une fonction de la seule combinaison

$$Bx - Ay.$$

Nous écartons ce cas sans intérêt, où il ne s'agirait pas en réalité d'une véritable fonction de deux variables.

2. Nous partons donc de deux fonctions quadruplement périodiques

$$F_1(u, v) \quad \text{et} \quad F_2(u, v),$$

qui ne sont pas fonctions l'une de l'autre, et nous posons :

$$x = F_1(u, v), \qquad y = F_2(u, v).$$

Pour x et y *arbitraires* correspondent un nombre fini μ de valeurs de (u, v) dans un prismatoïde de périodes; ce nombre est fixe, car quand un *point-racine* (u, v) sort d'un prismatoïde, un autre entre. Soit maintenant $\Phi(u, v)$ une troisième fonction quadruplement périodique; il pourrait arriver que les μ valeurs de $\Phi(u, v)$ ne fussent pas distinctes, *mais cela n'arrivera pas pour*

$$\Phi(u+h, v+k)$$

si h et k sont arbitraires. Soient en effet (u_1, v_1) et (u_2, v_2), situés dans un même prismatoïde et donnant les mêmes valeurs pour cette fonction; on aurait, quels que soient h et k,

$$\Phi(u_1+h, v_1+k) = \Phi(u_2+h, v_2+k),$$

et par suite

$$\Phi(u, v) = \Phi(u+u_2-u_1, v+v_2-v_1),$$

quels que soient u et v. Donc u_2-u_1 et v_2-v_1 seraient des périodes, ce qui n'a pas lieu.

3. Nous considérons donc *trois* fonctions quadruplement périodiques

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v),$$

pour lesquelles les circonstances particulières, que nous venons de viser, ne se présentent pas. On peut prendre, par exemple,

$$\varphi(u, v) = f(u + h, v + k),$$
$$\psi(u, v) = f(u + h', v + k'),$$

les h et k étant des constantes prises arbitrairement.

Si l'on considère alors les équations

$$x = f(u, v),$$
$$y = \varphi(u, v),$$

à des valeurs *arbitraires* de x et y correspondent un nombre limité, toujours le même, de valeurs de (u, v) dans un prismatoïde. Mais, pour *certaines* valeurs de x et y, il pourrait arriver que le nombre des racines fût infini. Soit (a, b) un tel système de valeurs de (x, y). Alors les deux équations

$$(\Sigma) \qquad \begin{cases} f(u, v) = a, \\ \varphi(u, v) = b \end{cases}$$

auraient une infinité de solutions (dans un prismatoïde), qui formeraient une suite continue. Ceci entraîne que ces solutions appartiennent à l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0.$$

Or cette équation ne peut définir manifestement qu'un nombre *limité* de continuum distincts dans l'espace (u, v). Il ne peut donc y avoir qu'un nombre *limité* de valeurs (a, b), pour lesquelles les équations (Σ) aient une infinité de racines.

Revenons aux trois fonctions x, y et z. Si l'on donne à y une valeur différente des b, x étant quelconque (fini ou infini), il y aura un nombre limité de valeurs de z; soient $z_1, z_2, \ldots, z_\mu$ ces valeurs en nombre μ. La somme symétrique

$$F = z_1^p + z_2^p + \ldots + z_\mu^p$$

(p entier quelconque) est donc une fonction uniforme de x; on

raisonne de même pour y. On peut par suite dire de cette somme (qui est fonction *uniforme* de x et y) qu'*elle est fonction rationnelle de x*, quand y est distinct des b, et *fonction rationnelle de y*, quand x est distinct des a. Est-elle fonction rationnelle de x et y ? La chose est bien vraisemblable *a priori*, mais il faut cependant quelque soin pour le montrer.

4. Le fait que $F(x, y)$ est une fonction rationnelle de x et y peut se déduire de ce qu'*une fonction analytique uniforme de x et y ne peut pas avoir de point singulier essentiel isolé*. Si en effet F n'était pas rationnelle, un au moins des points (a, b) serait un point singulier essentiel *isolé*.

Mais nous ne supposerons pas connue la proposition précédente, ou plutôt, nous allons la démontrer, dans la mesure où nous en avons besoin, en imitant l'analyse au moyen de laquelle M. Hurwitz a établi qu'une fonction uniforme de x et y, qui est rationnelle en x pour toute valeur finie de y et pareillement rationnelle en y pour toute valeur finie de x, est une fonction rationnelle de x et y [1].

Nous pouvons supposer que $x = 0$, $y = 0$ est un point ordinaire de F (les a et b pouvant être supposés non nuls) et que de plus $F(0, 0)$ est différent de zéro.

On a, dans le voisinage de $x = 0$, $y = 0$ [c'est-à-dire dans des cercles de rayons ρ et ρ_1, ayant respectivement les origines pour centres dans les plans des variables x et y], le développement

$$(1) \qquad F(x, y) = \sum_{0}^{\infty} g_m(y)\, x^m,$$

les $g_m(y)$ étant holomorphes en y.

D'après les hypothèses, $F(x, y)$ est nécessairement rationnelle en y quand x est dans le cercle (ρ). Il en est de même pour toutes les dérivées partielles

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \ldots,$$

puisque dans le voisinage d'une valeur de x différente d'un a,

[1] HURWITZ, *Journ. für Math.*, 1883, p. 95.

quel que soit y, la fonction a le caractère rationnel. De là se conclut que tous les g, qui sont des valeurs des $\frac{d^q F}{dx^q}$ pour $x = 0$, sont aussi fonctions rationnelles de y.

Soit, d'autre part, un point β dans le cercle de rayon $\rho'_1 < \rho_1$ (ou sur la circonférence); $F(x, \beta)$ est rationnelle en x, d'après les hypothèses. On peut donc écrire

$$(2) \qquad F(x, \beta) = \frac{B_0 x^r + B_1 x^{r-1} + \ldots + B_r}{C_0 x^r + C_1 x^{r-1} + \ldots + C_r},$$

B_0 et C_0 ne sont pas nuls à la fois, et l'on peut supposer que C_r n'est pas nul, puisque $F(0, \beta)$ est fini.

En identifiant (1), où l'on a fait $y = \beta$, et (2), on obtient l'identité en x

$$B_0 x^r + \ldots + B_r = (C_0 x^r + C_1 x^{r-1} + \ldots + C_r)[g_0(\beta) + g_1(\beta) x + \ldots].$$

Si donc on envisage les lignes indéfinies en nombre $r + 1$

$$\begin{array}{lll} g_1(\beta), & g_2(\beta), & \ldots, \\ g_2(\beta), & g_3(\beta), & \ldots, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, \\ g_{r+1}(\beta), & g_{r+2}(\beta), & \ldots, \end{array}$$

tous les déterminants formés avec $r + 1$ colonnes *sont nuls*.

Je dis maintenant que le nombre entier r est le même pour tous les points β répondant à $|\beta| \leq \rho'_1$. Supposons en effet qu'il en soit autrement; à une valeur de r ne correspondrait qu'*un nombre limité* de points β, qui seraient les racines communes aux déterminants en question (rationnels en β). Donc les points β intérieurs à (ρ'_1) *formeraient un ensemble énumérable*, ce qui n'est pas.

Il résulte de là que tous les déterminants d'ordre $r + 1$ sont identiquement nuls. Par suite on peut choisir les C, *rationnels en y*, de manière que

$$(C_0 x^r + C_1 x^{r-1} + \ldots + C_r)[g_0(y) + x g_1(y) + \ldots]$$

soit un *polynome* en x, ce qui démontre le théorème.

5. L'analyse précédente établit du même coup qu'il y a entre les trois fonctions quadruplement périodiques x, y et z de u et v une

relation algébrique, soit

$$S(x, y, z) = 0,$$

et, de plus, à un point arbitraire de cette surface ne correspond qu'un point (u, v) dans un prismatoïde.

On voit maintenant de suite que toute fonction quadruplement périodique $P(u, v)$ est une fonction rationnelle de x, y et z. Il suffit, pour le voir, d'envisager les μ valeurs de (u, v) répondant aux équations

$$x = f(u, v)$$
$$y = \varphi(u, v)$$

et de former les combinaisons correspondantes

$$\begin{array}{l} P_1 + P_2 + \ldots + P_\mu, \\ z_1 P_1 + z_2 P_2 + \ldots + z_\mu P_\mu, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_1^{\mu-1} P_1 + z_2^{\mu-1} P_2 + \ldots + z_\mu^{\mu-1} P_\mu, \end{array}$$

qui sont toutes des fonctions rationnelles de x et y. On en déduit que P_1 est une fonction rationnelle de x, y et z_1 ; c'est, en supprimant l'indice *un*, la proposition à établir.

6. En différentiant, nous avons maintenant

$$dx = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv,$$

$$dy = \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv,$$

d'où l'on déduit

$$du = P\,dx + Q\,dy,$$
$$dv = P_1\,dx + Q_1\,dy,$$

les P et Q étant quadruplement périodiques en (u, v), et par conséquent rationnelles en x, y et z. Il en résulte que la surface

$$S(x, y, z) = 0$$

a *deux* intégrales distinctes de différentielles totales de *première espèce :*

$$u = \int P\,dx + Q\,dy,$$

$$v = \int P_1\,dx + Q_1\,dy.$$

Prenons alors pour x et y des fonctions rationnelles arbitraires $\lambda(t)$, $\mu(t)$ d'un paramètre t. Les deux intégrales de différentielles totales u et v deviennent des intégrales abéliennes

$$U \quad \text{et} \quad V$$

relatives à la courbe entre t et z :

$$S[\lambda(t), \mu(t), z] = 0;$$

elles sont d'ailleurs manifestement linéairement indépendantes.

Or, étant données deux intégrales distinctes de première espèce d'une courbe algébrique de genre p, avec les périodes

$$A_1, \; A_2, \; \ldots, \; A_{2p} \quad \text{pour} \quad U,$$
$$B_1, \; B_2, \; \ldots, \; B_{2p} \quad \text{pour} \quad V,$$

il y a une relation de la forme

(3) $$\sum c_{ik} A_i B_k = 0,$$

entre ces périodes, les c étant des entiers avec $c_{ik} = -c_{ki}$. De plus, d'après l'inégalité célèbre de Riemann, si l'on pose

$$A_i = a_i + a'_i\sqrt{-1},$$

on a nécessairement

(4) $$\sum c_{ik} a_i a'_k > 0.$$

Revenons aux intégrales de différentielles totales u et v, elles ont le tableau des *quatre* paires de périodes

$$u \quad \omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3 \quad \omega_4,$$
$$v \quad \nu_1 \quad \nu_2 \quad \nu_3 \quad \nu_4.$$

Donc les périodes A_i et B_i de U et V sont de la forme

$$A_i = m_i^1\omega_1 + m_i^2\omega_2 + m_i^3\omega_3 + m_i^4\omega_4,$$
$$B_i = m_i^1\nu_1 + m_i^2\nu_2 + m_i^3\nu_3 + m_i^4\nu_4,$$

les m étant des entiers. En substituant dans (3), on a

(5) $$\sum \gamma_{ik}\omega_i\nu_k = 0 \qquad (\gamma_{ik} = -\gamma_{ki} \text{ entiers}).$$

D'ailleurs, d'après l'inégalité (4), on aura nécessairement

$$\sum \gamma_{ik}\,\omega'_i\,\omega_k > 0.$$

en posant

$$\omega_i = \omega_i - \omega_i \lambda \quad 1.$$

Donc les entiers γ ne peuvent être tous nuls.

La relation (S) constitue ainsi une relation entre les ω et les ν; *c'est le théorème fondamental sur la relation entre les périodes d'une fonction quadruplement périodique* ([1]).

Remplaçant les γ par des c, nous écrirons la relation sous la forme

$$\text{(R)} \qquad \sum c_{ik}\,\omega_i \nu_k = 0 \qquad (c_{ik} = -c_{ki}).$$

7. Terminons, en montrant que, par un changement de périodes

$$\omega'_i = m^i_1 \omega_1 + m^i_2 \omega_2 + m^i_3 \omega_3 + m^i_4 \omega_4 \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

la même substitution étant effectuée sur les ν et le déterminant non nul $|m^i_k|$ n'étant pas nécessairement égal à ± 1, on peut donner à la relation (R) une forme réduite très simple.

On peut supposer $c_{12} \neq 0$, puisque tous les c ne sont pas nuls. Partageons alors les quatre premiers nombres en deux groupes (1, 2) et (3, 4). Il y a dans (R) des termes où $i = 1, 2$ et $k = 3, 4$. Montrons que, par un changement de périodes de la forme indiquée, on peut les faire disparaître.

Soit, par exemple, à faire disparaître le terme

$$c_{13}(\omega_1 \nu_3 - \omega_3 \nu_1);$$

nous poserons

$$\omega'_2 = c_{12}\omega_2 + c_{13}\omega_3,$$
$$\omega'_3 = \omega_3,$$

et de même pour les ν, ω_1 et ω_4 n'ayant pas changé.

On voit aisément que dans la relation transformée le terme (1, 3) a disparu; le terme (2, 3) a le même coefficient, et les termes (1, 4) et (2, 4) ont les mêmes coefficients inchangés ou multipliés par c_{12}. On recommencera une opération analogue par exemple

---

([1]) Je rappelle que M. Appell est arrivé par une tout autre voie à ce résultat dans son beau Mémoire *Sur les fonctions périodiques de deux variables* (*Journal de Mathématiques*, 1891).

pour faire disparaître les termes (1, 4), et chaque fois on ne défait pas ce qu'on a fait antérieurement, puisque les coefficients des termes avec indices de l'un et l'autre groupes ne sont pas modifiés ou sont seulement multipliés par c_{12}. Finalement, en appelant

$$A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4 \qquad \text{(périodes de U)},$$
$$B_1 \quad B_2 \quad B_3 \quad B_4 \qquad \text{(périodes de V)}$$

les périodes transformées, on arrivera à la relation

$$(6) \qquad P(A_1 B_2 - A_2 B_1) + Q(A_3 B_4 - A_4 B_3) = 0.$$

P qui est égal à c_{12} n'est pas nul. On peut de suite démontrer que Q n'est pas nul. On sait en effet que, si

$$a_1 + a'_1\sqrt{-1}, \qquad a_2 + a'_2\sqrt{-1}, \qquad a_3 + a'_3\sqrt{-1}, \qquad a_4 + a'_4\sqrt{-1}$$

sont les périodes d'une intégrale, correspondant aux A et B, on aura

$$(7) \qquad P(a_1 a'_2 - a_2 a'_1) + Q(a_3 a'_4 - a_4 a'_3) > 0$$

(inégalité de Riemann).

Or si Q était nul, on pourrait, d'après (6), former une combinaison $\alpha U + \beta V$ ayant des périodes nulles pour les cycles répondant aux indices 1 et 2, ce qui est en opposition avec l'inégalité (7), où Q serait nul, et où l'on aurait

$$a_1 = a_2 = a'_1 = a'_2 = 0.$$

Ainsi donc Q n'est pas nul, et une nouvelle transformation amène aux périodes Ω et Υ, avec la relation canonique

$$(8) \qquad \Omega_1 \Upsilon_2 - \Omega_2 \Upsilon_1 + \Omega_3 \Upsilon_4 - \Omega_4 \Upsilon_3 = 0.$$

Nous avons donc le théorème fondamental classique : *Par une transformation d'un degré convenable, égal ou supérieur à* un, *effectuée sur les périodes* ω *et* υ, *on obtient de nouvelles périodes* Ω *et* Υ *satisfaisant à la relation* (8).

LA VIE ET L'ŒUVRE DE GASTON DARBOUX;

PAR M. ÉMILE PICARD.

Nous avons annoncé le mois dernier la mort de Gaston Darboux. Son œuvre demandera une étude approfondie. Je voudrais seulement ici essayer d'en montrer l'importance, en retraçant sommairement la vie du regretté fondateur du *Bulletin des Sciences mathématiques*.

*
* *

Gaston Darboux naquit à Nîmes le 13 août 1842. Après de bonnes études classiques au Lycée de cette ville, il entra en 1859 dans la classe de Mathématiques spéciales du Lycée de Montpellier et fut, après une année, admissible à l'École Polytechnique; mais, ayant le désir très arrêté d'entrer dans l'enseignement, il ne voulut pas subir l'examen du second degré. Au bout d'une seconde année, il était reçu le premier à l'École Normale supérieure et à l'École Polytechnique. A cette époque, l'École Normale menait à peu près uniquement à l'enseignement des lycées. Comme on l'a dit, elle conduisait à tout, à condition d'en sortir. Des exemples célèbres montraient que les *littéraires*, suivant le terme de la maison, en sortaient quelquefois; mais le fait ne s'était guère vu pour les *scientifiques*. La détermination prise par Darboux de se consacrer à l'enseignement fut un objet d'étonnement et peut-être de scandale pour les amis de la grande famille polytechnicienne. On n'avait pas vu encore, comme l'a rappelé M. Lavisse au jubilé de Darboux, en 1912, quelqu'un préférer, aux espérances brillantes qu'offrait la carrière des mines ou des ponts et chaussées, le titre de professeur et la modestie des fonctions d'enseignement. Pasteur était alors directeur des études scientifiques à l'École Normale. Il désirait déjà sans doute que celle-ci contribuât au recrutement de l'enseignement supérieur comme de l'enseignement secondaire, et qu'elle devînt une pépinière pour la Science française. Il eut une grande joie en voyant arriver une recrue qui promettait d'être aussi brillante. Ceux qui plus tard ont entendu Pasteur parler de l'amour et du

culte de la Science peuvent facilement imaginer les conseils qu'il donnait à Darboux. Le nouvel élève se signala bientôt par des travaux remis aux maîtres de conférences et témoignant d'un véritable esprit d'invention. Après ses trois années d'études, il put, grâce à Pasteur, rester encore deux ans à l'Ecole dans le poste d'agrégé-préparateur de mathématiques créé à son intention et achever un travail remarquable sur les surfaces orthogonales, qui lui servit de thèse de doctorat en 1866. Il fut ensuite, jusqu'en 1872, professeur aux lycées Saint-Louis et Louis-le-Grand. Son enseignement avait, au témoignage de ceux qui l'ont entendu, une tournure très originale; dans sa classe le souci de l'examen prochain ne hantait pas sans cesse les élèves, ce qui n'empêchait pas ceux-ci de remporter de brillants succès dans nos grandes Ecoles.

En 1872, Darboux devint maître de conférences à l'Ecole Normale, en même temps qu'il suppléa Liouville à la Sorbonne dans la chaire de Mécanique rationnelle. Sa réputation scientifique était déjà bien établie et son influence fut grande parmi les mathématiciens de l'Ecole, qui suivaient aussi son cours à la Faculté. Dans celui-ci, Darboux a rénové en France l'enseignement de la Mécanique générale. J'ai commencé alors à le connaître et à apprécier sa parole claire et élégante. Ce n'est pas que certains points de son enseignement n'aient été, pour mes camarades et moi, l'occasion de grandes perplexités. En même temps que le cours de Darboux à la Sorbonne, nous suivions à l'Ecole les conférences de Briot. Il y a bien des manières d'exposer les principes de la Mécanique; Briot envisageait d'abord la force au point de vue statique, tandis que Darboux débutait par la définition dynamique. Sur cette question de principes, il nous fallait oublier à l'Ecole ce qu'on nous avait dit à la Sorbonne; cela a été notre première leçon de philosophie des sciences. Aux élèves de la Section de Mathématiques en troisième année, Darboux faisait des leçons d'Algèbre et de Géométrie analytique, passant avec un art consommé d'une théorie à une autre; dans ces causeries familières, il donnait toute sa mesure comme professeur. A la mort de Chasles en 1880, il quittait l'Ecole pour devenir titulaire de la chaire de Géométrie supérieure à la Sorbonne.

*
* *

On peut distinguer le plus souvent chez les mathématiciens deux tendances d'esprit différentes. Les uns se préoccupent principalement d'élargir le champ des notions connues; sans se soucier toujours des difficultés qu'ils laissent derrière eux, ils recherchent de nouveaux sujets d'études. Les autres préfèrent rester, pour l'approfondir davantage, dans le domaine des notions mieux élaborées; ils veulent en épuiser les conséquences et s'efforcent de mettre en évidence, dans la solution de chaque question, les véritables éléments dont elle dépend. Il suffit souvent aux premiers d'être assurés qu'un problème peut être résolu, et ils laissent à d'autres le soin de le résoudre effectivement. On dirait, en leur appliquant un mot de Fontenelle à propos de Leibnitz, qu'ils se contentent de voir croître dans les jardins d'autrui les plantes dont ils ont fourni les graines, celles-ci étant plus à estimer que les plantes mêmes. Les seconds pensent que les méthodes générales sont faites pour être appliquées et que seules ont du prix les solutions poussées jusqu'à leur dernier terme. Il n'y a pas à établir ici une hiérarchie : l'esprit souffle où il veut. On trouve chez Darboux l'une et l'autre de ces tendances. Les conséquences de plusieurs de ses Mémoires ont été approfondies par d'autres plus que par lui-même; toutefois, c'est par le souci de la perfection que se distingue la plus grande partie des travaux de l'éminent mathématicien qui aimait le plus souvent à tirer d'une méthode tout ce qu'elle peut fournir, et dont les traités didactiques sont des œuvres d'art dignes d'être proposées comme modèles à ceux qui cultivent les sciences mathématiques. Nul ne savait mieux que lui montrer combien peut être féconde l'étude approfondie d'un cas simple. C'est qu'en effet on ne parvient le plus souvent au général que par le particulier; comme aimait à le répéter Hermite, la méthode d'invention est au fond la même dans les sciences mathématiques et dans les sciences d'observation. Darboux excellait aussi à établir des rapprochements inattendus entre des questions regardées jusque-là comme distinctes, ce qui donne à son œuvre, notamment en Géométrie infinitésimale, une grande cohésion et une impression de solidité et de force.

Étant encore élève à l'École Normale, Darboux avait fait la découverte d'un système triple orthogonal formé de surfaces du quatrième degré et il passait, deux ans après sa sortie, une thèse devenue classique sur les surfaces orthogonales. Il est revenu souvent par la suite sur ces systèmes qui, depuis Lamé, offrent un grand intérêt en Physique mathématique. En 1873, il rassemblait toutes ses recherches de Géométrie analytique dans un Ouvrage sur une classe remarquable de surfaces algébriques et la théorie des imaginaires, qui contient un grand nombre de résultats remarquables. Son but principal était l'étude des surfaces du quatrième ordre qui admettent comme ligne double le cercle de l'infini, et qu'il appelle *cyclides*. En même temps que ces surfaces, il étudie les *cycliques* planes et sphériques. Il s'occupe aussi de certaines propriétés des imaginaires en Géométrie, sujet sur lequel il est revenu souvent dans son enseignement. Parmi les précieuses notes qui terminent le volume, signalons celle qui traite de la formation de l'équation différentielle des surfaces applicables sur une surface donnée. Rappelons aussi que, à propos de la géométrie de Cayley, Darboux a indiqué pour la première fois une interprétation dans l'espace ordinaire de la géométrie non euclidienne, qui a été souvent utilisée dans des études philosophiques sur les divers espaces.

Dans cette période entre 1870 et 1880, l'activité scientifique de Darboux fut considérable. Ses travaux en Analyse pure ne furent pas moins remarqués que ses travaux géométriques. Le Mémoire de 1876 sur l'*approximation des fonctions de très grands nombres* est une de ses productions les plus originales. De telles fonctions se présentent dans maintes applications des mathématiques, notamment dans le Calcul des probabilités et en Mécanique céleste. De l'étude des singularités sur le cercle de convergence d'une série entière, Darboux déduit dans des cas étendus des caractères précis pour reconnaître l'ordre de grandeur des coefficients de la série. Il en tire de nombreuses applications, étendant considérablement des résultats obtenus par d'illustres devanciers tels que Laplace; il fait aussi une étude approfondie des développements suivant les polynomes provenant de la série hypergéométrique.

Relativement à l'intégration effective des équations aux déri-

vées partielles du second ordre, il n'avait été, pendant de longues années après la publication du Mémoire d'Ampère de 1818, rien ajouté d'essentiel à la théorie développée par le grand physicien. Darboux, en 1870, publia un Mémoire fondamental faisant connaître une méthode nouvelle, où il substitua aux équations de Monge une suite indéfinie de systèmes analogues, trouvant même l'intégrale générale si celle-ci ne renferme pas de signes d'intégrale définie. La méthode de Darboux a donné lieu à un nombre très étendu de travaux importants.

Un des objets de l'Analyse abstraite est l'étude de l'idée de fonction, c'est-à-dire de dépendance entre deux ou plusieurs variables. Il a fallu longtemps avant qu'on se rendît compte de l'étendue extraordinaire de cette notion. On doit d'ailleurs reconnaître qu'il est indispensable pour les progrès de la Science que les choses paraissent d'abord simples. Sans vouloir trop généraliser, on peut dire que l'erreur est quelquefois utile. Le Calcul différentiel n'aurait pas pris naissance, si Newton et Leibnitz avaient pensé que les fonctions continues n'ont pas nécessairement une dérivée, notion dont l'origine est dans le sentiment confus que nous avons de la rapidité plus ou moins grande avec laquelle s'accomplissent les phénomènes. Un jour devait venir cependant où l'idée de fonction serait approfondie dans toute sa généralité. En France, Cauchy avait été dans ce domaine, comme dans bien d'autres, un précurseur. Le Mémoire de Darboux sur les fonctions discontinues, paru en 1875, marque une date dans l'histoire de la critique des principes du Calcul infinitésimal. On y trouve une proposition fondamentale sur les intégrales par excès et par défaut, et de nombreux exemples de fonctions continues sans dérivées.

*
* *

On donne souvent le nom de *géomètres* aux mathématiciens. A l'Académie des Sciences, la Section de Mathématiques pures s'appelle la Section de Géométrie. Or plus d'un mathématicien éminent n'a jamais écrit une ligne sur la Géométrie proprement dite, c'est-à-dire sur l'étude des propriétés des figures faite à un point de vue synthétique, sans aucun mélange de considérations analytiques. Les procédés de l'Analyse mathématique et de la

Géométrie analytique d'une part, de la Géométrie pure d'autre part, ont été quelquefois au siècle dernier opposés les uns aux autres. Il fut un temps où les *analystes* reprochaient aux *géomètres* de n'avoir pas de méthodes générales; les géomètres répliquaient que les méthodes générales ne sont pas tout dans la Science, et qu'elles empêchent même souvent de voir les choses directement et en elles-mêmes.

On peut, je crois, affirmer que dans ces discussions, où ont été mêlés les noms de grands mathématiciens, tous avaient tort en quelque manière. L'Analyse avec son symbolisme et ses notations de plus en plus perfectionnées, constitue une langue d'une admirable clarté, qui, suivant le mot de Fourier, n'a pas de signe pour exprimer les notions confuses et procure à la pensée une véritable économie. Le développement formel a joué à certains moments un rôle très important, et le langage analytique a été indispensable à la plus grande extension des principes. Le symbolisme soutient et porte l'esprit en avant, et les généralisations se font avec le moindre effort. On pourrait donner comme exemples la forme analytique du principe des déplacements virtuels en Mécanique, et les équations de Lagrange en Dynamique analytique. Tout cela montre assez ce que signifie une phrase souvent répétée, qu'il n'y a dans une formule que ce qu'on y a mis; elle est vide de sens ou n'est qu'un pur truisme. Des résultats, identiques au fond, peuvent avoir des formes très différentes, et il arrive que la forme soit essentielle; telle aussi l'énergie peut être constante en quantité, mais variable en qualité. Aux cas cités plus haut, on pourrait ajouter la Mécanique céleste tout entière, où il n'y a rien de plus que la formule de la gravitation universelle et quelques constantes fournies par l'observation, mais où d'innombrables transformations de calcul nous font passer de ce point de départ à l'explication de presque toutes les particularités des mouvements des astres.

On doit avouer d'autre part que, dans la complexité des formules, on ne démêle pas toujours des faits simples que mettent parfois en évidence des raisonnements purement géométriques. Une méthode géométrique peut, chemin faisant, mieux explorer qu'une méthode analytique les alentours d'une question. On voyait mieux le pays quand on voyageait à pied; il est vrai qu'on allait moins

loin. Dans le même ordre d'idées, notons que, pour certaines applications, des raisonnements géométriques donnent sans peine une première approximation, à laquelle conduirait moins facilement l'emploi de l'Analyse.

La conclusion s'offre d'elle-même. On doit se garder de l'exclusivisme auquel se laissèrent entraîner des géomètres illustres, comme Poncelet et Chasles. Avant eux, Monge, dans ses célèbres *Applications de l'Analyse à la Géométrie*, avait été plus éclectique. Aussi Darboux a-t-il écrit très justement dans une belle étude sur le développement des méthodes géométriques : « Monge, le rénovateur de la Géométrie moderne, nous a montré dès le début, ses successeurs l'ont peut-être oublié, que l'alliance de la Géométrie et de l'Analyse est utile et féconde, que cette alliance est peut-être une condition de succès pour l'une et pour l'autre. » A ce point de vue, Darboux fut un des plus brillants continuateurs de Monge. En France, et aussi en dehors de notre pays, cette école d'analystes géomètres, pour qui les problèmes de Géométrie infinitésimale sont l'occasion de belles recherches où les méthodes analytiques et les points de vue géométriques se prêtent un mutuel appui, avait hier encore Darboux pour chef; elle réalise pleinement dans ses travaux l'alliance souhaitée par Monge.

Une grande partie de l'œuvre de Darboux se rapporte à la Géométrie infinitésimale. Ses travaux, dans cet ordre d'idées, traitent de l'applicabilité des surfaces, de la représentation sphérique, des surfaces à courbure constante, des systèmes orthogonaux. Darboux excelle à établir des rapprochements entre diverses questions; telles ses études sur la déformation des surfaces du second degré et la transformation des surfaces à courbure totale constante ou sur les surfaces isothermiques liées à la déformation des quadriques.

Ces travaux géométriques constituent en même temps de beaux Mémoires sur la théorie des équations aux dérivées partielles. Parmi celles-ci, Darboux a fait une étude approfondie des équations dites de Laplace, qui se présentent dans tant de problèmes. Il faut aussi signaler les recherches sur les cercles géodésiques et sur les surfaces isothermiques, c'est-à-dire à lignes de courbure isothermes. Rappelons encore que Darboux a tiré d'importants résultats de la considération de l'équation linéaire aux variations correspondant à une équation quelconque aux dérivées partielles;

une application particulièrement intéressante est relative aux déformations infiniment petites des surfaces.

La théorie des surfaces orthogonales, qui avait fait l'objet de la thèse de Darboux, n'a cessé de l'occuper. Il a donné de nombreux exemples de systèmes triples orthogonaux et a étendu cette théorie au cas d'un nombre quelconque de variables.

En Dynamique analytique le problème des lignes géodésiques l'a conduit à diverses questions de Mécanique se rattachant au principe de la moindre action. Il a traité de la manière la plus heureuse, sans intervention du Calcul des variations et par des méthodes purement algébriques, les questions de minimum se rattachant à ce principe. Je ne puis que rappeler ses élégants Mémoires sur l'herpolhodie et la théorie de Poinsot, sur les postulats intervenant dans les démonstrations statiques du parallélogramme des forces, son étude géométrique sur les percussions et le choc des corps.

Dans ses *Leçons sur la théorie générale des surfaces* et *sur les systèmes orthogonaux*, Darboux a exposé ses recherches personnelles, et aussi celles de ses devanciers en leur donnant une forme nouvelle et originale. C'est un véritable monument élevé à la théorie des surfaces. Ces ouvrages considérables, qui font honneur à la science française, sont rapidement devenus classiques.

*
* *

L'activité de Darboux ne s'est pas bornée aux belles productions mathématiques, dont nous avons essayé de donner une idée. Il aimait l'action autant que la pensée. En 1889, il avait été nommé doyen de la Faculté des Sciences; il se montra, dans ces délicates fonctions, administrateur éminent, et son nom restera attaché aux importantes transformations qui donnèrent alors une vie nouvelle à nos universités. En 1900, il succédait à Joseph Bertrand, comme secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences. Au poste d'honneur où le plaçait la confiance de ses confrères, Darboux acquit rapidement une grande autorité. Il eut le souci constant de maintenir ou d'accroître l'influence et le prestige de l'Académie. Ceux qui l'ont vu de près dans les commissions de l'Institut savent avec quel soin il étudiait les affaires et avec quelle clarté il les exposait.

M. Lacroix a dit très justement, en parlant de son collègue : « Il aimait l'autorité, non pour les vaines satisfactions d'amour-propre qu'elle donne quelquefois, mais pour l'action qu'elle lui permettait d'exercer dans les causes lui paraissant justes et dans les directions lui tenant à cœur. » Passionné quelquefois et désireux de faire prévaloir son opinion, Darboux n'hésitait pas à changer d'avis, quand on lui montrait une solution plus favorable aux grands intérêts dont l'Académie a la charge.

On relira toujours avec plaisir et profit les éloges historiques, très étudiés, qu'il prononçait dans les séances publiques. Avec quelle piété il a retracé la vie d'un maître vénéré qu'il avait beaucoup aimé et dont l'influence sur lui avait été très grande, Joseph Bertrand. Avec quelle sûreté et quelle précision il a analysé l'œuvre d'Hermite et celle d'Henri Poincaré. Il voulut un jour rendre hommage à une science d'origine essentiellement française, la Géodésie, en parlant des travaux du général Perrier, au nom duquel restera attachée la jonction géodésique de l'Espagne et de l'Algérie. Les succès récents de l'aviation lui suggérèrent, il y a quelques années, la pensée de lire une Notice sur un précurseur génial, membre de l'ancienne Académie des Sciences, le général Meusnier, à qui l'on doit les règles de manœuvre encore suivies aujourd'hui et une découverte capitale qui est l'emploi du ballonnet à air.

Rompant avec les habitudes, il fit en 1911 l'éloge des donateurs de l'Académie, voulant acquitter une dette de reconnaissance envers des bienfaiteurs de la Science ; à la fin de ce discours, il ne pouvait manquer de souhaiter que les donateurs de l'avenir voulussent bien employer leurs libéralités, non à fonder des prix, mais à provoquer et encourager des recherches.

Dans les milieux scientifiques étrangers, la réputation de Darboux était considérable, et la plupart des Académies l'avaient appelé dans leur sein. Sa parole était très écoutée dans les Congrès internationaux. Il avait pris une grande part à la fondation de l'Association internationale des Académies, dont les événements actuels vont modifier sans doute le fonctionnement. L'histoire des sciences l'avait toujours vivement intéressé. Il a plusieurs fois, dans les réunions internationales, fait des lectures d'un caractère historique. Ainsi, à l'Exposition universelle de Saint-Louis

en 1904, il traça une large esquisse des progrès de la Géométrie au XIXe siècle. Non moins remarquable fut le discours qu'il prononça en 1908 à Rome au Congrès des Mathématiciens sur les origines, les méthodes et les problèmes de la Géométrie infinitésimale. Darboux a maintes fois regretté la tendance qu'ont trop de savants français à se désintéresser de l'histoire des sciences; il savait quelles difficultés on y rencontre et avec quelle peine on arrive à rétablir des droits depuis longtemps méconnus. Aussi poussait-il vivement ses nouveaux confrères à écrire sur leurs prédécesseurs des Notices qui fussent des documents pour l'histoire de la Science française. Il avait en effet le souci de voir rendre à chacun des pionniers de la Science la justice qui lui est due, et n'ignorait pas combien l'Histoire peut, entre certaines mains, être étrangement défigurée.

Ce fut, pour Darboux, une grande satisfaction que de pouvoir réaliser un projet qu'il caressait depuis longtemps : l'impression des procès-verbaux, restés manuscrits, des séances de l'Académie des Sciences, depuis la fondation de l'Institut en l'an IV jusqu'à l'année 1835, où a été inaugurée la publication des *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*. Le recueil des procès-verbaux en est aujourd'hui à son septième Volume qui va jusqu'en 1824. Les historiens de l'avenir y trouveront les textes les plus précieux pour une époque où l'Académie comptait des hommes tels que Lagrange, Laplace, Monge, Cuvier, Lamarck, pour ne citer que quelques noms.

*
* *

Au milieu de tant de travaux et d'occupations variées, Darboux a encore voulu donner une part de son temps à des œuvres plus discrètes qui demandaient un véritable dévouement. Il a présidé pendant dix-sept ans la Société des Amis des Sciences. Celle-ci, fondée en 1857 par le baron Thénard, a un but singulièrement élevé : c'est une Société de secours, mais où les titres à invoquer sont des services rendus aux sciences pures et appliquées, à l'industrie et à l'agriculture. Darboux a beaucoup contribué à son développement ; il rêvait d'une grande œuvre de solidarité scientifique, où ceux, et ils sont légion, qui profitent des progrès et des

découvertes de la Science, viendraient tous en aide aux chercheurs uniquement préoccupés de leurs travaux, insouciants de l'avenir pour eux et pour ceux qui les entourent. Ses appels émus ont été souvent entendus, moins cependant qu'il ne l'aurait voulu. En travaillant de toute son énergie à secourir de nobles et quelquefois glorieuses infortunes, Darboux a montré que le cœur chez lui était à la hauteur de l'intelligence.

Les fatigues de l'âge et les souffrances d'une maladie qui le minait depuis quelques années ne ralentissaient pas l'activité intellectuelle de Darboux; sa belle intelligence garda jusqu'à la fin toute sa vivacité. L'année dernière, il avait fait son cours à la Sorbonne sur les principes de la Géométrie analytique, et il l'avait complètement rédigé. Ce livre, qui va paraître, sera le dernier sorti de sa plume. Son but essentiel est de préciser la place que doivent prendre en Géométrie les notions relatives à l'imaginaire et à l'infini; c'est un Ouvrage d'enseignement, mais où se reconnaît le maître ouvrier. Darboux avait encore d'autres plans de travaux. Il voulait écrire un livre sur le problème célèbre qui a donné naissance à la Géométrie infinitésimale, celui des cartes géographiques; tout à la fois, l'élégance et l'importance pratique de ce problème le séduisaient, et il en avait fait autrefois une étude approfondie dans son enseignement.

Nous espérions revoir bientôt Darboux parmi nous et profiter encore de ses conseils et de son expérience. L'opération, qu'il avait différée d'année en année, lui fut fatale, et le 23 février l'illustre savant s'éteignait presque subitement. Il disparaît après avoir dignement rempli sa tâche. Son œuvre, d'une rare perfection, préservera son nom de l'oubli.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

MONTESSUS DE BALLORE (R. DE). — LEÇONS SUR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES EN VUE DE LEURS APPLICATIONS. *Cours libre professé à la Faculté des Sciences de Paris.* 1 vol. gr. in-8, x-268 pages et 23 figures. Paris, Gauthier-Villars, 1917.

Les fonctions elliptiques sont parfaitement connues; leur introduction dans l'enseignement pourra probablement être toujours présentée sous des aspects ondoyants et divers. La tentative de M. de Montessus semble marquée d'une idée fort nette, celle de faire surtout intervenir l'Algèbre.

Le Livre débute par l'intégrale de première espèce; on reconnaît, par des transformations très élémentaires, l'existence d'une période réelle pour la fonction inverse. Une imaginarisation de la variable établit un fait analogue pour la fonction à argument imaginaire. On a ainsi, par exemple, $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{sn} iv$. Une brève intégration de l'équation d'Euler conduit à la formule d'addition qui permet de former $\operatorname{sn}(u + iv)$; la fonction sn est ainsi complètement définie et la double périodicité apparaît. Sans doute il y a là matière à postuler l'analyticité de fonctions... analytiques. Je ne suis pas de ceux qui pourraient y voir des inconvénients. Je crois aussi que cet appel primordial à l'équation d'Euler pourrait être largement défendu au point de vue historique.

L'auteur se préoccupe ensuite de réduire les intégrales elliptiques aux formes normales, de développer en série l'intégrale de première espèce de la théorie du pendule et l'intégrale de seconde espèce qui se rencontre dans la rectification de l'ellipse. Cette dernière donne une fonction $\operatorname{el} u$ qui n'est pas elliptique, mais admet cependant des formules d'addition en relation simple avec sn. L'intégrale de troisième espèce

$$\mathrm{I} = \int \frac{dx}{(x^2 - c)\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}},$$

par développement de $(x^2 - c)^{-1}$, se trouve représentée par des séries entières en c, dont les coefficients sont des intégrales J_{2n}

ou I_{2n} à réduction algébrique simple. On peut alors concevoir les calculs numériques usuels pour lesquels des tables abrégées ont été formées. Une simplification, importante quant aux calculs numériques, s'introduit ici ; elle est constituée par la transformation de Landen qui, au premier aspect, fait connaître le rapport de deux intégrales elliptiques de même forme, mais de modules k différents. Cette transformation peut s'étudier géométriquement de manière fort élégante, comme une correspondance entre angles dont l'un est inscrit dans un demi-cercle dont le diamètre porte le sommet de l'autre.

Comme l'indique M. de Montessus, ce passage est inspiré de J. Bertrand ; il termine une Première Partie qui livre au lecteur les fonctions les plus usuelles de Jacobi dans une forme éminemment réduite et pratique.

La Seconde Partie de l'Ouvrage a pour but de passer des fonctions de Jacobi aux fonctions de Weierstrass. Des changements de variables simples, au moins quant à leur principe, permettent de passer des intégrales canoniques, avec radicaux portant sur des polynomes du quatrième degré, à d'autres où les radicaux ne recouvrent plus que des polynomes du troisième. Ces derniers ayant la forme $4x^3 - g_2 x - g_3$, il importe de distinguer les cas où le discriminant $\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2$ est positif ou négatif. Certaines transformations qui ont un sens bien net dans l'un de ces cas tendent, à strictement parler, à n'en pas avoir dans l'autre. La confiance en l'analyticité m'empêche encore d'être bien méfiant à cet égard, mais l'esprit de symétrie trouve son compte dans une double étude telle que celle faite ici pour la formule d'addition de pu, laquelle est déduite de $\mathrm{sn}(u+v)$ quand $\Delta > 0$, de $\mathrm{cn}\,(u+v)$ quand $\Delta < 0$. Une dualité de raisonnement tout à fait analogue se rencontre dans l'étude des périodes de pu.

Pour pu et les fonctions ζu, σu qui s'en déduisent par intégration, l'étude des arguments u (réel), iv, $u + iv$ a, entre autres avantages, celui d'inciter à dégager les fonctions harmoniques en u, v qui correspondent au cas de l'argument complexe.

Dans une Troisième Partie les propriétés des fonctions elliptiques sont rapidement déduites de la théorie des fonctions, et cela de deux manières. On peut, comme dans l'Ouvrage de P. Appell et E. Lacour, s'appuyer sur les propriétés générales des

fonctions méromorphes et obtenir ainsi, sans intégrations explicites, des séries de fractions rationnelles où il y a généralement quelque coefficient indéterminé mais facile à préciser pour une valeur particulière de l'argument. On peut aussi, comme dans le *Cours d'Analyse* de M. C. Jordan, étudier les déterminations de l'intégrale elliptique au moyen de lacets. C'est vraisemblablement une question dépourvue de sens que de demander quelle est la méthode la meilleure des deux. La première paraît *maintenant* plus abordable. La seconde garde des avantages visuels; elle fait paraître tout naturel le cas où les lacets entourent trois points critiques de position absolument quelconque dans le champ complexe. Alors g_2, g_3 sont aussi absolument quelconques. M. de Montessus a comparé les deux expositions possibles en les mettant côte à côte. Et, après avoir généralisé complètement la fonction pu, il a pu revenir brièvement à la généralisation du module dans sn, cn, dn. La marche ainsi suivie paraît grandement originale.

Une Quatrième et dernière Partie a trait aux fonctions θ. M. de Montessus essaie de mettre en évidence leurs propriétés les plus simples en évitant, autant que possible, de les noyer dans la complexité des notations. Il s'appuie notamment sur les fonctions $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ possédant les propriétés

$$\mathfrak{F}(qz, q) = -q^{-1}z^{-2}\mathfrak{F}(z, q), \qquad \mathfrak{F}_1(qz, q) = q^{-1}z^{-2}\mathfrak{F}_1(z, q),$$
$$\mathfrak{F}_2(qz, q) = q^{-1}z^{-2}\mathfrak{F}_2(z, q), \qquad \mathfrak{F}_3(qz, q) = -q^{-1}z^{-2}\mathfrak{F}_3(z, q),$$

et en outre la parité en z pour $\mathfrak{F}_2$ et $\mathfrak{F}_3$, l'imparité pour $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}_1$.

Alors rien de plus simple que de trouver des séries entières représentant ces fonctions; les complications d'écriture sont certainement réduites au minimum. En supposant ensuite à z et q les logarithmes respectifs πiv et $\pi i\tau$, on retrouve les séries habituelles pour θ, θ_1, θ_2, θ_3, ces dernières fonctions ne différant essentiellement que par des facteurs exponentiels des quatre autres fonctions $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$. Le faisceau est très élégamment serré et aboutit, avec une parfaite symétrie, à la construction de sn, cn, dn. Enfin il reste à dire comment on peut profiter de toutes ces dernières ressources au point de vue du calcul, ce qui est montré dans trois chapitres terminaux où l'on pourrait relever de nombreuses et remarquables identités numériques. L'Auteur a refait ici de difficiles calculs, perdus, dans l'immense Traité

d'Halphen, parmi d'autres moins importants. Et je crois qu'en finissant de parcourir cette nouvelle œuvre, c'est surtout l'apologie de son esprit de génération algébrique qui s'impose avant tout. Les Traités français, écrits spécialement sur les fonctions elliptiques avec un impérieux souci de brièveté, ne sont pas nombreux. Il n'y a plus à faire d'éloges de celui de MM. Appell et Lacour; celui de Lucien Lévy en mérite toujours beaucoup, surtout parce qu'il n'a peut-être pas été apprécié, du vivant de son auteur, autant qu'il aurait convenu. M. de Montessus s'est inspiré de l'esprit de concision de ces derniers pour faire habilement passer, dans un domaine pratique élémentaire, des résultats que le néophyte pourra toujours vérifier et démontrer par le calcul.

A. Buhl (Toulouse).

BOUTROUX (Pierre). — Les principes de l'Analyse mathématique. *Exposé historique et critique*. Tome I. 1 vol. gr. in-8, IX-547 pages. Paris, Hermann et Fils, 1914.

L'important Ouvrage de M. Pierre Boutroux, dont le Tome I est paru, mérite une place à part parmi les Traités généraux dont disposent aujourd'hui les étudiants en Mathématiques. Ce ne sont, en effet, ni le point de vue strictement utilitaire, ni la perfection d'un système logique ou l'élégance des démonstrations qui préoccupent ici l'éminent professeur de la Faculté de Poitiers. Le Livre présente au lecteur les faits et les êtres mathématiques dans leur réalité objective, et lui montre la beauté et la valeur spéculative de ces notions considérées en elles-mêmes. Nous apprenons ainsi à voir, dans les êtres mathématiques, non plus des constructions arbitraires de l'esprit, jouissant, de par leur définition, de propriétés plus ou moins curieuses, mais bien des êtres qui nous sont extérieurs, qu'il nous est donné de contempler, et dont la nature ne saurait en aucune façon dépendre des considérations souvent détournées par lesquelles on découvre leurs propriétés.

L'Ouvrage est divisé en deux parties : dans une Première Partie, *Constatation des faits*, l'Auteur expose les plus immédiates des notions mathématiques, relatives aux nombres, aux

grandeurs, aux figures géométriques. Ce sont d'abord les nombres entiers et leurs remarquables propriétés que nous montre M. Boutroux : science parfaite par excellence, l'Arithmétique avait droit à la première place dans un exposé purement spéculatif de l'Analyse. De nombreuses notices historiques nous retracent l'évolution de la Science et nous rappellent à tout instant les méditations de ces savants antiques qui fondèrent la science des nombres. Après avoir passé en revue quelques-uns des plus intéresssants problèmes de l'Arithmétique, M. Boutroux passe à l'étude des grandeurs géométriques, qui en est le prolongement immédiat. Comme les nombres, les grandeurs sont étudiées objectivement : la science des grandeurs est alors parfaite en soi, comme l'Arithmétique des Pythagoriciens. Enfin, après avoir défini rigoureusement les nombres irrationnels, étudié les séries arithmétiques convergentes et les grandeurs trigonométriques, M. Boutroux passe à l'étude de la Géométrie.

Une partie importante de l'Ouvrage, surtout à cause des idées philosophiques qui y sont abondamment développées, est consacrée à la Géométrie. Etant donné le point de vue purement spéculatif auquel se place M. Boutroux, toutes les propositions sont également primitives et évidentes en Géométrie : il ne s'agit donc pas, tout d'abord, d'étudier le système logique qui servira à bâtir une Géométrie rationnelle, mais simplement d'étudier les propriétés des figures en elles-mêmes. Ces figures ne se trouvant pas dans le monde matériel où nous vivons, seront des êtres idéaux, préexistant, comme les nombres, à toute démonstration. Les propriétés des figures géométriques résultent alors de la seule considération de ces figures : il n'y a, ainsi que le fait remarquer M. Boutroux, « qu'à détailler ce que l'on en voit, dans l'ordre qui paraît le plus simple et le plus clair ».

M. Boutroux rappelle donc, sans avoir à rétablir toute la suite des démonstrations, les plus remarquables propriétés des figures simples, en faisant tout d'abord abstraction de leur grandeur (géométrie de forme). Ici encore, des aperçus historiques nombreux guident le lecteur dans l'histoire de la Science, et des notes lui permettent d'avoir recours aux textes originaux, ou éclairent les détails mêmes de l'Ouvrage.

Dans un Chapitre suggestif, M. Boutroux aborde l'étude,

jusqu'ici laissée de côté, du procédé par lequel, au moyen des démonstrations, on construit la Géométrie rationnelle, et justifie en même temps la méthode suivie dans le Chapitre précédent; puisque l'ordre des théorèmes et la suite des propositions sont introduits après coup, le choix des postulats et axiomes est, au moins sous certaines réserves, arbitraire : de l'édifice bâti, peu importe donc le mode de construction, puisque les faits seuls sont immuables.

Enfin, la construction géométrique, considérée comme condition d'existence de certaines figures géométriques ou de certaines propositions, l'étude des lieux géométriques, puis le calcul combinatoire terminent la Première Partie de l'Ouvrage.

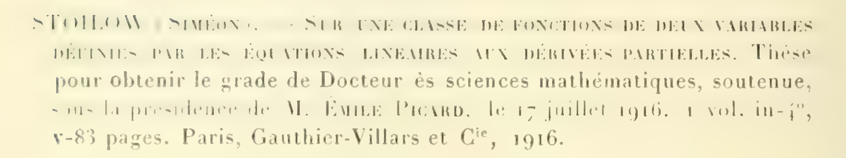
La Deuxième Partie, *Construction*, débute par un exposé, historique et systématique, de l'Algèbre. Ce ne sont plus ici des êtres mathématiques que M. Boutroux étudie objectivement, comme en Arithmétique ou en Géométrie, mais l'Algèbre elle-même est étudiée en soi, en tant que technique du calcul. Après avoir démonté sous nos yeux les rouages de la machine algébrique, et exposé en un historique clair et suggestif l'origine de l'Algèbre, M. Boutroux nous fait fonctionner — si je puis m'exprimer ainsi — la machine que l'on vient de construire : l'étude des équations, puis celle des fonctions, des dérivées et enfin des équations différentielles, aux dérivées partielles, et des équations fonctionnelles, font l'objet du Chapitre suivant.

Un dernier Chapitre, où, après un historique intéressant qui nous montre la naissance de la représentation graphique, est consacré à cette représentation, à l'étude des méthodes graphiques et des méthodes d'approximation,

L'Ouvrage représente en définitive une exposition philosophique aussi claire que possible des éléments de l'Analyse mathématique; il nous fait assister à la découverte de toutes ces propriétés merveilleuses des êtres mathématiques, et nous les montre dégagées de tout artifice et de tout échafaudage constructif, dont l'importance, purement logique et formelle, n'est pas toujours en rapport avec les longs développements que les nécessités de la démonstration obligent à leur donner. L'étudiant y pourra trouver, sur une foule de points, ces vues philosophiques qui engagent à la méditation et procurent les plus pures jouissances

intellectuelles; il y trouvera aussi, pour l'étude même des mathématiques, des renseignements précis, nombreux et variés, et nous souhaitons que ce Livre, dont la conception est véritablement nouvelle et originale, rencontre auprès du public mathématique l'accueil qu'il mérite.

PIERRE DROUIN.



STOÏLOW (SIMÉON). — SUR UNE CLASSE DE FONCTIONS DE DEUX VARIABLES DÉFINIES PAR LES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES. Thèse pour obtenir le grade de Docteur ès sciences mathématiques, soutenue, sous la présidence de M. ÉMILE PICARD, le 17 juillet 1916. 1 vol. in-4°, v-83 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1916.

La Thèse de M. Stoïlow est consacrée à l'étude des équations linéaires aux dérivées partielles à deux variables indépendantes d'ordre n. L'Auteur se propose surtout de rechercher dans certains cas particuliers la forme analytique d'intégrales déterminées par des données dont les singularités sont d'une nature simple.

On sait que les multiplicités singulières des équations linéaires aux dérivées partielles sont de deux espèces : singularités fixes que l'on peut déterminer à l'avance, puis singularités mobiles qui sont des caractéristiques. La nature des singularités mobiles dépend évidemment de la nature des singularités des données. Elle ne pourra donc être étudiée que pour les intégrales déterminées avec des données dont on connaît la forme analytique.

M. Stoïlow, utilisant dans toute cette étude la méthode des approximations successives de M. Picard, généralise d'abord un résultat de M. Goursat qui était lui-même une extension du théorème fondamental d'existence de Cauchy. Il considère le cas d'une caractéristique d'ordre k avec $n-k$ données, et k autres données sur une autre courbe.

Il établit ensuite un théorème d'existence concernant les intégrales non holomorphes possédant des singularités logarithmiques. Parmi les données il y en a $n-k$, qui sont holomorphes dans une certaine région sur une caractéristique; les k autres données sont relatives à une autre courbe dans une région assez petite par rapport à la première, et elles sont représentées par

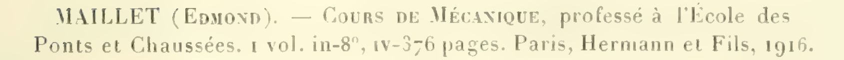
des expressions logarithmiques

$$\sum_{i=1}^{m} A_i(x)\log(x-a_i)+B(x),$$

les A_i étant holomorphes et $B(x)$ étant uniforme avec les singularités a_i. Cette classe d'intégrales constitue la classe la plus simple d'intégrales d'une equation linéaire, après les intégrales holomorphes répondant au théorème de Cauchy; car, d'après M. Le Roux, il n'y a pas en général d'intégrales uniformes autour d'une singularité mobile. Dans cet ordre d'idées, les équations dont toutes les caractéristiques se confondent méritent une mention spéciale. M. Stoïlow fait ensuite diverses applications des résultats précédents aux équations dont les caractéristiques sont des familles de droites et dont les coefficients n'ont pas de singularités. Il termine par la considération des intégrales quadruplement périodiques uniformes des équations à coefficients constants. Les fonctions quadruplement périodiques ainsi trouvées sout d'une nature très spéciale.

La Thèse de M. Stoïlow est d'un réel intérêt et témoigne de connaissances étendues dans la théorie des fonctions et dans la théorie des équations différentielles.

La R.


MAILLET (Edmond). — Cours de Mécanique, professé à l'École des Ponts et Chaussées. 1 vol. in-8°, IV-376 pages. Paris, Hermann et Fils, 1916.

Il est toujours intéressant de lire un Livre écrit par quelqu'un qui a eu bien des occasions d'utiliser les théories qu'il expose. En Mécanique surtout, l'expérience et la pratique sont une grande chose. Exposée par un ingénieur elle doit avoir un sens plus concret, plus tangible, plus utilitaire qu'enseignée par un théoricien pour qui elle reste, malgré tout, un vaste domaine d'applications de l'Analyse mathématique.

La qualité de l'Auteur, la notoriété que lui ont value ses travaux de Mathématiques pures sont de sûrs garants de l'intérêt de l'Ouvrage. C'est un cours de Mécanique professé dans une de nos

grandes Écoles. Par suite il s'adresse, plus spécialement, à une catégorie d'élèves bien déterminée par les connaissances antérieures supposées connues et par le but qu'elle cherche à atteindre. Cependant le Livre de M. Maillet est d'un esprit et d'une conception plus larges. Il suppose chez le Lecteur des notions succinctes, mais fondamentales, d'Analyse et certaines connaissances de Mécanique sur lesquelles l'Auteur ne reviendra pas : par exemple l'équilibre du corps solide libre ou gêné. Il renferme la partie la plus importante des matières enseignées sur la Mécanique soit à l'École Polytechnique, soit dans les chaires des Facultés; celle qui est la plus immédiatement utile à l'ingénieur et d'une façon générale à ceux qui veulent acquérir une instruction technique assez étendue et assez élevée. Ainsi l'auteur expose la Cinématique théorique, insistant spécialement sur les mouvements simultanés et relatifs, la Statique et la Dynamique pures. Étant donné le but essentiellement utilitaire que poursuit l'Auteur, il a été amené à séparer son cours en deux parties nettement distinctes : la Mécanique pure ou rationnelle, la Mécanique appliquée. La tendance actuelle, l'idée juste, il faut le dire, qu'un cours de Mécanique doit développer chez ceux qui le suivent le sentiment des réalités portent à augmenter le plus possible le côté technique. L'Auteur a su trouver entre ces deux parties de la Mécanique un équilibre satisfaisant. Il n'a pas élargi la part de l'une au détriment de l'autre. Il a compris qu'il y aurait d'ailleurs plus d'inconvénients que d'avantages à développer outre mesure la partie technique et que dans un enseignement il faut s'en tenir aux méthodes générales en écartant avec soin les détails trop circonstanciés dépourvus de valeur éducative.

Les deux parties de l'Ouvrage se complètent l'une l'autre, la Mécanique appliquée contenant les applications directes de la Mécanique pure. C'est ainsi que le Lecteur y trouvera des notions très suffisantes et précises de Statique graphique : l'étude des systèmes articulés par les procédés classiques de Culmann et de Ritter, l'application de la méthode des nœuds à la poutre Warren ou à la ferme Polonceau, les systèmes assimilés en pratique aux systèmes articulés. L'Auteur y a exposé aussi l'étude des forces intérieures dans un milieu matériel, les tensions et les déformations en un point d'un milieu continu, les notions sur l'élasticité

des corps solides, les principes de la Mécanique des fluides et tout particulièrement le théorème de Bernoulli et ses importantes applications. Le développement de toutes ces théories est succinct mais clair, précis, très suffisant pour la compréhension. L'Auteur les complète toujours par des exercices traités ou indiqués et par une bibliographie très précise des Mémoires originaux où l'on peut se référer. On voit par là que cette partie de Mécanique appliquée a pour but d'initier le Lecteur aux idées et aux méthodes qui doivent lui servir pour l'étude des cours plus spéciaux relatifs à la Résistance des matériaux et à l'Hydraulique, sans cependant empiéter sur eux, mais de manière qu'en les commençant il puisse les considérer comme une suite naturelle du cours de M. Maillet. L'Auteur a longuement insisté sur la Cinématique appliquée à l'étude des mécanismes. Il les classe d'après la répartition de Willis en trois grandes classes : mécanismes où le sens de la transmission est constant, ainsi que le rapport des vitesses, mécanismes où le sens seul de la transmission est constant, mécanismes où le sens de la transmission et le rapport des vitesses sont variables. Chaque classe se divise en trois genres suivant que la transmision se fait par contact, par liens rigides ou flexibles. Il étudie le schéma de ces différents mécanismes, montrant les théories qui leurs servent de base et comment on les utilise dans la pratique, donnant des applications immédiates. C'est ainsi qu'il est amené à s'occuper des roues dentées, de la méthode graphique de tracé des dents, des trains épicycloïdaux et des différentiels d'automobile.

Mais l'Auteur n'a pas négligé pour cela la partie de Mécanique pure. Il a voulu que le Lecteur puisse se pénétrer des principes et de la méthode de cette science. Il en a montré le caractère mathématique et comment, de l'étude expérimentale des mouvements les plus simples, on déduit par induction un petit nombre de principes fondamentaux. On en déduit les conséquences absolument comme en Géométrie les propriétés de l'espace découlent de quelques axiomes. Mais ces principes ne possèdent pas le caractère intuitif des postulats de la Géométrie. Pour les justifier il faut un accord constant entre leurs conséquences et l'observation.

Il traite du point matériel libre; insiste dès le début sur les

téorèmes généraux, quantités de mouvement, force vive, moments cinétiques. Il étudie le mouvement du point matériel lié, aborde celui des systèmes de points libres, le corps solide et enfin les systèmes soumis à des liaisons, le principe des vitesses virtuelles et le théorème de d'Alembert. L'Auteur a simplifié autant que possible l'exposition, n'y laissant que ce qui était essentiel, ou la ramenant, par exemple dans l'étude du mouvement d'un point à la surface de la terre, aux seuls éléments utiles dans les applications. Bien souvent, comme en Mécanique appliquée, il l'a annotée par des exercices numériques qui permettent au Lecteur de la développer complètement. Dans son exposé l'Auteur a suivi l'ordre et les méthodes classiques. La partie mathématique est sobre et il a eu souvent recours aux considérations géométriques. En Cinématique tout particulièrement, il a employé d'une façon systématique la géométrie des infiniment petits. L'Auteur indique à ce sujet un théorème pratique et dont il esquisse une démonstration. Ce procédé est certainement plus rapide que la voie analytique, mais il demande, pour être employé avec sûreté, une plus grande habitude.

L'Auteur n'a pas voulu que le caractère mathématique que présentent les théories mécaniques puisse faire illusion sur leur valeur pratique. Ces théories sont obtenues en substituant conventionnellement aux corps naturels des corps fictifs qui en diffèrent plus ou moins, et il faut savoir jusqu'à quel point cette substitution est légitime. C'est dans les applications qu'on doit manier avec précaution les théories générales de la Mécanique. Dans les problèmes qui se posent, il faut négliger tout ce qui est réellement négligeable, et cette élimination demande un tact spécial. Je crois que ceux qui se seront bien pénétrés du livre de M. Maillet auront acquis une certaine expérience et pris confiance en eux. Ce qui ne les empêchera pas, après avoir obtenu la solution d'un problème ainsi simplifié, de soumettre les résultats trouvés au contrôle de l'expérience.

Ed. Olivet.

CARSLAW (H. S.). — THE ELEMENTS OF NON EUCLIDEAN PLANE GEOMETRY AND TRIGONOMETRY (Longmans modern mathematical series). 1 vol in-12, XII-179 pages. London, Longmans, Green and Co, 1916.

Ce petit Ouvrage est destiné aux maitres de mathématiques de l'enseignement moyen des pays de langue anglaise; son but est de montrer le rôle joué par les hypothèses sur lesquelles est basée la Géométrie euclidienne et plus particulièrement par le postulat relatif aux parallèles.

L'Auteur débute par un exposé des travaux de Saccheri, Legendre, Gauss, Bolyai, Lobatschefski et Riemann. Il expose ensuite successivement les premiers éléments de la Géométrie et de la Trigonométrie lobatschefskiennes et de la Géométrie riemannienne. Un dernier Chapitre traite des Géométries non euclidiennes que Poincaré construisit lors de ses recherches sur les groupes fuchsiens. M. Carslaw montre que la géométrie des cercles passant par un point fixe est euclidienne, que celle des cercles orthogonaux à un cercle donné est lobatchefskienne et enfin que la géométrie des cercles rencontrant un cercle donné en deux points diamétralement opposés est riemannienne.

La construction de pareilles géométries démontre l'indépendance du postulat des parallèles et rend superflus des développements systématiques des Géométries lobatschefskienne et riemannienne.

Dans les chapitres où il traite de ces géométries, M. Carslaw est entré dans suffisamment de développements pour donner une idée précise de la question, et nous croyons que le petit Volume qu'il vient de publier rendra de grands services aux professeurs auxquels il s'adresse.

LUCIEN GODEAUX.

MÉLANGES.

RECHERCHES SUR LES MOUVEMENTS PLANS A DEUX PARAMÈTRES;

PAR M. G. KŒNIGS,
Directeur du Laboratoire de Mécanique
de la Faculté des Sciences de Paris.

A la suite d'une Note de M. Farid Boulad publiée dans le *Bulletin*, M. G. Darboux en a publié une autre pour expliquer par les mouvements à deux paramètres les résultats obtenus par M. Farid Boulad (1).

Ces Notes m'ont fait souvenir qu'à l'époque où mon enseignement à la Faculté des Sciences portait sur la Cinématique, je m'étais occupé de ces mouvements. En me reportant à mes Notes, j'ai été amené à les compléter et c'est le résultat de ce remaniement que je publie ici. J'ai été quelque peu détourné de ma tâche par les soins d'un autre ordre de mon Laboratoire : ils m'ont empêché de développer ce sujet autant que je l'eusse désiré.

Ce qui ressort de ce travail (2), c'est la distribution en deux classes des mouvements plans à deux paramètres. Les uns constituent le type général et les autres, que j'appelle *exceptionnels*, sont caractérisés par ce fait que toutes les translations qu'ils contiennent sont rectilignes.

On verra que les propriétés du second ordre sont essentiellement différentes pour ces mouvements exceptionnels de celles des mouvements généraux.

(1) Farid Boulad, *Sur la détermination du centre de courbure des trajectoires orthogonales d'une famille quelconque de courbes planes* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XL, p. 292). — G. Darboux, *Remarques sur la Note de M. Farid Boulad* (*Ibid.*, p. [illegible]).

(2) Les résultats essentiels de ce travail ont été présentés à l'Académie des Sciences et figurent aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 163, p. [illegible].

I. — Préliminaires.

1. La position d'un plan Π par rapport à un autre Π_1 auquel il se trouve superposé dépend, comme on sait, de trois paramètres.

Ce seront, par exemple, les coordonnées a_1, b_1 d'un point A du plan Π par rapport à deux axes A_1X_1, A_1Y_1 rectangulaires, solidaires du plan Π_1 et l'angle θ que fait avec A_1X_1 un axe AX solidaire du plan Π.

Si l'on prend un second axe AY faisant avec AX un angle droit, les coordonnées d'un point M étant x, y par rapport aux axes AX, AY ses coordonnées x_1, y_1 par rapport aux axes A_1X_1, A_1Y_1 seront :

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = a_1 + x\cos\theta - y\sin\theta, \\ y_1 = b_1 + x\sin\theta + y\cos\theta. \end{cases}$$

Résolues par rapport à x, y ces équations donneront

$$(2)\qquad \begin{cases} x = a + x_1\cos\theta + y_1\sin\theta, \\ y = b - x_1\sin\theta + y_1\cos\theta, \end{cases}$$

en posant

$$(3)\qquad \begin{cases} a = -a_1\cos\theta - b_1\sin\theta, \\ b = a_1\sin\theta - b_1\cos\theta. \end{cases}$$

Si l'on assujettit les positions relatives des deux plans Π et Π_1 à une condition se traduisant par une équation entre a_1, b_1, θ, deux paramètres seulement restent indépendants dans les positions relatives des deux plans ; l'ensemble de ces positions est doublement indéterminé et c'est ce que l'on exprime en disant que le plan Π possède le degré 2 de *liberté* par rapport au plan Π_1, ou qu'il réalise un *mouvement à deux paramètres* par rapport au plan Π_1.

Nous représenterons par $\mathfrak{M}^2$ un pareil mouvement.

2. C'est un mouvement de ce genre que l'on rencontrerait si la la condition imposée était que l'angle θ fût constant.

Le mouvement à deux paramètres ainsi défini est la translation à deux paramètres $\mathfrak{T}^2$, car a_1, b_1 sont alors arbitraires et indépendants.

3. Mais, ce cas étant mis de côté, θ sera variable d'une position du plan Π à une autre dans le système $\mathfrak{M}^2$; on pourra dès lors prendre comme paramètres de position dans le $\mathfrak{M}^2$ donné, outre l'angle θ, un second paramètre u que l'on restera libre de choisir ultérieurement.

Ainsi, dans les formules (1), (2), (3), a, b, a_1, b_1 seront des fonctions de u et de θ, en sorte qu'en différentiant totalement les équations (2) par exemple, il viendra :

$$dx = \frac{\partial a}{\partial \theta}\, d\theta + \frac{\partial a}{\partial u}\, du = (-x_1 \sin\theta - y_1 \cos\theta)\, d\theta + dx_1 \cos\theta - dy_1 \sin\theta,$$

$$dy = \frac{\partial b}{\partial \theta}\, d\theta + \frac{\partial b}{\partial u}\, du = (-x_1 \cos\theta - y_1 \sin\theta)\, d\theta - dx_1 \sin\theta - dy_1 \cos\theta.$$

On remarquera que les expressions

$$\mathrm{D}x = \quad dx_1 \cos\theta - dy_1 \sin\theta,$$
$$\mathrm{D}y = - dx_1 \sin\theta - dy_1 \cos\theta$$

sont les projections sur les axes mobiles AX, AY du déplacement du point M dans le plan Π_1. Nous aurons d'après cela, en remplaçant, formules (2), $-x_1 \sin\theta - y_1 \cos\theta$ par $y - b$ et $x_1 \cos\theta - y_1 \sin\theta$ par $x - a$,

$$\mathrm{D}x = -\left(\frac{\partial a}{\partial \theta} - b\right) d\theta - \frac{\partial a}{\partial u}\, du - y\, d\theta + dx,$$

$$\mathrm{D}y = -\left(\frac{\partial b}{\partial \theta} + a\right) d\theta - \frac{\partial b}{\partial u}\, du - x\, d\theta + dy;$$

en posant alors

$$(4)\qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial a}{\partial \theta} + b = \xi, & -\dfrac{\partial b}{\partial \theta} - a = \eta, \\[2ex] -\dfrac{\partial a}{\partial u} = \xi_1, & -\dfrac{\partial b}{\partial u} = \eta_1, \end{cases}$$

nous trouvons

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathrm{D}x = \xi\, d\theta + \xi_1\, du - y\, d\theta + dx, \\ \mathrm{D}y = \eta\, d\theta + \eta_1\, du - x\, d\theta + dy. \end{cases}$$

Si, en particulier, le point M est solidaire du plan Π, x, y sont constants ; dx, dy sont nuls et $\mathrm{D}x$, $\mathrm{D}y$, réduits aux projections du déplacement d'entraînement du point M, ont pour expression

$$(5\ bis)\qquad \begin{cases} \mathrm{D}x = \xi\, d\theta + \xi_1\, du - y\, d\theta, \\ \mathrm{D}y = \eta\, d\theta + \eta_1\, du - x\, d\theta. \end{cases}$$

4. Mais si, au contraire, le point M est fixe dans le plan Π_1, x_1, y_1 sont constants, Dx, Dy sont nuls. Ceci nous prouve donc que les valeurs de x, y fournies par les équations (2), où x_1, y_1 représentent deux constantes arbitraires, doivent vérifier le système d'équations aux différentielles totales

$$(6)\qquad \begin{cases} \xi\,d\theta + \xi_1\,du - y\,d\theta + dx = 0, \\ \eta\,d\theta + \eta_1\,du + x\,d\theta + dy = 0, \end{cases}$$

lesquelles sont équivalentes au système suivant :

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial\theta} = -\xi + y, & \dfrac{\partial y}{\partial\theta} = -\eta - x, \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} = -\xi_1, & \dfrac{\partial y}{\partial u} = -\eta_1. \end{cases}$$

Si l'on exprime alors la compatibilité de ces équations en écrivant que

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial\theta} = \frac{\partial^2 x}{\partial\theta\,\partial u}, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial\theta} = \frac{\partial^2 y}{\partial\theta\,\partial u},$$

on parvient sans peine au système suivant d'équations, dites conditions *d'intégrabilité* (1) :

$$(8)\qquad \frac{\partial\xi}{\partial u} = \frac{\partial\xi_1}{\partial\theta} - \eta_1, \qquad \frac{\partial\eta}{\partial u} = \frac{\partial\eta_1}{\partial\theta} + \xi_1.$$

On ne manquera pas de remarquer que les équations (4) expriment que a, b sont un système *particulier* de solutions des équations (7).

5. Que l'on impose une nouvelle condition aux positions du plan Π par rapport au plan Π_1, condition se traduisant par une nouvelle équation, on obtient un ensemble $\mathfrak{M}^1$ de positions contenu dans le mouvement $\mathfrak{M}^2$ donné ; l'ensemble $\mathfrak{M}^1$ ne dépend que d'un paramètre : c'est un mouvement à un paramètre contenu dans le mouvement $\mathfrak{M}^2$.

Soit $\mathfrak{P}$ une position particulière de Π prise d'ailleurs dans l'ensemble $\mathfrak{M}^2$ et qui correspond à un système de valeurs θ, u des

(1) *Voir* G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. I, 1re édition, p. 66 et t. I, 2e édition, p. 84 ; et G. KŒNIGS, *Leçons de Cinématique*, p. 230.

deux paramètres. Il y a une infinité de mouvements $\mathfrak{M}^1$ contenus dans $\mathfrak{M}^2$ et qui comprennent la position $\mathfrak{P}$. Nous dirons de tous ces mouvements qu'ils ont lieu à partir de la position $\mathfrak{P}$.

Par exemple, si nous laissons à θ la valeur constante qu'il a dans la position $\mathfrak{P}$, nous obtenons une translation $\mathfrak{T}^1$, à un paramètre, à partir de la position $\mathfrak{P}$, translation contenue dans le $\mathfrak{M}^2$ donné.

On reconnaît sur les équations (5 *bis*) que $\xi_1\,du$, $\eta_1\,du$ sont les valeurs auxquelles se réduisent Dx, Dy dans ce cas.

En conséquence ξ_1, η_1 sont des paramètres directeurs de la translation $\mathfrak{T}^1$.

Mais, si l'on met à part cette translation, pour tout autre $\mathfrak{M}^1$, u est fonction de θ et l'on peut alors parler des dérivées u', u'' de u par rapport à θ.

II. — La droite des centres instantanés.

6. Considérons un $\mathfrak{M}^1$ contenu dans le $\mathfrak{M}^2$ donné et qui ait lieu à partir d'une position $\mathfrak{P}$ donnée, correspondant aux valeurs θ, u des paramètres de position. On obtiendra le centre instantané I en annulant Dx, Dy dans les formules (5 *bis*), ce qui donne pour les coordonnées du point I :

$$(9)\qquad \begin{cases} x_1 = -\eta - \eta_1 u', \\ y_1 = \xi + \xi_1 u'. \end{cases}$$

Tous les $\mathfrak{M}^1$ contenus dans $\mathfrak{M}^2$ qui ont lieu à partir de la position $\mathfrak{P}$ et pour lesquels u' est le même ont ainsi le même centre instantané I; ils seront dits *tangents*. Ceux au contraire pour lesquels u' sera différent auront aussi des centres instantanés différents et le lieu de tous les points I qui sont ainsi des centres instantanés dans la position $\mathfrak{P}$ s'obtiendra en éliminant u' entre les équations (9), ce qui donne l'équation

$$(10)\qquad \xi_1 X + \eta_1 Y + \xi_1\eta - \eta_1\xi = 0.$$

Cette droite est perpendiculaire à la direction de la translation $\mathfrak{T}^1$, ce qui concorde avec le fait que toute translation est une rotation infiniment petite autour d'un axe rejeté à l'infini dans une direction perpendiculaire.

Dans les formules (9), u' peut être regardé comme un paramètre fixant la position de I sur la droite d_1 que nous venons de trouver.

En particulier, la translation δ^1 ayant son centre à l'infini dans une direction perpendiculaire, ce centre correspond à la valeur infinie du paramètre u'.

7. Nous désignerons par φ l'angle que fait avec AX une des deux directions, δ_1, de la droite d_1, ce qui nous permettra de poser

$$(11) \qquad \xi_1 = \rho \sin\varphi, \qquad \eta_1 = -\rho\cos\varphi;$$

nous poserons, en même temps,

$$(12) \qquad u = \xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi.$$

L'équation de la droite d_1 s'écrira ainsi :

$$(13) \qquad x\sin\varphi - y\cos\varphi - u = 0.$$

L'angle φ que nous venons d'introduire a, dans ces questions, une grande importance. Il y a, en effet, lieu de distinguer deux cas, selon que l'angle φ est indépendant de θ, ou, plus exactement, ne se réduit pas à une simple fonction de θ et celui où φ est une simple fonction de θ.

Le premier cas est le *cas général*, le second cas est le *cas exceptionnel*.

III. — Forme canonique de la représentation d'un $\mathfrak{M}^2$ dans le cas général.

8. Si φ ne se réduit pas à une fonction de θ, mais dépend de θ et de u, on peut prendre φ pour le second paramètre u. Ce sont les deux variables θ, φ qui jouent dans la question le rôle de variables *canoniques*, en raison de la simplicité qu'elles permettent de donner aux formes analytiques de la représentation. En premier lieu, les conditions d'intégrabilité (8) vont prendre la forme

$$(14) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi}{d\varphi} = \dfrac{\partial\rho}{\partial\theta}\sin\varphi + \rho\cos\varphi, \\[2ex] \dfrac{d\eta}{d\varphi} = -\dfrac{\partial\rho}{\partial\theta}\cos\varphi + \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

Mais en différentiant l'équation (12) par rapport à φ et tenant compte des équations (14), on trouvera

$$(15)\qquad -\xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi = \frac{dn}{d\varphi} - \rho.$$

Or, des équations (12), (15) on tire

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= n\cos\varphi - \left(\frac{dn}{d\varphi} - \rho\right)\sin\varphi,\\ \eta &= n\sin\varphi + \left(\frac{dn}{d\varphi} - \rho\right)\cos\varphi.\end{aligned}\right.$$

Si l'on porte alors ces valeurs de ξ, η et les valeurs (11) de ξ_1, η_1 dans les équations d'intégrabilité (14), elles se réduisent à l'équation unique

$$(17)\qquad \frac{\partial^2 n}{\partial\varphi^2} + n - \frac{d\rho}{d\varphi} + \frac{d\rho}{d\theta} = 0.$$

En résumé, sous le bénéfice de la condition (17), les valeurs de ξ, η, ξ_1, η_1 auront les formes générales suivantes :

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= n\cos\varphi - \left(\frac{dn}{d\varphi} - \rho\right)\sin\varphi,\\ \eta &= n\sin\varphi + \left(\frac{dn}{d\varphi} - \rho\right)\cos\varphi,\\ \xi_1 &= \rho\sin\varphi,\\ \eta_1 &= -\rho\cos\varphi.\end{aligned}\right.$$

9. Faisons d'ores et déjà remarquer qu'il existe sur la droite d_1 quelques points remarquables faciles à définir.

Il y a d'abord le point O qui est la position du centre instantané I dans le mouvement $\mathfrak{M}^1$ au cours duquel la droite d_1 conserve une direction constante dans le plan fixe auquel cas l'angle $\psi = \varphi + \theta$ que fait d_1 avec A_1X_1 est constant, ce qui implique $1 + \varphi' = 0$ ou $\varphi' = -1$ (ici $u' = \varphi'$ puisque φ est le second paramètre u). Les coordonnées x_0, y_0 de ce point O sont donc

$$(19)\qquad x_0 = -\eta + \eta_1, \qquad y_0 = \xi - \xi_1.$$

Il y a, de même, sur d_1 un point O_1 qui est le centre instantané dans le mouvement $\mathfrak{M}^1$ au cours duquel d_1 garde une direction constante dans le plan II, auquel cas φ est constant, ou φ' nul.

Les coordonnées x_{O_1}, y_{O_1} de O_1 seront donc

(20) $$x_{O_1} = -\eta, \qquad y_{O_1} = \xi.$$

D'une façon générale, si λ_M, $\lambda_{M'}$ sont les paramètres de position de deux points M, M′ sur l'axe δ_1, en sorte que

$$x_M = -\eta + \eta_1 \lambda_M, \qquad y_M = \xi + \xi_1 \lambda_M,$$
$$x_{M'} = -\eta + \eta_1 \lambda_{M'}, \qquad y_{M'} = \xi + \xi_1 \lambda_{M'},$$

on aura

$$x_{M'} - x_M = \eta_1(\lambda_{M'} - \lambda_M) = \rho(\lambda_{M'} - \lambda_M)\cos\varphi,$$
$$y_{M'} - y_M = \xi_1(\lambda_{M'} - \lambda_M) = \rho(\lambda_{M'} - \lambda_M)\sin\varphi,$$

ce qui prouve que $\rho(\lambda_{M'} - \lambda_M)$ est la mesure de $\overrightarrow{MM'}$ sur l'axe δ_1:

(21) $$\text{mesure de } \overrightarrow{MM'} \text{ sur } \delta_1 = \rho(\lambda_{M'} - \lambda_M).$$

En particulier,

(22) $$\text{mesure de } \overrightarrow{OO_1} = \rho,$$

(23) $$\text{mesure de } \overrightarrow{OM} = \rho(\lambda_M + 1),$$

(24) $$\text{mesure de } \overrightarrow{OI} = \rho(\varphi' + 1);$$

d'où il résulte que

(25) $$\frac{\overrightarrow{OI}}{\overrightarrow{OO_1}} = \varphi' + 1,$$

et, plus généralement,

(26) $$\frac{\overrightarrow{OM}}{\overrightarrow{OO_1}} = \lambda_M + 1,$$

résultats simples qui fourniront plus loin les interprétations géométriques des résultats de calcul.

(*A suivre.*)

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Burgatti (Pietro). — *Lezioni di Meccanica razionale.* 1 vol. gr. in-8, v-501 pages. Bologna, Nicola Zanichelli, 1914. Lire 18.

Rey Pastor (J.). — *Fundamentos de la Geometria projectiva superior.* Laboratorio y Seminario matemático. Publicationes : Tomo I. (Junta para ampliación de estudios e investigaciones cientificas). 1 vol. gr. in-8, xxii-445 pages. Madrid, Moreto, 1, 1916. Pesetas 12.

Rey Pastor (J.). — *Introducción a la Matemática superior.* Estado actual, Méthodos y Problemas. 1 vol. in-8 carré, 202 pages. Madrid, Biblioteca Corona, 1916.

Bocher (Maxime). — *Leçons sur les méthodes de Sturm dans la theorie des équations différentielles linéaires et leurs développements modernes*, professées à la Sorbonne en 1913-1914, recueillies et rédigées par *Gaston Julia.* 1 vol. gr. in-8 (25-16), vi-118 pages, avec 8 figures. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1917. Prix : 5fr.

Darboux (Gaston). — *Principes de Géométrie analytique.* Cours de Géométrie de la Faculté des Sciences. 1 vol. gr. in-8 (25-16), vi-520 pages, avec 27 figures dans le texte. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1917. Prix : 20fr.

Deniker (J.). — *Bibliographie des Travaux scientifiques (Sciences mathématiques, physiques et naturelles) publiés par les Sociétés savantes de la France*, dressée sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique. Tome I, 3e livraison. 1 vol. in-4, pages 401-607. Paris, Imprimerie nationale, 1916.

Désortiaux (E.). — *La réforme rationnelle de l'heure. Son importance au point de vue économique et social.* 1 brochure de 15 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1917. Prix : 1fr.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

VALLÉE POUSSIN (C. DE LA). — INTÉGRALES DE LEBESGUE. FONCTIONS D'ENSEMBLE. CLASSES DE BAIRE. *Leçons professées au Collège de France.* (*Collection de Monographies sur la théorie des fonctions*, publiée sous la direction de M. ÉMILE BOREL.) 1 vol. gr. in-8, VIII-154 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1916.

1. Ce Volume contient la matière des leçons que l'Auteur a faites au Collège de France entre décembre 1915 et mars 1916. Il est partagé en trois parties : les ensembles mesurables et les intégrales de Lebesgue, d'une part; les fonctions additives d'ensemble, d'autre part, et enfin les classes de Baire sont les sujets successivement traités. Je vais tenter de résumer ici les résultats exposés.

2. On appelle *point de condensation* d'un ensemble E un point p faisant ou non partie de E, tel que tout domaine de centre p contient une infinité *non dénombrable* de points de E. Un ensemble E, borné ou non, dont aucun point n'est un point de condensation, est dénombrable. Un ensemble E non dénombrable se compose d'un ensemble dénombrable D et d'un ensemble N, appelé *noyau*, dont tous les points sont des points de condensation. L'ensemble des points de condensation d'un ensemble dénombrable E est parfait.

Un ensemble fermé est dénombrable, ou se compose d'un ensemble dénombrable et d'un ensemble parfait.

Les notions d'addition et de soustraction d'ensembles sont intuitives. La multiplication consiste à former l'ensemble des points communs à E_1, E_2, ...

Deux ensembles sont *complémentaires* dans un domaine quand leur somme remplit tout le domaine; CE désignant le complémentaire de E, on a

$$C(E_1 E_2) = CE_1 + CE_2, \qquad C(E_1 - E_2) = CE_1 - E_2.$$

E étant supposé contenu dans un domaine rectangulaire Δ, on appelle *fonction caractéristique* de l'ensemble E une fonc-

tion $\varphi(x, y, \dots)$ des coordonnées des points du domaine, égale à 1 dans E, à zéro dans CE. La caractéristique de $E_1 + E_2 + \dots$ est $1 - (1 - \varphi_1)(1 - \varphi_2)\dots$, φ_i étant la caractéristique de E_i. Les caractéristiques servent à définir les limites d'ensembles. Si l'on considère une suite infinie d'ensembles E_1, E_2, ..., on aura

$$\overline{\text{Lim}}\, E_n = \lim_{n=\infty} (E_n + E_{n+1} + \dots),$$

$$\underline{\text{Lim}}\, E_n = \lim_{n=\infty} (E_n E_{n+1} \dots).$$

Si Δ est un domaine rectangulaire, M un point de Δ, E un ensemble contenu dans Δ, M sera *intérieur* à E s'il est à une distance non nulle de CE, *extérieur* à E, s'il est intérieur à CE ; il est *frontière* de E et de CE s'il est à distance nulle de E et de CE. Un ensemble E est *fermé* s'il contient ses points frontière ; *ouvert*, s'il ne contient aucun point frontière.

Le domaine Δ peut se remplacer par l'espace.

Un ensemble fermé sur l'espace entier contient tous ses points-limites : il est fermé au sens absolu ; s'il est ouvert sur l'espace entier, on dira qu'il est ouvert au sens absolu.

Si un ensemble E est ouvert sur Δ, CE sera fermé. La somme et le produit d'un nombre limité, ou d'une infinité dénombrable d'ensembles ouverts (fermés) sont des ensembles ouverts (fermés). Toute plus petite limite d'ensembles fermés est une somme d'ensembles fermés ; toute plus grande limite d'ensembles ouverts est un produit d'ensembles ouverts.

Deux ensembles fermés au sens absolu et sans points communs sont à distance non nulle l'un de l'autre. Relativement à la structure des ensembles ouverts, on démontre qu'un ensemble spatial E ouvert sur un domaine Δ est la somme d'un nombre fini, ou d'une infinité dénombrable de domaines rectangles fermés, non empiétants, mais pouvant avoir des frontières communes. Si F est un ensemble borné et fermé au sens absolu, et $\mathfrak{F}$ une famille d'ensembles ouverts O tels que tout point de F appartienne à l'un d'eux, l'ensemble F est contenu dans un nombre limité de ces ensembles O.

3. Si l'on envisage un ensemble $\mathcal{E}$ somme d'intervalles α non empiétants, par définition, sa mesure $m\mathcal{E}$ est la somme des mesures

des intervalles α

$$m\mathcal{E} = \Sigma\, m\alpha.$$

Suivant que les ensembles $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, ..., empiètent on n'empiètent pas, on a le droit d'écrire l'une des deux relations

$$m(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \ldots) \leqq m\mathcal{E}_1 + m\mathcal{E}_2 + \ldots,$$
$$m(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \ldots) = m\mathcal{E}_1 + m\mathcal{E}_2 + \ldots.$$

Si $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ ont des points communs,

$$m\mathcal{E}_1 + m\mathcal{E}_2 = m(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) + m(\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2).$$

Les ensembles linéaires ouverts rentrent dans la catégorie des ensembles $\mathcal{E}$, et ce qui précède s'applique à eux.

Pour un ensemble linéaire fermé F dans l'intervalle (a, b), on a

$$m\mathrm{F} = b - a - m\mathrm{CF}.$$

Si les ensembles fermés F_1, F_2 empiètent,

$$m\mathrm{F}_1 + m\mathrm{F}_2 = m(\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2) + m(\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2).$$

Si un ensemble O contient un F, O — F est ouvert et l'on a

$$m(\mathrm{O} - \mathrm{F}) = m\mathrm{O} - m\mathrm{F}.$$

Tout ensemble ouvert contient un ensemble fermé de mesure infiniment voisine de la sienne, et réciproquement.

Ces considérations s'étendent à l'espace.

Considérons un ensemble E dans un domaine rectangulaire Δ. La mesure *extérieure* de E, $m_e\mathrm{E}$, est la borne inférieure des mesures des ensembles ouverts O contenant E. La mesure *intérieure* de E, $m_i\mathrm{E}$, est la borne supérieure des ensembles fermés F contenus dans E. Un ensemble *mesurable* est un ensemble dont les mesures intérieure et extérieure ont la même valeur, et cette valeur est la mesure de E, $m\mathrm{E}$. La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble E soit mesurable est qu'à tout nombre positif donné ε on puisse faire correspondre deux ensembles O et F tels que l'on ait

$$\mathrm{O} > \mathrm{E} > \mathrm{F}, \qquad m\mathrm{O} - m\mathrm{F} < \varepsilon;$$

la mesure de E sera la limite commune de celle de O et de celle de F quand ε tend vers zéro.

Un ensemble ouvert O, un ensemble fermé F sont mesurables. Les sommes et produits, finis ou infinis, d'ensembles mesurables contenus dans le domaine Δ sont mesurables. Si les ensembles mesurables E_1, E_2, ..., en nombre fini ou infini, tous contenus dans le domaine Δ, sont deux à deux sans points communs, on a

$$m(E_1 + E_2 + \ldots) = mE_1 + mE_2 + \ldots$$

Si $E_1 > E_2$,

$$m(E_1 - E_2) = mE_1 - mE_2.$$

Tout ensemble dénombrable de points est de mesure nulle. Si une suite illimitée d'ensembles mesurables, E_1, E_2, ..., a une limite unique E, on a

$$mE = \lim_{n \to \infty} mE_n.$$

Soit $f(P)$ une fonction univoque d'un point P variable dans un ensemble mesurable E, on dit que $f(P)$ est *mesurable dans* E si l'un au moins des quatre ensembles

$$E(f \geqq A), \quad E(f < A), \quad E(f > A), \quad E(f \leqq A)$$

est mesurable quel que soit A constant, auquel cas ils sont mesurables, quel que soit A, tous les quatre. Il suffit d'ailleurs que l'ensemble considéré soit mesurable pour A rationnel.

Si a est une constante, f et φ des fonctions finies mesurables, $a + f$, af, $f + \varphi$, $f - \varphi$, $f\varphi$ sont mesurables. Toute limite (finie ou infinie) d'une suite monotone (c'est-à-dire non croissante, ou non décroissante) de fonctions f_1, f_2, ... mesurables (finies ou infinies) est mesurable. La plus grande et la plus petite limites d'une suite de fonctions mesurables (finies ou infinies) sont mesurables. Toute fonction limite (unique) de fonctions mesurables est mesurable.

On appelle *ensembles mesurables* B les ensembles que l'on peut déduire par addition, soustraction et multiplication finies ou infinies de domaines rectangulaires fermés. Les ensembles ouverts et les ensembles fermés sont mesurables B. Les sommes, différences, produits et limites d'ensembles mesurables B sont mesurables B. Si $f(P)$ est une fonction mesurable dans un domaine rectangulaire Δ, et que l'un des quatre ensembles

$$E(f \geqq A), \quad E(f < A), \quad E(f > A), \quad E(f \leqq A)$$

soit mesurable B, la fonction est dite mesurable B dans Δ.

Soit E un ensemble mesurable B dans Δ : une fonction f est mesurable B sur E si elle est mesurable B dans Δ quand on la pose nulle dans CE. Les sommes, différences, produits et limites de fonctions mesurables B sont mesurables B. La fonction caractéristique d'un ensemble mesurable B est mesurable B. L'ensemble des fonctions mesurables B se confond avec l'ensemble de celles qui rentrent dans les classes que M. Baire a définies dans sa Thèse. Toutes les fonctions de Baire sont mesurables B, et réciproquement. On range les ensembles mesurables B dans la classe de leur fonction caractéristique. On démontre alors qu'un ensemble de classe un est à la fois limite d'ensembles ouverts et d'ensembles fermés, et réciproquement.

4. Soit $f(P)$ une fonction du point P, bornée et mesurable dans un ensemble E borné et mesurable. Désignons par A, B les bornes de f. Partageons (A, B) par une échelle de nombres croissants,

$$l_1 = A, \; l_2, \; \ldots, \; l_n, \; l_{n+1} = B.$$

Soit e_i la mesure de l'ensemble des points de E où l'on a

$$l_i \leqq f < l_{i+1};$$

formons les deux sommes

$$s = \sum_{1}^{n} l_i e_i, \qquad S = \sum_{1}^{n} l_{i+1} e_i.$$

L'intégrale de $f(P)$ dans E est la limite commune de ces deux sommes quand tous les intervalles partiels tels que (l_i, l_{i+1}) tendent vers zéro. Cette intégrale, dite *intégrale de Lebesgue*, se désigne par $\int_E f(P)\,dP$. Elle vérifie le théorème de la moyenne

$$A \,.\, m\mathrm{E} \leqq \int_E f(P)\,dP \leqq B \,.\, m\mathrm{E}.$$

Elle est additive pour un nombre fini ou une infinité dénombrable d'ensembles contenus dans un domaine borné. Si, sur E, on a $\varphi \geqq f$, on a aussi

$$\int_E \varphi\,dP \geqq \int_E f\,dP.$$

L'intégrale d'une somme de fonctions bornées et mesurables en nombre limité est la somme des intégrales de chaque terme. Si a est constant,

$$\int_E a f dP = a \int_E f dP; \qquad \left| \int_E f dP \right| \leq \int_E |f| dP.$$

Deux fonctions qui ne diffèrent sur E que dans un ensemble de mesure nulle ont la même intégrale sur E. Si $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ est une suite illimitée de fonctions du point P dans un ensemble E; si ces fonctions sont bornées dans leur ensemble (c'est-à-dire quels que soient P et n), et tendent en tout point de E vers une limite unique, F(P), on a

$$\lim_{n=\infty} \int_E f_n dP = \int_E F dP.$$

Définissons d'après M. Lebesgue les fonctions *sommables*. Soit f une fonction mesurable non négative, $f_n = f$ si $f \leqq n$, n étant un nombre naturel, et, si $f > n$, $f_n = n$; on pose, par définition,

$$\int_E f dP = \lim_{n=\infty} \int_E f_n dP.$$

Si la limite est finie, f est sommable sur E. En général f est la différence $f_1 - f_2$ de deux fonctions négatives; f est dite *sommable* si f_1 et f_2 le sont, et

$$\int_E f dP = \int_E f_1 dP - \int_E f_2 dP.$$

Si $E = E_1 + E_2 + \ldots$, les ensembles E_i n'ayant deux par deux aucun point commun, l'intégrale sur E d'une fonction sommable est égale à la somme des intégrales sur les E_i. La somme d'un nombre limité de fonctions sommables est sommable : l'intégrale de la somme est la somme des intégrales de chaque terme.

Si f est sommable dans un ensemble E, si e est contenu dans E, l'intégrale de f sur e tend vers zéro avec la mesure de e.

Si les fonctions de la suite $f_1, f_2, \ldots$ sont sommables dans E, et si leur valeur absolue est inférieure à une fonction positive sommable Φ indépendante de n, enfin si la suite admet une fonc-

tion limite F, celle-ci est sommable et l'on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, dP = \int_E F \, dP.$$

La formule

$$\int\int_{\Delta} f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy,$$

où Δ est un rectangle limité aux abscisses a et b, et aux ordonnées c et d, s'applique si $f(x, y)$ est bornée et mesurable B dans ce rectangle, ou bien si, n'étant pas bornée, elle est mesurable B non négative, ou bien si, étant non bornée et de signe variable, elle est sommable dans le domaine Δ, moyennant qu'on néglige un certain ensemble de mesure nulle où les intégrales ne sont plus finies. La formule de réduction s'étend à des fonctions mesurables et bornées qui ne sont pas mesurables B si l'on néglige dans l'intégration par rapport à x certains ensembles de mesure nulle pour lesquels l'intégration $\int_c^d f dx$ cesse d'avoir un sens.

5. Soit e un ensemble borné et mesurable, variable dans un espace quelconque, $F(e)$ une fonction finie de l'ensemble e; elle est dite *additive* si sa valeur sur un ensemble somme (finie ou infinie) d'ensembles sans points communs deux à deux et contenus dans un domaine borné est la somme des valeurs sur chaque partie. $F(e)$ est *continue* dans un domaine borné Δ si elle tend vers zéro avec le diamètre de $e < \Delta$; elle est *absolument continue* si elle tend vers zéro avec la mesure de e. Une fonction additive $F(e)$, supposée bornée sur les ensembles contenus dans un domaine borné Δ, est la différence de deux fonctions de même nature, non négatives. Soit ω un domaine rectangulaire, à côtés égaux, de centre P, les dérivées *symétriques* supérieure et inférieure de $F(e)$ au point P sont les plus grande et plus petite limites du quotient $\frac{F(\omega)}{m\,\omega}$ quand la mesure de ω tend vers zéro. Plus généralement, une famille $\mathcal{F}$ d'ensemble e est dite *régulière* au point P si elle contient des ensembles de mesure infiniment petite, et si le quotient $\frac{m\,\omega}{m\,e}$, où ω est le plus petit domaine rectangulaire de centre P et de côtés égaux qui contienne e, ne surpasse pas un

nombre positif fixe k pour tous les ensembles de la famille ; k est le *paramètre de régularité* de la famille $\mathfrak{F}$. Alors les dérivées supérieure et inférieure au point P, sur la famille $\mathfrak{F}$, sont les plus grande et plus petite limite du quotient $\frac{F(e)}{me}$, quand on considère un ensemble e de mesure infiniment petite, mais appartenant à la famille $\mathfrak{F}$. Si ces deux dérivées sont égales, on dit qu'il y a une dérivée au point P (sur la famille $\mathfrak{F}$). Si la dérivée symétrique d'une fonction F, additive et non négative, est nulle au point P, alors la dérivée de F est nulle en ce point, quelle que soit la manière de la définir.

L'Auteur définit ici ce qu'il appelle un *réseau*, formé de grillages superposés : si $\omega_1, \omega_2, \ldots$ constitue la famille régulière des mailles qui contiennent un point P, les dérivées sont les plus grande et plus petite limites du quotient $\frac{F(\omega_n)}{m\omega_n}$ quand n tend vers l'infini. Les dérivées sur un réseau sont des fonctions mesurables B. Avec la théorie des *réseaux conjugués* exposée pour la première fois dans cet Ouvrage, l'Auteur évite le théorème de M. Vitali sur lequel M. Lebesgue a fondé la dérivation des fonctions absolument continues d'ensembles.

6. Si $F(e)$ est une fonction absolument continue et additive, si l'une de ses dérivées sur un réseau R est positive presque partout sur un ensemble E de mesure non nulle, $F(E)$ est positif ; si cette dérivée est nulle presque partout, $F(E) = 0$.

Soit $f(P)$ une fonction univoque du point P définie dans tout l'espace et sommable sur tout ensemble borné ; l'ensemble e étant variable, $F(e) = \int_e f(P)\,dP$ est ce que M. Lebesgue appelle une *intégrale indéfinie*. Soient E un ensemble donné, borné ou non et mesurable, $\varphi(P)$ sa fonction caractéristique ; la valeur de $F_0(e) = \int_e \varphi(P)\,dP$ est $m(eE)$. Les *densités* supérieure et inférieure de l'ensemble E au point P sont par définition les dérivées supérieure et inférieure de la fonction $F_0(e)$ en ce point. Cette définition se précise par la détermination de la famille régulière d'ensembles qui doit servir à calculer les dérivées. La densité d'un ensemble E est presque partout égale à 1 dans E, et à 0

dans CE. Les points qui font exception sont contenus dans un ensemble H, de mesure nulle, indépendant de la définition de la dérivée.

Revenons à l'intégrale indéfinie $F(e)$; elle a presque partout $f(P)$ comme dérivée; les points exceptionnels de l'espace sont contenus dans un ensemble H, de mesure nulle, indépendant de la définition particulière de la dérivée.

Une fonction d'ensemble additive et absolument continue a ses dérivées finies presque partout, et sommables sur tout ensemble mesurable et borné; elle est l'intégrale indéfinie de chacune d'elles.

7. On dit qu'une famille d'ensembles est *close* si elle contient les domaines rectangulaires fermés, et si les sommes, différences, produits, finis ou infinis d'ensembles de cette famille appartiennent encore à celle-ci. Une fonction $f(e)$, additive dans une famille close, est bornée sur la totalité des ensembles de la famille qui sont contenus dans un ensemble borné donné e_1; c'est la différence de deux fonctions additives non négatives; si l'ensemble e est la limite d'une suite d'ensembles e_1, e_2, ..., faisant partie d'une famille close dans laquelle la fonction $f(e)$ est additive, on a

$$f(e) = \lim_{n=\infty} f(e_n).$$

Soit $f(e)$ une fonction additive dans une famille close $\mathfrak{F}$. On définit les *ensembles normaux* de la façon suivante : un ensemble E de la famille $\mathfrak{F}$ est normal relativement à f, si, quel que soit ε positif donné, on peut assigner un ensemble ouvert $O > E$, et un ensemble fermé $F < E$ tels que les conditions

$$O > E' > E'' > F$$

entraînent la relation

$$|f(E' - E'')| < \varepsilon.$$

Si E est normal, son complémentaire par rapport à un domaine borné l'est aussi.

Si E est normal relativement à la variation totale Φ de f, E est normal aussi par rapport à f. Si E est normal relativement à f, il l'est par rapport aux variations positive, négative, totale de f. Les

ensembles normaux (relativement à f) constituent une famille close. Tous les ensembles mesurables B sont normaux.

Une fonction additive d'ensemble normal est complètement définie par les valeurs qu'elle prend sur les domaines rectangulaires.

Une fonction $f(e)$ d'ensemble normal est continue dans un domaine borné Δ si elle tend vers zéro avec le diamètre de e, supposé $< \Delta$. Elle est *absolument* continue si elle tend vers zéro avec la mesure de e supposé mesurable.

Soit $f = f_1 - f_2$, f_1 et f_2 étant non négatives. Si $f_1(e)$ est discontinue, c'est la somme d'une fonction continue et d'une fonction discontinue, dite *fonction des sauts*, telle que l'ensemble des points de discontinuité est dénombrable.

Il en est de même de f_2.

Considérons en particulier les fonctions continues et additives d'ensemble *linéaire* normal. Si l'un des nombres dérivés de $f(e)$, par exemple Λ, est positif en tout point d'un ensemble normal E, on a $f(E) \geq 0$; $\Lambda < 0$ entraîne $f(E) \leq 0$. Les nombres dérivés de $f(e)$ sont sommables sur tout ensemble e normal et mesurable. On a

$$f(e) = \int_e \Lambda \, dx.$$

L'ensemble E des points où $f(e)$ a une dérivée unique infinie est l'*ensemble des singularités*. La fonction $f(eE)$ est la *fonction des singularités* (Lebesgue). La fonction des singularités a une dérivée nulle presque partout, et $f(e)$ a presque partout la dérivée Λ. La fonction $f(e)$ ne peut se décomposer que d'une façon en la somme d'une intégrale et d'une fonction singulière.

Soit $f(x)$ une fonction continue et univoque dans un intervalle (a, b). Soit (α, β) ou ω un intervalle variable dans (a, b); $f(x)$ définit une fonction d'intervalle, $p\omega$, en posant

$$p\omega = f(\beta) - f(\alpha).$$

Cette fonction est continue et additive pour un nombre fini d'intervalles; elle sera donc définie pour tout ensemble $\mathcal{E}$ somme d'un nombre fini d'intervalles. Si la fonction $p(\mathcal{E})$ est bornée pour la totalité des ensembles $\mathcal{E}$, sommes d'un nombre fini d'intervalles, contenus dans (a, b), on dit que la fonction initiale est à *variation bornée*.

Étant donnée une fonction $f(x)$ continue et à variation bornée, ou, ce qui est la même chose, une fonction $p(\mathcal{E})$ d'intervalle, continue, additive et bornée, il existe une fonction continue, additive et bornée d'ensemble normal qui coïncide avec $p(\mathcal{E})$ sur les intervalles. Une fonction continue, bornée et additive d'intervalle est la différence de deux fonctions de même nature, non négatives.

Convenons de dire que $p\omega$ est le *poids* de l'intervalle ω. C'est, par définition, une fonction non négative, continue, bornée et additive, d'intervalle. Le poids d'un ensemble somme d'une infinité d'intervalles non empiétants est la somme des poids des intervalles composants. Le poids extérieur p_eE est la borne inférieure des poids des ensembles ouverts contenant E; le poids intérieur p_iE est la borne supérieure des ensembles fermés contenus dans E. Un ensemble est normal si ses poids intérieur et extérieur sont égaux. Les ensembles normaux constituent une famille close, et le poids est une fonction additive pour les ensembles normaux.

8. On sait ce qu'on entend par les classes de Baire. Les fonctions continues constituent la classe 0; les fonctions discontinues, limites (finies ou infinies) de fonctions continues constituent la classe 1. Étant donnée une fonction f de classe 1, on peut se proposer de construire une fonction continue f_n qui tende vers f quand n tend vers l'infini. C'est ce que l'Auteur appelle le *problème de Baire*. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit de classe 1 peut s'exprimer sous deux formes différentes.

Si P est un ensemble parfait borné, si la fonction f est de classe 1 sur P, les ensembles de points de P, $E(f > A)$, $E(f < A)$, sont sommes d'ensembles fermés quel que soit A. Réciproquement, toute fonction discontinue f telle que les ensembles $E(f > A)$, $E(f < A)$ soient des sommes d'ensembles fermés quel que soit A, est une fonction de classe 1. Si les ensembles fermés sont connus, on sait résoudre le problème de Baire.

Voici maintenant le théorème de Baire : la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction discontinue finie f soit de classe 1 sur P borné et parfait, est qu'elle soit ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait $Q < P$; c'est-à-dire que Q

n'est pas *compact* sur P, ou, en d'autres termes, l'ensemble QP ne contient pas de point intérieur (sur P).

9. Considérons maintenant les fonctions de classe α. Si f est de classe $\alpha > 0$ sur P parfait, une fonction φ égale à f sur P et à la constante a partout ailleurs est de classe α sur le continu. Les sommes et produits limités et les différences de fonctions finies de classe $\leqq \alpha$ sont de classe $\leqq \alpha$. Si f_1 et f_2 sont finies et de classe $\leqq \alpha$, et si f_2 ne s'annule pas sur P, $f_1 : f_2$ est de classe $\leqq \alpha$. La limite d'une suite uniformément convergente de fonctions de classe $\leqq \alpha$, et la somme d'une série uniformément convergente de telles fonctions sont des fonctions de classe $\leqq \alpha$. Un ensemble E est fermé, ou F, de classe α s'il existe une fonction θ définie sur P, de classe $\leqq \alpha$, et telle que l'on ait $E = E(\theta = 0)$. Un ensemble E est ouvert, ou O, de classe α, s'il existe une fonction θ définie sur P, de classe $\leqq \alpha$, et telle que l'on ait $E = E(\theta \neq 0)$. Alors, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction finie ou non f, soit de classe $\alpha > 0$ sur P, est que, quelle que soit la constante a, les ensembles $E(f > a)$, $E(f < a)$, soient O de classe α, et ne soient pas tous de classe moindre ; ou ce qui revient au même que les ensembles complémentaires $E(f \geqq a)$, $E(f \leqq a)$ soient F de classe α, et ne soient pas tous de classe moindre.

On dit que f est à ε près de classe α sur E, $\alpha > 0$, si, sur E, f est à ε près limite de fonctions de classe $< \alpha$ (c'est-à-dire que si l'on considère la suite $f_1, f_2, \ldots$, les limites supérieure et inférieure de f_n sont égales à f à moins de ε près). Cela posé, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction finie f soit de classe $\leqq \alpha$ sur l'ensemble parfait P est que, quels que soient le nombre positif ε, et l'ensemble parfait Q, contenu dans P, on puisse trouver un point M de Q où f est à ε près de classe α sur Q.

La question de l'existence des classes termine l'Ouvrage.

10. Tels sont les résultats exposés dans ces Leçons rédigées tout à la fois avec concision et avec clarté. Les questions traitées appartiennent à la théorie récente des fonctions dont MM. Borel, Baire et Lebesgue sont les fondateurs. Cet excellent Livre contribuera bien à les répandre.

R. Le Vavasseur.

MACAULAY (F. S.). — THE ALGEBRAIC THEORY OF MODULAR SYSTEMS. (Cambridge tracts in Mathematics and mathematical Physics, n° 19.) 1 vol. in-8, XIV-112 pages. Cambridge, at the University Press, 1916.

Un système modulaire algébrique à n variables est l'ensemble des polynomes de la forme $A_1F_1 + A_2F_2 + \ldots + A_kF_k$, où F_1, F_2, ..., F_k sont des polynomes donnés et A_1, A_2, ..., A_k des polynomes indéterminés, tous à n variables. On le désigne par $(F_1, F_2, \ldots, F_k)$.

Il est faciles de voir comment l'étude de ces systèmes s'est imposée. Voici, par exemple un problème qui se présente en Géométrie analytique : *Trouver l'équation générale des courbes planes qui passent par les points d'intersection de deux courbes données* $F_1(x, y) = 0$, $F_2(x, y) = 0$. Il est évident que toute équation $A_1(x, y)F_1(x, y) + A_2(x, y)F_2(x, y) = 0$ répond à la question, mais la réciproque est-elle vraie, et toute courbe répondant à la question a-t-elle une équation de cette forme ?

Si l'on a, par exemple, $F_1(x, y) = x$ et $F_2(x, y) = y$, cette réciproque est vraie ; mais, si l'on a $F_1(x, y) = x^2$, $F_2(x, y) = y^2$, elle ne l'est évidemment pas. La théorie des systèmes modulaires fournira seule une réponse générale à ce genre de questions.

Les polynomes que l'on considère sont à coefficients quelconques et deux polynomes qui ne diffèrent que par un facteur constant sont considérés comme identiques. Ces hypothèses donnent à la théorie un caractère algébrique. Si l'on en fait d'autres ; si, par exemple, on ne considère que des polynomes à coefficients entiers, alors deux polynomes, même ne différant que par un facteur constant, doivent être considérés comme différents et l'on tombe sur une théorie plus difficile et d'un caractère nettement arithmétique. Elle n'est pas abordée dans l'Ouvrage de M. Macaulay.

On suppose aussi que le nombre n des variables est fixé, c'est-à-dire que les polynomes A et F contiennent tous n variables au plus. D'ailleurs la théorie des systèmes modulaires formés par des polynomes pouvant avoir un nombre indéfini de variables n'a pas, que nous sachions, été étudiée d'une façon systématique.

Même avec ces particularisations et simplifications, la théorie des systèmes modulaires reste une des plus difficiles des mathé-

matiques. Qu'il nous suffise de dire que plusieurs mathématiciens éminents, dont Kronecker, n'ont pas été sans y commettre des erreurs.

Comme nous l'avons remarqué plus haut, tout polynome appartenant à un module $(F_1, F_2, \ldots, F_k)$ s'annule pour les valeurs des variables qui satisfont au système d'équations

$$F_1 = F_2 = \ldots = F_k = 0,$$

et l'on conçoit que l'ensemble de ces valeurs joue un grand rôle dans la théorie. Et l'on est ainsi amené au problème de la résolution d'un système d'équations algébriques et par suite à la théorie des *résultants* et à celle des *résolvants*.

Le Chapitre I de l'Ouvrage est consacré aux résultants.

On sait ce que c'est que le résultant de deux polynomes homogènes à deux variables et comment on le définit par un déterminant formé au moyen des coefficients. Le résultant de n polynomes à n variables $F_1, F_2, \ldots, F_n$ se définit d'une façon analogue et sa théorie est une généralisation de la précédente, d'ailleurs beaucoup plus difficile qu'on ne pourrait le supposer *a priori*. En l'égalant à zéro on trouve la condition pour que le système formé en égalant tous les polynomes à zéro ait des solutions non toutes nulles. Le produit de ce résultant par tout polynome homogène de degré $l_1 + l_2 + \ldots + l_n - n + 1$ ($l_1, l_2, \ldots l_n$, degrés des polynomes F) appartient au module $(F_1, F_2, \ldots, F_n)$.

Le Chapitre II est consacré à la théorie des résolvants, due à Kronecker. Soit le système $F_1 = F_2 = \ldots F_k = 0$, absolument quelconque; le nombre d'inconnues pouvant être égal, supérieur ou inférieur au nombre d'équations; les équations pouvant être distinctes ou non. Kronecker classe les solutions d'après leur rang, celles de rang r étant celles pour lesquelles $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ sont arbitraires, $x_1, x_2, \ldots, x_r$ ne l'étant plus quand on a choisi $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$. Alors il forme des polynomes D, D', ...; le premier peut contenir toutes les variables et donne les solutions du premier rang, le second ne contient pas x_1 et donne les valeurs de $x_2, \ldots, x_n$ pour les solutions du deuxième rang, le troisième ne contient ni x_1, ni x_2, ..., etc.

Ces polynomes D, D', ..., sont nommés *résolvants partiels*

et leur produit, *résolvant total*. Le résolvant total appartient au module $(F_1, F_2, \ldots, F_k)$. A ce sujet M. Macaulay corrige quelques erreurs de Kronecker et de König.

Le Chapitre III traite des propriétés générales des systèmes modulaires. Beaucoup des propriétés développées appartiennent non seulement aux systèmes modulaires, mais aussi aux *modules*. Un module, d'après Dedekind, est un ensemble M d'éléments tirés d'un domaine D dans lequel sont définies une addition et une multiplication et tel que : 1° si F_1 et F_2 appartiennent à M, la somme $F_1 + F_2$ y appartient aussi ; 2° si F appartient à M et A à D, alors AF appartient à M. On voit que les systèmes modulaires sont des modules.

Les propriétés des modules ont une certaine analogie avec celles des entiers, cette analogie qui se traduit dans la terminologie employée guide dans les recherches, mais elle est loin d'aller jusqu'à l'identité. Elle vient de ce que l'ensemble des multiples d'un entier forme un module et que, réciproquement, tout module d'entiers est formé de l'ensemble des multiples d'un certain entier. On définit le produit, le p. g. c. d., le p. p. c. m., etc. de plusieurs modules. On définit aussi des systèmes modulaires *premiers* (analogues aux entiers premiers) et des systèmes modulaires *primaires* (analogues aux puissances de nombres premiers, et dont les systèmes premiers sont des cas particuliers), et c'est un théorème fondamental que *tout système modulaire est le p. p. c. m. d'un nombre fini de systèmes modulaires primaires;* il est analogue à la décomposition des entiers en un produit de puissances de facteurs premiers.

Quant à une analogie plus complète, et à la décomposition en un *produit* de systèmes modulaire premiers, elle n'est réalisée que dans certaines conditions. L'ensemble des solutions du système $F_1 = F_2 = \ldots = F_k = 0$ joue un grand rôle dans ces questions.

Reprenons la question posée plus haut : sur l'équation générale des courbes passant par les points d'intersection de deux autres. La théorie précédente en donne la solution, et aussi celle de la question plus générale : *trouver la forme des polynomes à n variables qui contiennent l'ensemble des solutions du système* $F_1 = F_2 = \ldots = F_k = 0$.

La réponse est $A_1 F_1 + A_2 F_2 + \ldots + A_k F_k$, si dans la décompo-

sition de M en systèmes primaires ces systèmes sont non seulement primaires mais premiers. Sinon la solution est plus compliquée.

La propriété précédente donne la réponse, dans un cas particulier, à cette question fondamentale : *Voir si un polynome donné appartient à un module donné*. La solution générale est exposée ensuite.

Enfin le Chapitre IV et dernier est intitulé *systèmes inverses et équations modulaires;* la substance en est due à M. Macaulay lui-même. Etant donné un module, M. Macaulay lui fait correspondre certaines fonctions rationnelles qu'il appelle fonctions *inverses*.

Une fonction inverse pour le degré t est un polynome entier par rapport aux inverses des variables, de degré $\leqq t$, et tel que dans son produit par tout polynome appartenant au module et de degré $\leqq t$ le terme constant soit nul. Les équations modulaires sont les équations linéaires ayant comme coefficients ceux des fonctions inverses. Un système modulaire est complètement déterminé par son système de fonctions inverses ou d'équations modulaires, et il y a réciprocité entre les deux systèmes. De là découlent des propriétés importantes et qui permettent de simplifier certaines questions.

Enfin ces quatre Chapitres sont suivis d'une Note sur la théorie des idéaux de nombres algébriques, et sur ceux de fonctions algébriques.

Le Livre de M. Macaulay appartient à la série des *Cambridge tracts*. Ces petits volumes ont pour but de mettre le lecteur, le plus rapidement possible, au courant d'une question. La matière y est par suite très condensée et, pour réussir un pareil ouvrage, il faut un auteur très familier avec la question. C'est le cas ici de M. Macaulay qui a fait faire à la théorie des systèmes modulaires des progrès notables. Ajoutons que son Livre pourra intéresser non seulement les chercheurs, mais aussi les professeurs. Ces derniers y trouveront la solution de quelques questions relatives à l'élimination, aux courbes algébriques, etc. qui se présentent dans les cours et qui n'y sont pas toujours traitées avec la rigueur, ou, tout au moins, avec la précision désirable. Ces qualités sont éminentes dans l'Ouvrage de M. Macaulay.

E. Cahen.

JESSOP (C.-M.). — QUARTIC SURFACES WITH SINGULAR POINTS. 1 vol. in-8, xxxvi–198 pages. Cambridge; at the University Press, 1916.

L'étude des surfaces quartiques est d'une richesse qu'on ne peut dire insoupçonnée; il fallait un géomètre habile et patient pour présenter un tableau d'ensemble tel que celui-ci, laissât-il de côté les surfaces insuffisamment riches en singularités ou d'autres, telles que les surfaces de Kummer, les quartiques réglées, qui ont donné lieu, en différents ouvrages, à des études suffisamment connues.

Le Livre est composé de neuf Chapitres et d'une Introduction qui les résume. Traduire celle-ci serait sans doute la meilleure manière de présenter ici un résumé de l'ensemble, mais encore faudrait-il disposer de 25 pages. Je serai forcément plus bref et plus original.

Le Chapitre I classe les surfaces quartiques qui n'ont que des singularités nodales. Si le point $x = y = z = 0$ est un nœud, la surface a une équation de la forme

$$u_2 w^2 + 2 u_3 w + u_4 = 0,$$

où les u sont des cônes ayant leur sommet au nœud. Le cône mené à la surface par ce nœud a pour équation

$$u_2 u_4 - u_3^2 = 0.$$

Il est du sixième degré et, par suite, son intersection par le plan $w = 0$ est une sextique.

A chaque autre nœud sur la surface correspond une génératrice singulière du cône précédent et un point singulier sur la sextique; on est donc ramené à l'étude des singularités d'une certaine sextique plane (Cayley, Rohn). Ce n'est qu'au delà de sept nœuds que cette méthode donne des résultats d'un véritable intérêt géométrique.

La surface à huit nœuds est, en général, *asyzygétique;* elle devient *syzygétique* pour une certaine construction symétrique de son équation à l'aide des équations de trois quadriques dont les intersections mutuelles peuvent déterminer les huit nœuds.

Sept points pris au hasard peuvent être nœuds d'une surface

quartique; il n'en va plus de même pour un huitième qui doit se trouver sur une certaine surface *dianodale* (Cayley), lieu des points pour lesquels les plans polaires, pris par rapport à quatre quadriques, sont concourants.

Telles sont les grandes lignes d'une classification qui se résout en de nombreux détails quand le nombre de nœuds s'élève. A douze nœuds sur la surface en correspondent onze sur la sextique, laquelle ne peut en avoir plus de dix sans se décomposer.

Dès qu'elle se décompose, les équations et les types se simplifient de plus en plus rapidement jusqu'à ce qu'on arrive à la sextique formée de six droites donnant quinze intersections d'où, par suite, seize nœuds à une *surface de Kummer*. Cette dernière, avec une foule de transformées et de formes particulières, telles la surface de l'onde, demandait un volume à elle seule; il a été joliment écrit par feu Hudson et également publié par l'Université de Cambridge. M. Jessop a sagement fait en nous y renvoyant.

Le Chapitre II illustre les quartiques à nœuds sans lignes singulières en nous présentant les surfaces *desmiques*. Elles dérivent de trois tétraèdres quadruplement homologiques $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ en prenant une équation de la forme

$$\lambda \Delta_1 + \mu \Delta_2 + \nu \Delta_3 = 0.$$

Naturellement les nœuds d'une telle surface conservent plus ou moins la forme de trièdres opposés, d'où une sorte d'assemblage de pinceaux (δεσμός) réunis pointe à pointe. Le véritable intérêt de ces surfaces semble résider dans une représentation paramétrique étudiée surtout par M. G. Humbert, représentation en laquelle les quatre coordonnées tétraédriques d'un point sont des quotients de fonctions σ. Les formules d'addition relatives à de telles fonctions se traduisent par des propriétés géométriques des surfaces desmiques. Des combinaisons linéaires très simples des paramètres u et v figurant dans les fonctions σ donnent de remarquables cubiques ou biquadratiques sur la surface; celle-ci contient d'ailleurs seize droites *torsales*, c'est-à-dire à plan tangent invariable comme le long d'une génératrice de surface développable. Et tout plan tangent torsal, coupant la surface suivant deux droites confondues, la rencontre ailleurs suivant une conique (Bioche).

Avec le Chapitre III nous abordons les surfaces à conique double. Leur généralité est encore comparable à celle de toutes les surfaces cubiques. L'équation générale a la forme

$$\Phi^2 = 4\varpi^2\Psi \quad \text{ou} \quad (\Phi + \lambda\varpi^2)^2 = \varpi^2(\Psi + 2\lambda\Phi + \lambda^2\varpi^2),$$

où Φ et Ψ sont des quadriques cependant que ϖ est le plan de la ligne double. On peut déterminer λ de manière que la dernière parenthèse représente des cônes; cinq de ceux-ci sont possibles; leurs plans tangents coupent la surface suivant une quartique à quatre points doubles, laquelle se résout en deux coniques.

La surface admet des représentations paramétriques rationnelles; ses sections planes peuvent correspondre à certains faisceaux de cubiques planes à points fixes dits *points-bases*. Elle admet 16 droites qui peuvent être choisies parmi les 27 d'une surface cubique. Elle peut être engendrée par l'intermédiaire de deux quadriques et d'un point, mais l'intérêt de ce résultat est dépassé dans l'espace à quatre dimensions; la surface est alors la perspective sur un hyperplan de l'intersection de deux hyperquadriques (Segre).

Le Chapitre IV ajoute des nœuds isolés à la conique double. Ceux-ci naissent surtout de configurations spéciales des points-bases. Cette idée, très simple, aboutit cependant à une classification en un tableau de trois pages, mais cette complication est dans la nature des choses et l'on s'y accoutume facilement grâce à un bref système de notations.

Tout ceci s'illustre merveilleusement, au Chapitre V, grâce à des surfaces qui sont, en effet, de pures merveilles : j'ai nommé les *cyclides*. Tout d'abord on peut, pour ces surfaces, ne pas employer les coordonnées tétraédriques, ce qui est loin d'être le cas général; leur équation $S^2 = U$, où S est une sphère et U une quadrique, n'a que quatre coefficients de plus que l'équation d'une quadrique. Il y a donc là des êtres particulièrement maniables; leurs propriétés ont largement servi à aborder des cas plus complexes.

Ici les plans tangents aux cinq cônes, dont il était question au début du Chapitre III, donnent des sections composées de deux cercles. Toute cyclide est l'enveloppe de sphères bitangentes; elle peut aussi naître, de cinq manières, comme enveloppe d'une sphère, orthogonale à une sphère fixe, dont le centre se déplace sur une quadrique d'un système en comprenant cinq.

Un autre et très grand avantage des cyclides est qu'on peut en discuter et en apercevoir aisément les physionomies. L'un des cas particuliers anciennement connus, la cyclide de Dupin, est l'inverse d'un tore (Mannheim) ou l'enveloppe d'une sphère touchant trois sphères fixes. Dans de tels cas le centre de la sphère enveloppée ne peut plus décrire qu'une conique.

L'inversion est d'ailleurs une transformation de prédilection dans le monde des cyclides; certaines inversions les changent en elles-mêmes. Si nous voulons abandonner les méthodes élémentaires il y a mieux à faire qu'à revenir aux coordonnées tétraédriques; des surfaces si intimement liées aux sphères s'accommodent mieux des coordonnées *pentasphériques* si magistralement maniées par Gaston Darboux. Ces coordonnées permettent notamment une classification brève au moyen d'équations homogènes, quadratiques, très symétriques. Signalons encore d'importants résultats, dus à M. G. Humbert, résultats appuyés sur l'existence de certaines quadriques coupant les cyclides suivant des systèmes de courbes sphériques.

Le Chapitre VI a trait aux quartiques à droite double. Il est clair que tout plan passant par cette droite double coupe ailleurs la surface suivant une conique, mais un premier intérêt provient de l'existence de coniques distinctes de celles-là. Et ce sont même ces secondes coniques qui permettent la représentation plane de la surface. Un cas particulier très important est fourni par la surface de Plücker qui, hormis sa droite double, possède huit nœuds.

Avec le Chapitre VII il est maintenant naturel d'arriver aux surfaces les plus quelconques qui possèdent une infinité de coniques. De nombreux cas ont déjà été rencontrés dans les chapitres précédents; quelques autres s'y ajoutant facilement, mais ils sont tous dominés en importance par la surface de Steiner avec ses trois droites doubles concourantes. Son intérêt est prodigieux, d'abord au point de vue analytique, à cause d'une représentation paramétrique possible au moyen de simples rapports de formes quadratiques et ensuite par les formes ponctuelles et tangentielles possibles pour l'équation de la surface, savoir

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} + \sqrt{x_4} = 0, \qquad \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} = 0.$$

Tout plan tangent, coupant les trois droites doubles, rencontre

ladite surface en une quartique à quatre nœuds, décomposable en deux coniques, propriété évidente et caractéristique.

La surface de Steiner admet plusieurs générations géométriques qui la font notamment correspondre à des surfaces cubiques; toute courbe algébrique y tracée est d'ordre pair d'où, après l'étude des sections planes, l'étude de sections déterminées par des quadriques. Enfin elle conduit à la considération plus générale des surfaces quartiques à point triple qui ne sont elles-mêmes que des cas particuliers des *monoïdes*.

Le Chapitre VIII, avec une continuité parfaite, propose, après toutes les surfaces rationnelles précédemment rencontrées, de rechercher s'il n'en reste point d'autres. Or il en reste; elles proviennent notamment de singularités spéciales, telles que les singularités *tacnodales*. Ici l'intérêt géométrique est peut-être moindre, mais l'intérêt analytique reste entier. Le fameux problème de la réduction des singularités d'une surface algébrique ne saurait être complètement traité sans examen de l'influence de telles singularités; il faut savoir gré aux surfaces du quatrième ordre de nous en permettre une vue relativement élémentaire, surtout dans le cas particulièrement simple où elles entraînent la rationalité.

Enfin le Chapitre IX n'est pas le moins intéressant. Il a trait aux *determinant surfaces*.

A l'aide de déterminants du second et du troisième ordre, dont les termes sont des formes linéaires des coordonnées, on peut représenter toutes les surfaces du second et du troisième ordre. En est-il de même pour les surfaces quartiques en ayant recours aux déterminants du quatrième ordre? Non; un tel déterminant dépend de 33 constantes distinctes et il en faut 34 pour former l'équation d'une surface quartique générale. Mais l'écart est léger et bien des surfaces déjà étudiées doivent être des *determinant surfaces*. Toutefois ces dernières sont d'une considération particulièrement directe quand elles résultent tout naturellement d'éliminations se traduisant par la nullité d'un déterminant Δ. La place me manque pour expliquer ici comment, de différentes combinaisons linéaires conduisant au même Δ, on peut conclure des correspondances entre points de la surface Δ. Les coefficients entrant dans de telles transformations peuvent aussi jouer le rôle de coordonnées ponc-

tuelles, d'où une réciprocité qui apparaît, par exemple, entre la surface jacobienne de quatre quadriques et une certaine surface Δ, dite *symétroïde*, de par la symétrie qui s'observe alors dans le déterminant Δ.

Je terminerai en citant la surface de Weddle, lieu des sommets des cônes passant par six points. Elle est remarquable à un point de vue très élémentaire, parce que son équation $\Delta = 0$ peut prendre une forme cartésienne très simple; et à un point de vue transcendant, parce que ses coordonnées sont exprimables par les fonctions Θ de deux arguments, ce qui la fait rentrer, d'ailleurs, dans les surfaces hyperelliptiques étudiées par M. Humbert.

Le Livre de M. Jessop est un véritable jardin de merveilles géométriques; répétons qu'il a fallu un singulier talent pour les assembler d'aussi heureuse manière.

A. Buhl.

LÉMERAY (E.-M.). — Le Principe de Relativité (*Actualités scientifiques*). 1 vol. petit in-8, 156 pages. Paris, Gauthier-Villars et C[ie], 1916.

M. Lémeray, dans ce petit Livre, a eu l'heureuse idée de chercher à donner un aperçu des points fondamentaux ayant trait au Principe de Relativité, qui a pris dans la Physique moderne une place si importante.

Quelle que soit leur extrême précision, atteignant l'ordre du carré de l'aberration, toutes les expériences, soit optiques (Michelson), soit électromagnétiques (Trouton et Noble) tentées pour mettre en évidence le mouvement *absolu* de la Terre (c'est-à-dire son mouvement par rapport à l'éther) ont donné, comme on sait, des résultats négatifs. L'échec de toutes ces tentatives a conduit à penser qu'on se trouvait en présence d'une loi générale, et qu'aucune expérience ne pourrait jamais déceler un mouvement absolu. Il a donc fallu édifier une théorie prenant pour point de départ que *les lois des phénomènes naturels ayant l'éther pour siège sont indépendantes de l'état de mouvement du système de coordonnées par rapport auquel ces phénomènes sont observés.*

Bien entendu, la nouvelle théorie est obligée d'abandonner la vieille notion, si simple et si claire, du *temps absolu* qui nous est si familière, puisque cette notion conduit tout droit à la Physique classique. Elle postule que deux groupes d'observateurs, invariablement liés chacun à un système d'axes de coordonnées, ont chacun leur *temps propre*. Si les deux systèmes d'axes sont en mouvement l'un par rapport à l'autre, ces temps propres ne coïncident pas, pas plus que ne coïncident, pour les deux groupes d'observateurs, les coordonnées d'un même point matériel. Deux phénomènes simultanés pour les uns ne le sont pas pour les autres, de même que deux phénomènes que les uns voient se succéder en un même point sont vus par les autres en des points distincts. Dans cet ordre d'idées, le problème de la Relativité revient à chercher un changement de variables, portant à la fois sur les trois coordonnées x, y, z, et le temps t, jouissant de la propriété de ne pas altérer les lois de propagation d'une perturbation de l'éther.

C'est à quoi répondent les formules bien connues sous le nom de *transformation de Lorentz*. Ces formules linéaires correspondent à un mouvement de translation rectiligne et uniforme, et donnent, pour ce cas particulier, toute satisfaction. Non seulement elles laissent invariante la vitesse de la lumière, mais, en leur adjoignant aussi des formules linéaires pour la correspondance des forces électriques et magnétiques, elles transforment en elles-mêmes les six équations du champ électromagnétique de Hertz et Maxwell. Les équations étant les mêmes pour les deux systèmes d'observateurs, aucun d'eux ne pourra s'apercevoir de son mouvement absolu. Le mot même de *mouvement absolu* devient dépourvu de tout sens, et le but cherché est atteint.

Il s'agit maintenant de voir ce que devient, dans la doctrine de la Relativité, la Mécanique rationnelle elle-même. C'est l'objet principal du Livre de M. Lémeray.

Tout d'abord, pour la Cinématique, il n'y a aucune difficulté. Le mouvement d'un point étant connu par rapport à l'un des deux systèmes, son mouvement par rapport à l'autre système s'ensuit, d'où des formules relativement simples pour la composition des vitesses et des accélérations.

Les difficultés commencent avec la Statique, car un point ne peut se trouver en repos à la fois par rapport à l'un et à l'autre

groupe d'observateurs. M. Lémeray considère un point en équilibre par rapport au premier système, sous l'action d'une force normale à une surface fixe sur laquelle ce point doit rester. Une élégante application du principe des travaux virtuels le conduit à déterminer la nouvelle direction que les observateurs du second système assigneront à la force qui le sollicite.

Puis, l'Auteur aborde la Dynamique. Il faut maintenant prévoir un changement de la masse avec la vitesse, et considérer une masse longitudinale et une masse transversale pour établir les équations de la Dynamique de la Relativité.

Vient ensuite l'étude des forces qui se produisent entre corps en mouvement, et qui dépendent du mouvement même de ces corps. Si l'on a, en effet, des corps attirants fixes par rapport au premier système, ils ne le seront pas par rapport au second, et les deux groupes d'observateurs assigneront des valeurs différentes au champ qui s'exerce sur un point attiré. Ce champ sera un « champ statique » au sens ordinaire pour les premiers observateurs ; ce sera un « champ cinétique » pour les seconds, qui seront conduits à envisager une « force supplémentaire » du fait du mouvement des corps attirants par rapport au corps attiré et à eux-mêmes.

M. Lémeray examine le cas particulier des forces centrales et du champ électromagnétique. Il donne quelques éléments de la dynamique de l'électron et termine par des considérations sur la gravitation et l'inertie de l'énergie.

Toute cette théorie, d'un haut intérêt, a pour base fondamentale la transformation de Lorentz. Celle-ci correspond à un mouvement de translation rectiligne et uniforme des deux groupes d'observateurs l'un par rapport à l'autre. Qu'arrive-t-il si les deux groupes d'observateurs ont un autre mouvement, par exemple s'ils sont animés l'un par rapport à l'autre d'une rotation ? Il semble qu'il faudrait trouver une transformation plus générale que celle de Lorentz, s'appliquant à un mouvement quelconque, et laissant invariante la vitesse de la lumière. Malheureusement, une telle transformation n'existe pas, celle de Lorentz étant la seule à jouir de cette propriété. La constance *absolue* de la vitesse de la lumière ne peut donc être prise comme base inébranlable de la Mécanique de la Relativité, qui ne doit être considérée que comme une seconde approximation, la Mécanique classique étant

une première approximation. Les habitudes invétérées de notre esprit, si accoutumé à raisonner avec le temps absolu, ne sont pas les seules causes des difficultés que rencontre la théorie de la Relativité. Ces difficultés tiennent à la nature des choses.

H. VERGNE.

MÉLANGES.

RECHERCHES SUR LES MOUVEMENTS PLANS A DEUX PARAMÈTRES ;

PAR M. G. KŒNIGS,
Directeur du Laboratoire de Mécanique
de la Faculté des Sciences de Paris.

IV. — CAS EXCEPTIONNEL.

10. Dans le cas exceptionnel, l'angle φ est fonction de l'angle θ. Donc φ est constant avec θ et $\psi = \theta + \varphi$ l'est aussi. Or ψ est l'angle de δ_1 avec l'axe fixe A_1X_1. Puisque, au cours de la translation $\mathfrak{T}^1$, θ restant constant, ψ reste aussi constant, δ_1 reste parallèle à lui-même au cours de la translation, et la translation elle-même, perpendiculaire, on le sait, à δ_1, se fait toujours dans la même direction. En conséquence, la *translation* $\mathfrak{T}^1$ *est rectiligne*.

Inversement, si la translation $\mathfrak{T}^1$ est rectiligne, sa direction est constante, la droite d_1 qui lui est perpendiculaire reste donc parallèle à elle-même tant que cette translation s'effectue. L'angle ψ est donc constant avec θ; en conséquence, puisque $\psi = \theta - \varphi$, φ est fonction de θ.

Cherchons quelle représentation analytique on peut obtenir pour ces mouvements exceptionnels.

Nous ne pouvons plus ici prendre φ pour seconde variable indépendante ; mais il sera assez naturel de prendre comme seconde

variable u, l'amplitude de la translation. Nous arriverons à ce résultat de la manière suivante.

Ne spécifions pas encore le choix de u. Nous posons toujours

$$\xi_1 = \rho \sin\varphi, \qquad \eta_1 = -\rho\cos\varphi;$$

en appelant φ' la dérivée de φ par rapport à θ, puisque φ est fonction de θ, les conditions (8) d'intégrabilité deviennent

$$(27)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\xi}{\partial u} = \dfrac{\partial\rho}{\partial\theta}\sin\varphi + \rho(1+\varphi')\cos\varphi, \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial u} = -\dfrac{\partial\rho}{\partial\theta}\cos\varphi + \rho(1+\varphi')\sin\varphi. \end{cases}$$

Nous posons toujours [formule (12)]

$$n = \xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi,$$

en sorte que (13) reste l'équation de la droite d_1. On obtient par différentiation :

$$\frac{\partial n}{\partial u} = \frac{\partial\xi}{\partial u}\cos\varphi + \frac{\partial\eta}{\partial u}\sin\varphi,$$

ou, d'après les équations (27),

$$\frac{\partial n}{\partial u} = (1+\varphi')\rho.$$

Nous poserons alors, σ étant une fonction de θ, u,

$$(28)\qquad \rho = \frac{\partial\sigma}{\partial u},$$

en sorte que l'équation précédente donne, par intégration,

$$(29)\qquad n = (1+\varphi')\sigma + h(\theta),$$

où $h(\theta)$ désigne une fonction de θ.

Les équations (27), en y substituant les valeurs (28), (29) de ρ, n, deviennent

$$\frac{\partial\xi}{\partial u} = \frac{\partial^2\sigma}{\partial u\,\partial\theta}\sin\varphi + (1+\varphi')\frac{\partial\sigma}{\partial u}\cos\varphi,$$
$$\frac{\partial\eta}{\partial u} = -\frac{\partial^2\sigma}{\partial u\,\partial\theta}\cos\varphi + (1+\varphi')\frac{\partial\sigma}{\partial u}\sin\varphi,$$

et, en intégrant,

$$(30) \quad \begin{cases} \xi = \dfrac{\partial\sigma}{\partial\theta}\sin\varphi - \sigma(1+\varphi')\cos\varphi + f(\theta), \\ \eta = -\dfrac{\partial\sigma}{\partial\theta}\cos\varphi + \sigma(1+\varphi')\sin\varphi + g(\theta), \end{cases}$$

où $f(\theta)$ et $g(\theta)$ sont deux fonctions de θ.

En se reportant à l'expression de n [formule (12)], on voit que $h(\theta)$ est lié à $f(\theta)$ et $g(\theta)$ par l'équation

$$(30^{bis}) \qquad h(\theta) = f(\theta)\cos\varphi + g(\theta)\sin\varphi.$$

On a, en même temps,

$$(31) \quad \begin{cases} \xi_1 = \dfrac{\partial\sigma}{\partial u}\sin\varphi, \\ \eta_1 = -\dfrac{\partial\sigma}{\partial u}\cos\varphi. \end{cases}$$

Il faut remarquer que, si σ n'était qu'une fonction de θ et ne dépendait pas de u, ξ_1, η_1 seraient nuls et le mouvement ne dépendrait pas du paramètre u. Dès lors, puisque σ dépend forcément du paramètre u, on peut prendre pour second paramètre précisément σ, ce qui revient à supposer $\sigma = u$.

Les formules se simplifient alors et deviennent :

$$(32) \quad \begin{cases} \xi = (1+\varphi')u\cos\varphi + f(\theta), \\ \eta = (1+\varphi')u\sin\varphi + g(\theta), \\ \xi_1 = \sin\varphi, \\ \eta_1 = -\cos\varphi, \\ n = (1+\varphi')u + f(\theta)\cos\varphi + g(\theta)\sin\varphi. \end{cases}$$

11. Les équations finies du mouvement s'obtiennent sans peine. Partons des équations (4)

$$\frac{\partial a}{\partial u} = -\xi_1, \qquad \frac{\partial b}{\partial u} = -\eta_1.$$

Il en résulte

$$(32^{bis}) \qquad a = -u\sin\varphi + \alpha, \qquad b = u\cos\varphi + \beta,$$

où α, β sont les fonctions de θ.

Posons alors, en conformité avec les équations (3),

$$a_1 = a\cos\theta + b\sin\theta, \qquad b_1 = -a\sin\theta - b\cos\theta,$$

c'est-à-dire

$$a_1 = u\sin(\varphi + \theta) + \alpha_1, \qquad b_1 = -u\cos(\varphi + \theta) + \beta_1,$$

en faisant

$$\alpha_1 = \alpha\cos\theta + \beta\sin\theta, \qquad \beta_1 = -\alpha\sin\theta - \beta\cos\theta.$$

Les équations finies s'écriront

$$(33) \qquad \begin{cases} x_1 = u\sin(\varphi + \theta) + \alpha_1 + x\cos\theta - y\sin\theta, \\ y_1 = -u\cos(\varphi + \theta) + \beta_1 + x\sin\theta + y\cos\theta. \end{cases}$$

Si dans ces formules, où φ est une fonction de θ seul, on laisse θ constant, le point x_1, y_1 décrit, lorsque u varie, un segment de droite dont la longueur est égale à la différence des valeurs de u et dont la direction constante est perpendiculaire à celle de d_1.

On trouve aisément que

$$(34) \qquad \begin{cases} f(\theta) = \alpha'_1\cos\theta + \beta'_1\sin\theta, \\ g(\theta) = -\alpha'_1\sin\theta + \beta'_1\cos\theta, \end{cases}$$

où α'_1, β'_1 sont les dérivées de α_1, β_1 en sorte que n a la valeur

$$(34^{bis}) \qquad n = (1 + \varphi')u + \alpha'_1\cos(\theta + \varphi) + \beta'_1\sin(\theta + \varphi).$$

12. Parmi les $\mathfrak{M}^2$ exceptionnels il convient de mentionner ceux pour lesquels φ serait une constante et ceux pour lesquels $\varphi + \theta$ serait une constante.

Dans le premier cas, la droite d_1 garde une direction constante dans le plan mobile et, dans le second, elle conserve au contraire une direction fixe dans le plan fixe.

Si φ est constant on peut amener AX à être parallèle à la direction δ_1, ce qui revient à dire qu'on peut supposer $\varphi = 0$.

Les formules (33) deviennent alors

$$(35) \qquad \begin{cases} x_1 = u\sin\theta + \alpha_1 + x\cos\theta - y\sin\theta, \\ y_1 = -u\cos\theta + \beta_1 + x\sin\theta + y\cos\theta. \end{cases}$$

De plus, les valeurs de ξ, η, ξ_1, η_1 sont alors

$$(36)\qquad \begin{cases} \xi = u + f(\theta), & \eta = g(\theta), \\ \xi_1 = -1, & \eta_1 = 0. \end{cases}$$

Mais on peut peut prendre $u + f(\theta)$ pour nouvel u ou, ce qui revient au même, supporter que $f(\theta)$ est nul ([1]).

Du reste, les équations (34) donnent alors

$$\alpha'_1 = -g(\theta)\sin\theta, \qquad \beta'_1 = g(\theta)\cos\theta,$$

tandis que la formule (34bis) devient

$$n = u.$$

13. Si, au contraire, ψ est constant, ou $\theta + \varphi = \psi = \text{const.}$, la droite d_1 a une direction fixe dans le plan fixe Π_1 et la translation rectiligne $\mathcal{E}^1$ également. La quantité $1 + \varphi'$ *est alors nulle*.

En amenant A_1X_1 à être parallèle à la droite d_1 qui a une direction constante dans le plan Π_1, on pourra supposer $\theta + \varphi = 0$.

Les équations (33) deviennent alors

$$(37)\qquad \begin{cases} x_1 = \phantom{-u+{}} \alpha_1 + x\cos\theta - y\sin\theta, \\ y_1 = -u + \beta_1 + x\sin\theta + y\cos\theta. \end{cases}$$

Ces formules représentent bien un mouvement plan quelconque à un paramètre, composé avec une translation de direction fixe, d'amplitude arbitraire.

Les formules qui donnent ξ, η, ξ_1, η_1 se réduisent alors à

$$(38)\qquad \begin{cases} \xi = f(\theta), & \eta = g(\theta), \\ \xi_1 = -\sin\theta, & \eta_1 = -\cos\theta. \end{cases}$$

Or, ici encore, on peut prendre $u - \beta_1$ pour nouvel u, ce qui revient à supposer $\beta_1 = 0$.

Les formules (34) donnent alors pour $f(\theta)$, $g(\theta)$ et n ces

---

([1]) Notons ici que, dans le cas général d'un $\mathfrak{M}^2$ exceptionnel, les formules (33) en y changeant $u - s$ en u, où s représente une fonction convenable de θ, permettent de donner une forme spéciale à la définition du mouvement. On peut, par exemple, faire en sorte que le mouvement $u = \text{const.}$ donne pour trajectoire au point A une courbe normale à la direction de la translation.

Nous n'insisterons pas sur ces points de détail.

expressions :

$$f(\theta) = \alpha'_1 \cos\theta, \qquad g(\theta) = -\alpha'_1 \sin\theta, \qquad n = \alpha'_1.$$

Nous aurons du reste à revenir sur ces $\mathfrak{M}^2$ exceptionnels et cela pour le motif suivant :

Dans ces $\mathfrak{M}^2$ la droite d_1 ayant une direction constante tantôt dans le plan Π, tantôt dans le plan Π_1, elle ne dépend que d'un seul paramètre dans l'un ou l'autre de ces plans.

Nous nous trouvons donc amenés à étudier le problème général des $\mathfrak{M}^2$ pour lesquels la droite d_1 ne dépend que d'un paramètre dans l'un ou dans l'autre plan.

V. — Cas où la droite d_1 ne dépend que d'un seul paramètre. Cas général.

14. Le résultat saillant de la recherche est le suivant : *Si la droite d_1 ne dépend que d'un paramètre dans le plan Π, elle ne dépend aussi que d'un paramètre dans le plan Π_1, et réciproquement.*

De plus ces deux paramètres sont indépendants.

Nous supposerons d'abord le cas général, où φ est indépendant de θ, et où θ, φ ont pu être pris comme variables de position.

Si la droite d_1 ne dépend que d'un paramètre dans le plan Π, φ, n'étant pas supposé constant, est ce paramètre. Dès lors, eu égard à l'équation (13) de la droite d_1, n doit être une simple fonction de φ. Nous poserons, en conséquence,

$$(39) \qquad n = \Phi'(\varphi),$$

où Φ' est la dérivée d'une fonction Φ de φ.

L'équation (17) donne alors :

$$\Phi''' + \Phi' - \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} + \frac{\partial \rho}{\partial \theta} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial(\rho - \Phi - \Phi'')}{\partial \varphi} = \frac{\partial(\rho - \Phi - \Phi'')}{\partial \theta},$$

ce qui manifeste que $\rho - \Phi - \Phi''$ est une fonction de $\theta + \varphi$.

Posons en conséquence

$$(40)\qquad \varphi - \Phi - \Phi' = F(\psi), \qquad \psi = \theta + \varphi.$$

La droite d_1 enveloppe dans le plan Π une courbe (e) qu'elle touche en un point E.

Il peut arriver que $\Phi'(\varphi)$ soit une fonction de la forme

$$A \sin\varphi + B\cos\varphi$$

et que l'enveloppe se réduise à un point.

Dans tous les cas, la droite d_1 ayant pour équation

$$x \sin\varphi - y\cos\varphi + \Phi'(\varphi) = 0,$$

se donner $\Phi'(\varphi)$ revient à se donner l'enveloppe (e).

15. Nous allons montrer que *la droite d_1 possède aussi une enveloppe dans le plan* Π_1.

Cherchons à cet effet, en effectuant la transformation (2) dans l'équation précédente, l'équation de la droite d_1 dans le plan Π_1; il viendra

$$(a + X_1\cos\theta + Y_1\sin\theta)\sin\varphi - (b - X_1\sin\theta + Y_1\cos\theta)\cos\varphi + \Phi' = 0.$$

ou

$$X_1\sin(\varphi+\theta) - Y_1\cos(\varphi+\theta) + a\sin\varphi - b\cos\varphi - \Phi' = 0.$$

Il suffira à notre but de prouver que la quantité n_1,

$$(41)\qquad n_1 = a\sin\varphi - b\cos\varphi + \Phi',$$

est une simple fonction de $\psi = \varphi + \theta$.

Or nous avons d'abord

$$\frac{\partial n_1}{\partial\varphi} = \frac{\partial a}{\partial\varphi}\sin\varphi - \frac{\partial b}{\partial\varphi}\cos\varphi + a\cos\varphi + b\sin\varphi + \Phi''.$$

D'autre part, puique $\varphi = u$, d'après les équations (4),

$$\frac{\partial a}{\partial\varphi} = -\xi_1, \qquad \frac{\partial b}{\partial\varphi} = -\eta_1,$$

en sorte que

$$\frac{\partial n_1}{\partial \varphi} = -\xi_1 \sin\varphi - \eta_1 \cos\varphi + a \cos\varphi + b \sin\varphi - \Phi'',$$

ou, d'après les formules (18),

$$\frac{\partial n_1}{\partial \varphi} = a \cos\varphi + b \sin\varphi + \Phi'' - \rho$$

et, d'après la valeur (40) de ρ,

$$(42) \qquad \frac{\partial n_1}{\partial \varphi} = a \cos\varphi + b \sin\varphi - (\Phi + F).$$

D'un autre côté, en différentiant l'équation (41) par rapport à θ, il viendra

$$\frac{\partial n_1}{\partial \theta} = \frac{\partial a}{\partial \theta} \sin\varphi - \frac{\partial b}{\partial \theta} \cos\varphi.$$

Mais, en vertu des équations (4),

$$\frac{\partial a}{\partial \theta} = -\xi + b, \qquad \frac{\partial b}{\partial \theta} = -\eta - a;$$

il vient donc

$$\frac{\partial n_1}{\partial \theta} = b \sin\varphi + a \cos\varphi - \xi \sin\varphi + \eta \cos\varphi,$$

ou, d'après les équations (18),

$$(43) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial n_1}{\partial \theta} &= b \sin\varphi + a \cos\varphi - \Phi'' - \rho \\ &= b \sin\varphi + a \cos\varphi - (\Phi + F). \end{aligned}$$

On reconnaît ainsi tout d'abord que

$$\frac{\partial n_1}{\partial \varphi} = \frac{\partial n_1}{\partial \theta},$$

ou que n_1 est une fonction de $\psi = \varphi + \theta$; nous poserons

$$(44) \qquad n_1 = \Psi'(\psi),$$

de même que nous avons posé $n = \Phi'(\varphi)$. L'équation de la droite d_1, dans le plan Π, s'écrit alors

$$(45) \qquad X_1 \sin\psi - Y_1 \cos\psi + \Psi'(\psi) = 0,$$

en sorte que se donner $\Psi'(\psi)$ revient à se donner la courbe (e_1) à laquelle la droite d_1 reste tangente dans le plan Π_1.

Si $\Psi'(\psi)$ se réduit à une fonction linéaire de la forme $A_1 \sin\psi + B_1 \cos\psi$, l'enveloppe (e_1) se réduit à un point.

Ainsi se trouve d'abord établie, du moins dans le cas général, cette proposition que, *si d_1 a une enveloppe dans le plan* Π, *elle en a aussi une autre dans le plan* Π_1.

La considération du mouvement inverse suffit à démontrer la réciproque de cette proposition.

Ajoutons que, puisque φ est indépendant de θ, les paramètres φ et ψ sont indépendants l'un de l'autre.

Chacune des enveloppes est définie, dans le plan Π, par la fonction Φ' et dans le plan Π_1 par la fonction $\Psi'(\psi)$. Ces éléments suffisent pour définir complètement le mouvement.

16. Nous allons, pour le mettre en évidence, montrer que la fonction F s'exprime aisément au moyen de la fonction Ψ.

Partons en effet de

$$n_1 = a \sin\varphi - b \cos\varphi + \Phi' = \Psi',$$

on en tire

$$\frac{\partial a}{\partial\theta} \sin\varphi - \frac{\partial b}{\partial\theta} \cos\varphi = \Psi'';$$

en remplaçant $\frac{\partial a}{\partial\theta}$, $\frac{\partial b}{\partial\theta}$ par leurs valeurs tirées des équations (4), on aura

$$b \sin\varphi + a \cos\varphi - \xi \sin\varphi + \eta \cos\varphi = \Psi'',$$

ou, d'après les équations (18),

$$b \sin\varphi + a \cos\varphi - \Phi - \rho = \Psi''$$

et, en vertu de la valeur de ρ,

$$b \sin\varphi + a \cos\varphi - (\Phi + F) = \Psi''.$$

Différentions encore par rapport à θ, nous aurons

$$\frac{\partial b}{\partial\theta} \sin\varphi + \frac{\partial a}{\partial\theta} \cos\varphi - F' = \Psi''';$$

utilisons encore les équations (4), il viendra

$$b\cos\varphi_1 - a\sin\varphi_1 - \xi\cos\varphi_1 - \eta\sin\varphi_1 - F' = \Psi'''.$$

Les équations (18) transforment cette équation en

$$b\cos\varphi_1 - a\sin\varphi_1 - n - F' = \Psi''',$$

ou

$$b\cos\varphi_1 - a\sin\varphi_1 - \Phi' - F' = \Psi'''.$$

Or, d'après l'équation (41),

$$n_1 = -b\cos\varphi_1 + a\sin\varphi_1 - \Phi' = \Psi',$$

l'équation précédente se réduit à

$$F' = -\Psi' - \Psi'''.$$

Intégrons, en faisant rentrer dans Ψ la constante d'intégration; il vient

$$(46) \qquad F = -(\Psi + \Psi'').$$

En résumé, puisque

$$(47) \qquad n = \Phi', \qquad \varphi = \Phi + \Phi'' - F = \Phi + \Phi'' - \Psi - \Psi'',$$

les formules (18) deviennent ici

$$(48) \qquad \begin{cases} \xi = \Phi'\cos\varphi_1 - [\Phi - \Psi - \Psi'']\sin\varphi_1, \\ \eta = \Phi'\sin\varphi_1 - [\Phi - \Psi - \Psi'']\cos\varphi_1, \\ \xi_1 = \quad [\Phi + \Phi'' - \Psi - \Psi'']\sin\varphi_1, \\ \eta_1 = -[\Phi + \Phi'' - \Psi - \Psi'']\cos\varphi_1. \end{cases}$$

17. La nature de ce mouvement $\mathfrak{M}^2$ est aisée à comprendre.

Soient E, E_1 les points où les enveloppes (e), (e_1) sont touchées par la droite d_1.

Quand on laisse ψ_1 constant et φ_1 variable, le point E_1 est fixe, la droite d_1 est fixe dans le plan Π_1.

Dans le mouvement $\mathfrak{M}^1$ ainsi défini, la droite d_1 est donc dans le plan Π_1 le lieu du centre instantané; la courbe (e) est nécessairement le lieu de ce centre dans le plan Π, et par suite, le $\mathfrak{M}^1$ ainsi défini résulte d'un roulement sans glissement de (e) sur d_1. On reconnait en même temps que E est le point désigné

primitivement par O, qui est le centre instantané dans le $\mathfrak{M}^1$ pour lequel ψ reste constant.

Supposons au contraire un $\mathfrak{M}^1$ pour lequel φ reste constant ; le point E où d_1 touche (e) est alors fixe et la droite est fixe dans le plan Π. Elle est le lieu du centre instantané, donc le lieu du même centre dans le plan Π_1 est la courbe (e_1) à laquelle d_1 reste tangente ; $\mathfrak{M}^1$ consiste donc alors en un roulement sans glissement de d_1 sur la courbe (e_1). On reconnait en même temps que le point de contact E_1 est le centre instantané déjà désigné par O_1 qui correspond au mouvement $\mathfrak{M}^1$ à φ constant.

Si l'on fait varier à la fois φ et ψ, la courbe (e) roule sur d_1 sans glisser en même temps que d_1 roule sans glisser sur (e_1).

Imaginons que l'on matérialise la droite d_1 sous la forme d'une tige d et soit Π_0 un plan solidaire de la tige d.

Le mouvement de Π par rapport à Π_0 est le roulement de (e) sur d, sans glissement, tandis que le mouvement de Π_0 par rapport à Π_1 résulte du roulement sans glissement de d sur (e_1).

Du reste, ces roulements s'effectuent INDÉPENDAMMENT l'un de l'autre.

Cette remarque met ainsi en parfaite évidence le caractère du $\mathfrak{M}^2$ considéré d'être décomposable (¹).

18. Mais on peut donner de ce $\mathfrak{M}^2$ une autre définition encore plus simple.

Sur la droite d précédente, supposée matérialisée, prenons un point P ; dans le roulement sur (e_1) de d, le point P engendre une développante (a_1) de (e_1), qui est normale en P à la droite d, tandis que, dans le roulement de d sur (e), le même point engendrait une développante (a) de la courbe (e). En réalité, dans le roulement de (e) sur d, la courbe (a), solidaire de (e), passe constamment par P en y coupant d à angle droit. En conséquence,

---

(¹) Si S, S_1 sont deux solides offrant le degré m de liberté l'un par rapport à l'autre, le mouvement $\mathfrak{M}^m$ qu'ils réalisent est dit décomposable si l'on peut trouver un corps S_0, tel que le mouvement $\boxed{S, S_0}$ dépende de p paramètres u_1, $u_2, \ldots, u_p$ et le mouvement $\boxed{S_0, S_1}$ de $m-p$ paramètres $v_1, v_2, \ldots, v_{m-p}$, indépendants des premiers.

dans toutes les positions appartenant au $\mathfrak{M}^2$, la courbe (a) et la courbe (a_1) sont tangentes au point P de d; mais, par un roulement de (e) sur d, on peut amener tout point M de (a) à venir en P, tandis que, par un roulement de d sur (e_1) indépendant du premier roulement, on peut amener P à coïncider avec tout point M_1 de (a_1).

En définitive, $\mathfrak{M}^2$ *est défini par la condition que les courbes* (a), (a_1) *soient tangentes entre elles, le point de contact pouvant être simultanément un point quelconque* M *sur* (a) *et un point quelconque* M_1 *sur* (a_1).

(*A suivre.*)

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

GOURSAT (Édouard). — *Cours d'Analyse mathématique.* Cours de la Faculté des Sciences de Paris. Tome I : *Dérivées et différentielles. Intégrales définies. Développements en série. Applications géométriques.* 3e édition revue et augmentée. 1 vol. in-8 (25-16), VII-668 pages, avec 45 figures. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1917. Prix : 25 fr.

FRENET (F.). — *Recueil d'exercices sur le Calcul infinitésimal.* 7e édition, avec un *Appendice* par M. H. LAURENT, et *un Formulaire concernant les fonctions elliptiques*, par R. DE MONTESSUS DE BALLORE. 1 vol. in-8 (23-14) de XIV-556 pages, contenant 725 questions avec solutions. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1917. Prix : 9 fr.

VOGT (H.). — *Éléments de Mathématiques supérieures*, à l'usage des physiciens, chimistes et ingénieurs, et des élèves des Facultés des Sciences. 7e édition. 1 vol. in-8 (25-16), VIII-708 pages, avec figures. Paris, Vuibert, 1916. Prix : 12 fr.

(Il existe une édition réduite à l'usage des élèves chimistes et des élèves des écoles industrielles. Prix : 7 fr.)

Den tredje Skandinaviske Matematikerkongres i Kristiania 1913. beretning utarbeidet ved Carl Störmer. 1 vol. in-8jésus, III-174 pages. Kristiania, H. Aschehoug (W. Nygaard), 1915.

Les deux premiers Congrès des mathématiciens scandinaves ont eu lieu à Stockholm en 1909 et à Copenhague en 1911. Ainsi qu'il avait été convenu lors du Congrès de Copenhague, M. le Professeur Störmer convoqua un certain nombre de mathématiciens à une réunion, le 22 mai 1913, afin de délibérer sur les préparatifs d'un Congrès des mathématiciens scandinaves devant être tenu à Christiania à l'automne de la même année. Il fut élu, pour s'occuper des travaux préparatoires du Congrès, un Comité composé de MM. le professeur Störmer, président; Alf Guldberg, chargé de cours; Palmström, actuaire; Thrane, directeur d'assurances; Alfsen, professeur de Lycée; le D[r] Vegard; M. Viggo Brun, boursier de l'Université. Plus tard ce Comité fut renforcé par l'adjonction de MM. Holtsmark, actuaire, et M. Asbj. Isaksen, secrétaire.

Le Congrès eut lieu les 4, 5 et 6 septembre, et la fête de réception le 3 septembre au soir.

Le Congrès fut ouvert en présence de S. M. le Roi; M. le professeur Störmer y prononça une Allocution dont il convient de détacher les lignes suivantes :

C'est lors du Congrès international des mathématiciens à Rome, en 1908, que M. le professeur Mittag-Leffler nous fit part, à M. le professeur Zeuthen et à moi, de son plan de réunir les mathématiciens scandinaves à un Congrès à Stockholm en 1909. Nous promîmes de travailler à la réalisation de cette idée, chacun dans notre pays, et l'on s'aperçut que la question obtenait une grande adhésion parmi les mathématiciens de la Scandinavie. Le Congrès fut tenu, et il nous est resté, à tous, le meilleur souvenir du Congrès de Stockholm de l'automne de 1909.

Le Congrès suivant de mathématiciens scandinaves eut lieu à Copenhague en 1911 et ne fut pas moins réussi.

D'une manière générale, ces deux Congrès n'ont pas seulement donné lieu à toute une série de conférences intéressantes, mais ils ont également contribué à fortifier la collaboration et le sentiment de concorde entre les mathématiciens de la Scandinavie.

Suivant le plan primitif, le prochain Congrès devait avoir lieu à Christiania cette année. Nous voyons aujourd'hui se réaliser ce projet; le Congrès a lieu et peut se réjouir d'avoir vu y adhérer non seulement beaucoup de mathématiciens norvégiens, mais encore un grand nombre de nos amis et collègues de Suède, de Danemark et de Finlande. C'est un honneur pour

moi, au nom du Comité d'organisation, d'adresser de cordiaux remerciements à ceux à qui nous devons, en première ligne, d'avoir obtenu cet heureux résultat....

En déclarant, à titre de président du Comité d'organisation, le Congrés ouvert, je donne la parole à M. le professeur Sylow, qui va faire une conférence sur les travaux d'Abel et sur les plans des derniers temps de sa vie, en les éclairant à l'aide des documents qui ont été retrouvés après la deuxième édition de ses œuvres.

A la séance du matin du 6 septembre, présidée par MM. les professeurs Lindelöf et Sundman, M. le professeur Mittag-Leffler fit savoir que S. M. le Roi Gustave V avait promis de placer le sixième Congrès international des mathématiciens à Stockholm sous ses hauts auspices et qu'il instituait un prix de mathématiques à décerner par ce Congrès.

Sa Majesté a décidé de donner, à un écrit remarquable sur un sujet se rapportant à la théorie des fonctions analytiques, une médaille d'or à l'effigie de Karl Weierstrass, en même temps qu'une somme de 3000 couronnes.

Le Congrès se termina le samedi soir 6 septembre par un dîner de gala dans la grande Salle des Fêtes du Grand Hôtel. A ce dîner prirent part, outre les membres du Congrès, M. Lövland, président du Storthing; M. Ihlen, ministre des Affaires étrangères; M. le Chambellan Otto Krag, ministre de Danemark; M. C. G. Westmann, chargé d'affaires de Suède; les directeurs des Compagnies d'assurances qui avaient fourni des allocations au Congrès, etc.

M. le professeur Störmer porta la santé des hôtes suédois, danois et finlandais, en faisant ressortir tout spécialement la grande importance des travaux du Congrès.

M. le professeur Mittag-Leffler remercia, au nom des mathématiciens suédois, et dit, entre autres choses :

Qu'il me soit permis d'exprimer, ce que je suis certain que nous ressentons et reconnaissons tous, que le Congrès qui vient de se terminer à Christiania a répondu en tous points aux prévisions même les plus hautes qu'aucun de nous ait espéré pouvoir se réaliser.

Je crois que la conviction que beaucoup d'entre nous avons eue, et spécialement nous qui sommes membres de la rédaction de notre Journal, *Acta mathematica*, je veux dire la conviction que les pays scandinaves, la Suède, la Norvège, le Danemark et la Finlande, considérés comme un tout, pourront, avec succès et honorablement, en ce qui concerne les sciences mathématiques, rivaliser avec n'importe lequel des grands pays

de la civilisation, sera partagée à l'avenir par nous tous. On a suivi plutôt certaines directions dans certains pays que dans les autres; mais, si l'on jette un coup d'œil d'ensemble sur tout ce qui a été fait et se fait dans chacun de nos divers pays, je crois que l'on en arrivera à cette conception que les travaux de recherches mathématiques en Scandinavie comprennent toutes les branches principales des sciences mathématiques.

Puissions-nous tous, chacun dans son pays, nous efforcer de faire naître, chez les mathématiciens qui se réuniront à Stockholm en 1916, ou de rendre plus profonde chez eux, si elle existe déjà, la conviction de la vérité de ce que je viens d'exprimer ici. C'est en formant ce vœu que je souhaite à tous les mathématiciens scandinaves, à ceux qui sont ici présents et à ceux qui ont été empêchés, la bienvenue à Stockholm en 1916.

Au sujet des conférences publiées, il y a lieu de faire remarquer que les conférenciers : MM. Niels Nielsen, Hjemslev, Juel, Bjerknes, Sundman et Palmström ont exprimé le désir que seulement ce qui suit fût publié dans le compte rendu :

M. le professeur Niels Nielsen fait savoir qu'un grand travail, dont sa conférence est une petite partie, est publié dans les *Annali di Matematica pura ed applicata*, Milan, 1914, sous le titre : *Recherches sur les suites régulières et les nombres de Bernoulli et d'Euler*, et *Sur le théorème de v. Staudt et de Th. Clausen relatifs aux nombres de Bernoulli.*

Relativement au contenu de sa seconde conférence, M. le professeur Hjelmslev renvoie à son Livre, publié peu de temps après le Congrès, *Expériences géométriques* (Copenhague, 1913).

M. le professeur Juel fait connaître qu'il préfère ne pas laisser paraître séparément sa conférence, mais la refondre avec d'autres de ses écrits; elle paraîtra probablement sous cette forme dans *Det kgl. d. Vidensk. Selsk. Forh.* (*Délibérations de la Société royale des Sciences danoise*).

M. le professeur Bjerknes ne désire que le compte rendu suivant : Comme suite à ses conférences aux deux Congrès précédents des mathématiciens scandinaves, M. le professeur Bjerknes a donné un court aperçu de l'organisation et du plan des travaux du « Geophysikalisches Institut der Universität Leipzig », créé sous sa direction.

M. le professeur Sundman désire que l'on publie ce qui suit : M. le professeur Karl F. Sundman fit la démonstration d'une machine inventée par lui pour la détermination de perturbations spéciales. Une description exacte de la machine sera publiée.

M. Palmström, actuaire, désire l'insertion de ce qui suit dans le compte rendu : La conférence était essentiellement un résumé des méthodes, développées par le conférencier et M. Hjorth dans leur « proposition de loi sur l'assurance du peuple norvégien en cas d'invalidité et de vieillesse » et dans l'Annexe 2 à cette proposition, en vue d'établir une base de calcul utilisable pour l'assurance du peuple norvégien tout entier en cas d'invalidité et de vieillesse, ainsi qu'un calcul des rentes d'invalidité sur cette base.

Les analyses des travaux de MM. Sylow, Mittag-Leffler, Marcel Riesz et Phragmén n'ont pas été envoyées par ces savants, malgré des demandes répétées. M. Sylow a 85 ans, M. Mittag-Leffler est malade. Les titres de leurs conférences sont les suivants :

L. Sylow. — *Sur les travaux d'Abel et sur les plans des derniers temps de sa vie, à la lumière des documents qui ont été trouvés après la deuxième édition de ses œuvres.*

Mittag-Leffler. — *Théorèmes fondamentaux dans la théorie des intégrales*

$$\mathfrak{I}(t) = \int_0^\infty e^{-\Theta(v)t} \mathrm{I}(v)\, dv.$$

Marcel Riesz. — *Aperçu de la théorie des séries trigonométriques.*

E. Phragmén. — *Quelques réflexions relatives à la conférence du Dr Riesz.*

A. Wiman.

Relation entre le module maximum et le terme le plus élevé d'une fonction analytique.

M. A. Wiman démontre que, $\mathrm{M}(r)$ désignant le module maximum d'une fonction entière et $m(r)$ le module du terme maximum, l'inégalité

$$\mathrm{M}(r) < m(r)[\log m(r)]^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

est vérifiée pour une infinité de valeurs de r dépassant toute limite, le nombre positif ε étant donné aussi petit que l'on veut.

Gustaf Strömberg.

Analyse des variations de la température de l'air à Stockholm, de 1894 à 1911.

Pour constater si une variation perceptible dans la température de l'air correspondant au mouvement de la Lune pouvait être

découverte, j'ai fait en 1913 une recherche sur les variations de la température de Stockholm de 1894 à 1911.

On peut se représenter un tel effet de la Lune venu soit par des changements dans les mouvements des courants marins (surtout des courants sous-marins), soit peut-être par un effet de résonance dans les vibrations des couches atmosphériques. Il est possible que les effets de la Lune sur les variations de la température puissent être développés en une série trigonométrique dont les termes sont constitués par les vitesses angulaires dans les mouvements de la Lune et du Soleil. Ces termes peuvent être isolés par une analyse harmonique de la courbe de la température observée. Les désignations suivantes sont employées :

		Jours.
L'année tropique	P_a	$= 365,2422$
Le mois tropique	P_ζ	$= 27,32158$
Le mois anomalistique	P_π	$= 27,55455$
Le mois synodique	$P_{\zeta - a}$	$= 29,53059$
Révolution tropique du nœud ascendant de l'orbite de la Lune	P_n	$= 6798,325$

La série trigonométrique peut être écrite dans la forme suivante :

$$\Delta T = \Sigma k_{ij} \sin[(l g_a + m g_\zeta - p g_\pi - q g_n) t + K_{ij}];$$

k est l'amplitude et K l'angle de phase dans les termes différents ;

$$g_a = \frac{2\pi}{P_a}, \qquad g_\zeta = \frac{2\pi}{P_\zeta}, \qquad \text{etc.};$$

t est le nombre des jours, compté de l'année 1900 (janvier 0), temps moyen central; l, m, p et q sont des nombres entiers, positifs et négatifs ; ΔT est l'effet dans la température.

Pour un nombre de périodes entre 25 et 34 jours, les moyennes correspondant à chaque douzième de la période sont formées pour toute la série d'observation, et après cela un terme sinus est déterminé (éventuellement avec ses harmoniques) qui correspond à la variation dans ses douze moyennes.

Pour désigner les différentes périodes, les indices de P sont les mêmes que celles des vitesses angulaires.

Dans cette analyse, les termes suivants donnaient les amplitudes les plus générales :

Période en jours.	Amplitude.	Angle de phase.	Premier harmonique. Amplitude.	Premier harmonique. Angle de phase.
$P_{\delta} = 27,322$.......	0°,187	187°	»	»
$P_{\delta-a} = 29,531$.......	0,186	125	»	»
$P_{\delta+a} = 25,420$.......	0,184	124	»	»
$P_{\pi} = 27,555$.......	0,136	237	0°,160	116°
$P_{\delta+n-a} = 29,403$.......	0,127	204	»	»
$P_{\delta-n-a} = 29,659$.......	0,125	196	»	»
$P_{2\delta-\pi} = 27,092$.......	0,189	206	»	»
$P_{\delta-2a} = 32,128$.......	0,154	216	»	»
$P_{4\delta-3\pi} = 26,646$.......	0,215	74	»	»

Un grand nombre des termes donnaient des amplitudes moindres que 0°,05 C. Plusieurs des grands termes sont combinés deux à deux en des produits.

On peut supposer que les longueurs des périodes sont inconnues et chercher la série trigonométrique qui représente les variations observées. Le développement trigonométrique a une valeur réelle seulement dans le cas où l'on a fixé les longueurs d'onde qui représentent les amplitudes *les plus grandes*.

Un examen systématique de toutes les longueurs d'onde est probablement plus juste que l'analyse harmonique pour un nombre d'années arbitraire, parce que les longueurs d'onde, qui sont examinées dans le dernier cas, furent dépendantes de la longueur du matériel d'observation (¹).

J.-F. STEFFENSEN.

Sur la représentation analytique de quelques sommes appartenant à la théorie des nombres.

Soit donnée une série de Dirichlet

$$(1) \qquad \varphi(s) = \sum_{1}^{\infty} n^{-s} f(n).$$

(¹) **Bibliographie** : G. STRÖMBERG, *Harmonic analysis of the air-temperature in Stockholm* 1894-1911, *based on the periods of motion of the Sun and the Moon* (*Svenska Hydrografisk-Biologiska Commissionens Skrifter*, vol. V, Gothenburg, 1914); — *On a method for studying a certain class of regularities in a series of observations with application to the temperature-curve of Uppsala* (*Inaugural-Dissertation*, Vesteraas, 1915).

absolument convergente pour $R(s) > 1$. Posons

$$(2) \qquad b(x) = \sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n} \right) f(n).$$

On aura [1]

$$(3) \qquad b(x) = \sum_1^{\infty} x^{\nu} \varphi(\nu+1) = -\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{x^z \varphi(z+1)}{e^{2\pi i z}-1} dz,$$

la série étant convergente pour $|x| < 1$, et l'intégrale pour toute valeur de x n'appartenant pas à l'axe positif. Si l'on pose

$$\mu = \nu - k,$$

où ν désigne un nombre entier positif et k une quantité comprise entre 0 et 1, on aura

$$(4) \qquad S(\nu) = \sum_1^{\nu} f(n) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} b(x)\, dx,$$

en désignant par γ un cercle autour de l'origine, de rayon μ. On obtient ensuite, par (3), en posant

$$x = \mu e^{i\theta},$$

et en intégrant de

$$\theta = \varepsilon > 0 \qquad \text{à} \qquad \theta = 2\pi - \varepsilon,$$

$$(5) \quad \sum_1^{\nu} f(n) = \lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \mu^{z+1} \frac{\sin[(\pi-\varepsilon)(z-1)]}{\sin[\pi(z-1)]} \frac{\varphi(z-1)}{z+1} dz.$$

formule trouvée déjà d'une autre manière par Mellin.

Une formule analogue est établie pour la somme

$$\sum_1^{\nu} \frac{f(n)}{n},$$

et, en combinant les deux sommes précédentes, on trouve une expression dans laquelle il est permis de permuter les opérations infinitésimales. Le résultat est la formule *absolument et unifor-*

---

[1] *Ueber eine Klasse von ganzen Funktionen und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie* (*Acta mathematica*, t. XXXVII, p. 87).

mément convergente en μ

$$(6)\qquad \sum_{1}^{\nu-1}\frac{S(n)}{n(n+1)}-\frac{kS(\nu)}{\nu(\nu-k)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{\mu^{z}}{z(z+1)}\varphi(z-1)\,dz\;(\alpha>0).$$

Cette formule doit être comparée à une formule que j'ai démontrée ailleurs [1] d'une manière différente, et que voici :

$$(7)\qquad \sum_{1}^{\nu-1}S(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\frac{\nu^{z+1}}{z(z+1)}\varphi(z)\,dz\qquad(b>1).$$

Ces deux formules pourront, du reste, aussi être démontrées par combinaison de formules non absolument convergentes du type introduit par Riemann.

En spécialisant la fonction $\varphi(z)$ on réussit, d'une manière analogue à celle suivie par Landau, à démontrer que la formule établie par de la Vallée Poussin pour le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée est

$$(8)\qquad \pi(x)=\int_{2}^{x}\frac{dt}{\log t}+O\left(xe^{-\lambda\sqrt{\log x}}\right)\qquad(\lambda>0).$$

N. E. Nörlund.

Sur les séries de facultés.

Il s'agit de séries de la forme

$$\Omega(x)=\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{a_{s+1}\,s\,!}{x(x+1)\ldots(x+s)},$$

où les a_s sont indépendants de x. Le domaine de convergence est un demi-plan $\mathcal{R}(x)>\lambda$, λ étant l'abscisse de convergence. La série est uniformément convergente dans le domaine $\mathcal{R}(x)\geq\lambda+\varepsilon$, ε étant un nombre positif.

---

(1) *Ueber Potenzreihen, im besonderen solche, deren Koeffizienten zahlentheoretische Funktionen sind* (*Rendiconti di Palermo*, t. XXXVIII, p. [illegible]).

La série de facultés est un instrument analytique, très utile quand il s'agit d'étudier une fonction analytique au voisinage d'un point singulier et d'en trouver une représentation analytique qui reste convergente quand on s'approche du point singulier en restant dans un certain angle. L'auteur étudie ainsi les intégrales irrégulières des équations différentielles linéaires et des équations aux différences finies. Il n'y a pas en général de point singulier sur la ligne de convergence. Mais la série peut se transformer en une autre de la même forme, convergente dans un domaine qui s'approche autant que l'on veut d'un point singulier.

L. Vegard.

L'influence d'un champ de gravitation sur un mélange liquide arbitraire.

M. Vegard donne une exposition d'une série de recherches sur les mélanges liquides qu'il avait déjà publiée dans beaucoup de ses travaux. Les résultats contiennent entre autres choses une solution complète du problème suivant : Donner un mélange liquide contenant un nombre de composants quelconque, qui est dans un état d'équilibre sous l'action d'un champ de gravitation; on cherche la concentration dans les divers points du liquide.

Le problème est résolu de deux manières qui donnent le même résultat. Une méthode emploie exclusivement les potentiels thermo-dynamiques, l'autre fait usage de la pression osmotique, ceci étant déjà défini et déterminé pour des solutions contenant un nombre quelconque de composants.

Avec une solution de $(r+1)$ composants on peut former

$$\sum_{j=1}^{j=r} \frac{(r+1)!}{j!\,(r-j+1)!}$$

pressions osmotiques. Les plus importantes sont les pressions osmotiques partielles correspondant à $j=r$ et les pressions osmotiques de premier ordre correspondant à $j=1$. Les deux classes sont déterminées par les potentiels thermo-dynamiques. Les variations des concentrations sont données par les équations sui-

vantes :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial e_1} & \frac{\partial f_1}{\partial e_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial e_r} \\ \frac{\partial f_2}{\partial e_1} & \frac{\partial f_2}{\partial e_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial e_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial e_1} & \frac{\partial f_r}{\partial e_2} & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial e_r} \end{vmatrix} de_i = du \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial e_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial e_{i-1}} & \alpha_1 & \frac{\partial f_1}{\partial e_{i+1}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial e_r} \\ \frac{\partial f_2}{\partial e_1} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial e_{i-1}} & \alpha_2 & \frac{\partial f_2}{\partial e_{i+1}} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial e_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial e_1} & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial e_{i-1}} & \alpha_r & \frac{\partial f_r}{\partial e_{i+1}} & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial e_r} \end{vmatrix}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, r).$$

e_i est la concentration du composant i; u est le potentiel de gravitation, $\alpha_i = q_i S - 1$, où q_i est le volume spécifique du composant i dans la solution; S est la densité de la solution.

L'équation a été spécialisée pour le cas d'une solution en rotation. Le conférencier a aussi déterminé la variation de composition selon la hauteur dans une solution binaire sous l'action du champ de gravitation de la terre, et les valeurs numériques sont calculées pour le sucre de canne et l'hydrate de potassium. En ce dernier cas, il faut connaître le degré de dissociation.

Poul Heegaard.

Contribution à la théorie des graphes.

On regarde une graphe régulière de troisième ordre, de degré $2n$, sans feuilles et située sur une surface fermée de même connexion que la sphère. Soit T un arbre formé de $2n-1$ des segments de ligne de la graphe. Nous écrivons successivement a, b, a_1, b_1, ..., à côté des segments dans l'ordre dans lequel nous les rencontrons parcourant une ligne fermée infiniment voisine des segments de la graphe, côtoyant les segments de l'arbre, mais traversant les autres lignes chacune une fois de chaque côté. Nous désignons les segments de ligne qui contiennent deux a par α, ceux qui contiennent deux b par β, et ceux qui contiennent un a et un b par γ : telle « la distribution de lettres grecques provenant de l'arbre J ». Les points de la graphe dont les trois segments de ligne sont désignés par trois lettres différentes sont appelés *ordinaires*, les autres, où il y a trois γ, *singuliers*. La caractéristique d'un segment de ligne est par définition 0, quand sa lettre est α ou β, et 1, quand sa lettre est γ.

L'auteur indique des règles simples pour la détermination des caractéristiques appartenant à un arbre T donné. Une transformation fondamentale des caractéristiques résulte du changement dans les caractéristiques quand l'arbre T est remplacé par un arbre T′, qui a $2n-2$ segments de ligne communs avec T. Les transformations fondamentales se partagent en quatre espèces, dont les propriétés sont étudiées. Puis on cherche l'influence d'une transformation fondamentale sur le nombre de points singuliers. Le problème consistant à déterminer une série de transformations fondamentales, telle que le nombre de points singuliers devienne 0, est identique au problème de quatre couleurs, pour les régions dans lesquelles la surface fermée est divisée par les segments de ligne de la graphe. Si le nombre de côtés dans toutes les régions est pair, le problème est facile à résoudre.

J. L. W. V. Jensen.

I. *Quelques inégalités de la théorie des équations.*

Soit

$$a_0 x^m + \binom{m}{1} a_1 x^{m-1} + \binom{m}{2} a_2 x^{m-2} + \ldots + a_m = 0, \qquad a_0 \neq 0, \qquad a_m \neq 0,$$

une équation de degré m et écrite avec des coefficients binomiaux, les coefficients a_μ étant complexes.

Soient les équations

$$C = \max \left| \sqrt[\mu]{\frac{a_\mu}{a_0}} \right| \qquad \text{et} \qquad C' = \min \left| \sqrt[\mu]{\frac{a_m}{a_{m-\mu}}} \right|,$$

pour $\mu = 1, 2, \ldots, m$. En désignant par ρ le plus grand et par ρ' le plus petit des modules des racines de l'équation, on a

$$C \leqq \rho \leqq \frac{C}{\sqrt[m]{2}-1} \qquad \text{et} \qquad C' \geqq \rho' \geqq (\sqrt[m]{2}-1)\, C';$$

les signes d'égalité sont indispensables.

II. *Une expression nouvelle pour la fonction numérique*

$$M(m) = \sum_{n=1}^{m} \mu(n),$$

où $\mu(n)$ désigne le facteur de Möbius.

L'expression est la suivante :

$$\sum_{f_m} e^{2i\pi h f_m} = \sum_{\alpha h} d \mathrm{M}\left[\mathrm{E}\left(\frac{m}{d}\right)\right],$$

où f_m parcourt 1 et toutes les fractions positives et irréductibles < 1 dont les dénominateurs sont $\leq m$, et d parcourt les diviseurs du nombre entier et positif h. Pour $h = 1$ on a

$$\sum_{f_m} e^{2i\pi f_m} = \mathrm{M}(m).$$

THORALF SKOLEM.

Sur la constitution des groupes du calcul identique.

M. Skolem donna au début un aperçu des opérations et notions fondamentales du calcul des propositions et des classes. Il a démontré un théorème général sur les groupes de classes ou de propositions qui, à l'aide des trois opérations fondamentales logiques, peuvent être dérivés d'un nombre quelconque de classes ou de propositions données. D'après cela, il a parlé des groupes par rapport à deux des trois opérations et, parmi eux, spécialement d'une catégorie particulière qui forme une continuation naturelle des groupes par rapport aux trois opérations; ensuite d'une autre forme de ces groupes dans laquelle non seulement un produit d'égalités ou d'inclusions, mais aussi une somme d'égalités, peut être exprimé comme une seule égalité; enfin des groupes qui peuvent être composés de ces derniers.

SEVERIN JOHANSSON.

Existence de potentiels automorphes pour les groupes linéaires à cercle fondamental.

Dans sa conférence, M. Johansson a donné un résumé succinct de son Mémoire : *Herstellung automorpher Potentiale im Hauptkreisfalle*, publié dans les *Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*. Ce Mémoire établit l'existence d'un potentiel automorphe pour chaque groupe linéaire discontinu admettant un cercle fondamental. De plus, l'auteur y a montré que les groupes

en question se divisent en deux types essentiellement distincts, qu'il appelle respectivement le type *hyperbolique* et le type *parabolique*.

Les groupes du premier type admettent un potentiel automorphe qui est partout positif et qui, dans le domaine générateur, n'a qu'un seul point singulier, où il devient infini comme $\log \frac{1}{r}$, r désignant la distance. Pour ces groupes les séries thétafuschiennes de la dimension — 2 convergent.

Pour les groupes du type parabolique au contraire, il n'existe pas de potentiel de cette espèce, les potentiels automorphes les plus simples étant ceux qui, dans le domaine générateur du groupe, admettent deux points singuliers où ils deviennent infinis respectivement comme $\log \frac{1}{r}$ et $\log r$. Pour ces groupes les séries thétafuschiennes de dimension — 2 sont divergentes.

G. HOLTSMARK.

Rentes viagères sur deux têtes.

Après avoir mentionné les travaux de M. *A. Quiquet* sur le même sujet (Congrès international d'Actuaires, New-York, 1903; Congrès international des Mathématiciens, Rome, 1908), l'auteur a traité d'une manière élémentaire les conditions pour que

$$\frac{f_1(x+t)}{f_1(x)}\,\frac{f_2(y+t)}{f_2(y)}\,\frac{f_3(z+t)}{f_3(z)}\cdots=\left[\frac{F(w+t)}{F(w)}\right]^m,$$

où w est une fonction des $x, y, z, \ldots$, mais indépendante de t. Puis il a rappelé les résultats des applications faites avec les formules à des tables norvégiennes de survie.

CARL STÖRMER et ER. L.

BURGATTI (PIETRO). — LEZIONI DI MECCANICA RAZIONALE. 1 vol. gr. in-8°, VII-501 pages. Nicolà Zanichelli, Bologna, 1916.

Ce n'est pas un traité de Mécanique rationnelle que M. P. Burgatti présente aujourd'hui au public. C'est un ensemble de Leçons

professées par l'Auteur, sur ce sujet. En les publiant il a pour but de fournir à ses étudiants un guide sûr qui leur permette, dans la suite, d'aborder tout aussi bien les applications pratiques et journalières de la Mécanique que les applications analytiques plus étendues auxquelles conduisent les problèmes de la Mécanique céleste. En particulier, un Chapitre entier est consacré au problème des trois corps.

Dans sa conception, comme dans sa forme, cet Ouvrage reste volontairement élémentaire. L'Auteur cherche plus à développer, chez le Lecteur, la compréhension, le sens des phénomènes mécaniques que le goût de la Mécanique analytique. Non pas qu'il ait abordé en quoi que ce soit la Mécanique appliquée : c'est en vain que l'on chercherait dans son Ouvrage les notions même les plus élémentaires de Statique graphique, par exemple. Mais, dans la majorité des questions, il cherche d'abord la solution la plus intuitive, souvent même très élémentaire, et c'est seulement après qu'il l'étudie par des méthodes d'une portée plus générale et plus féconde. Ainsi, en Statique, il résout les problèmes d'équilibre d'abord par la méthode classique des réactions, ensuite par le principe des vitesses virtuelles.

L'ensemble du Livre, qui touche aux différentes parties de la Mécanique rationnelle, donne l'impression d'avoir été brossé à larges traits, limité aux généralités les plus caractéristiques, aux théories les plus immédiatement utiles dans la pratique. Les développements analytiques eux-mêmes ne sont complètement exposés à fond que dans des cas particuliers qui peuvent servir de type pour l'étudiant. Le plan de l'Ouvrage, Cinématique, Statique, Dynamique, les matières et les résultats exposés sont classiques. Ce qui caractérise ce Livre et frappe surtout le Lecteur français c'est l'emploi voulu et systématique du *calcul vectoriel*. L'Auteur reproche à la méthode cartésienne, indispensable dans les applications, d'être souvent encombrante dans l'étude des théories physiques. L'étudiant préoccupé de vaincre les difficultés de calcul perd de vue les principes fondamentaux, et les développements analytiques viennent souvent lui masquer les idées simples, précises et nettes qu'il devrait avoir de la Mécanique. Je crois que c'est là une remarque souvent faite par tous ceux qui ont enseigné la Mécanique, au moins à des débutants. En Dynamique, ils sont

hypnotisés par le système d'équations différentielles à intégrer et, en Statique, ils n'ont que le souvenir des six équations universelles d'équilibre, ne se doutant même pas que, dans la pratique, les positions d'équilibre présentent moins d'intérêt que le calcul des réactions et des tensions, ces positions étant généralement évidentes ou intuitives par des considérations des plus élémentaires. Voulant éviter cette difficulté et préparer le Lecteur aux études de la Physique mathématique, M. Burgatti a introduit dès le début le calcul vectoriel. La généralité de ce calcul qui s'applique si aisément à toutes les branches de la Physique mathématique, Électricité et Magnétisme, Élasticité, Hydrostatique et Hydrodynamique, sa clarté, sa concision, sa rapidité, en font un instrument scientifique de premier ordre et qui n'est pas dépourvu de valeur éducative. Mais puisque l'Auteur introduit le calcul vectoriel pour rester entièrement dans le domaine de la Mécanique et aborder, chemin faisant, certains problèmes de Physique mathématique, je ne suis pas d'accord avec lui sur la façon d'en exposer les principes et les résultats qui doivent lui être utiles. Il a complètement adopté les notations, les définitions et les conceptions de MM. C. Burali-Forti et R. Marcolongo. Autrement dit, il est resté trop abstrait dans un sujet concret, il a considéré la théorie des vecteurs d'abord en elle-même et non de suite au point de vue de ses applications.

Cette façon de procéder paraît forcément artificielle et abstraite parce qu'elle est entièrement *a priori*, de plus elle conduit à certaines inexactitudes qui ont déjà été relevées souvent par les physiciens. C'est ainsi qu'il est nécessaire de distinguer entre *vecteur polaire* et *vecteur axial*. Les composantes du premier changent de signe dans un renversement des axes, puisque le sens de la grandeur projetée ne change pas; au contraire les composantes du second ne sont pas modifiées par ce renversement qui change à la fois le sens de la droite qui représente la grandeur considérée et le sens positif sur chacun des trois axes. Une force, une vitesse sont représentables par un vecteur polaire; un couple, une vitesse angulaire par un vecteur axial. M. Burgatti, suivant en cela, je le reconnais, la théorie des quaternions et le développement ultérieur de l'Analyse vectorielle, n'a pas tenu compte de cette différence. Des physiciens et non des moindres, je ne citerai

parmi eux que C. Maxwell, P. Curie et M. P. Langevin, ont insisté sur la nécessité de la séparation de ces deux classes de grandeurs. On a reconnu, par exemple, que le champ électrique appartient à la classe des vecteurs polaires et le champ magnétique à celle des vecteurs axiaux.

Dans l'étude des milieux continus et des corps déformables s'introduisent les éléments les plus délicats, mais les plus utiles, de l'Analyse vectorielle. Ici ce sont les champs de grandeurs dont la théorie devient importante. Là, plus que partout ailleurs, il me semble nécessaire de ne pas perdre de vue le sens mécanique ou physique des choses. On arrive de suite aux différents éléments dont on a besoin et qui pour ainsi dire s'introduisent d'eux-mêmes. Ainsi, si l'on considère le champ d'un scalaire, fonction des coordonnées d'un point, la manière dont il varie, au premier ordre, autour d'un point, est entièrement déterminé par un vecteur, le *gradient;* si, dans un champ de vecteurs, on considère comme représentant, en chaque point, la vitesse d'un fluide qui remplirait l'espace, par exemple, la notion de *flux* à travers une surface introduite par le théorème de Gauss qui ramène une intégrale de surface à une intégrale de volume, une quantité scalaire, la *divergence*. De même, en considérant le vecteur comme une force, on obtient une quantité scalaire en calculant le travail de cette force quand son point d'application se déplace le long d'une courbe. Si cette ligne est fermée, l'application du théorème de Stokes introduit les composantes d'un vecteur axial, le *rotationnel*. On peut, et c'est ce que j'ai voulu justifier ici par quelques exemples, introduire physiquement les différentes opérations dont on a besoin. Je préfère, pour ma part, de beaucoup cette façon de procéder. Elle est plus conforme à l'intuition et évite de dire au Lecteur ou à l'Auditeur, après l'établissement de formules assez rébarbatives, que c'est dans les applications physiques ou mécaniques qu'elles prendront toute leur importance; elle apparaît de suite.

C'est une façon différente de concevoir les choses et, à cela près, je dois reconnaître que M. Burgatti, sachant bien que le Lecteur ne serait pas familiarisé avec l'Analyse vectorielle, a su graduer les difficultés. L'Auteur étudie cette Analyse dans deux Chapitres différents de son Ouvrage. Dans le premier il ne dépasse pas les notions de *produit intérieur* ou *extérieur* et de dérivées d'un

vecteur. C'est tout ce dont il a besoin pour la Cinématique, la Statique et la Dynamique du corps solide. Le second précède l'étude mécanique des milieux continus et contient les notions dont je parlais plus haut. Les deux Chapitres qui suivent, Mécanique des fluides et Élasticité, contiennent de nombreuses applications de l'Analyse vectorielle. Un dernier Chapitre très intéressant, consacré au développement de la Mécanique, termine ce Livre, qui n'est pas dépourvu d'intérêt.

EDMOND OLIVET.

MÉLANGES.

RECHERCHES SUR LES MOUVEMENTS PLANS A DEUX PARAMÈTRES

(*suite et fin*) ;

PAR M. G. KOENIGS,

Directeur du Laboratoire de Mécanique
de la Faculté des Sciences de Paris.

VI. — CAS OU LA DROITE d_1 NE DÉPEND QUE D'UN SEUL PARAMÈTRE. CAS EXCEPTIONNELS.

19. Il y a aussi des cas *exceptionnels* où la droite d_1 ne dépend que d'un paramètre dans l'un ou l'autre plan Π, Π_1.

Puisque nous nous trouvons dans le cas exceptionnel, nous devrons supposer que φ, θ soient liés par une relation.

Une première manière pour d_1 de ne dépendre que d'un paramètre dans le plan Π, dans l'hypothèse d'une équation entre φ, θ : c'est que φ soit constant, auquel cas, par une rotation de l'axe AX, on amènera φ à être nul.

C'est le cas examiné déjà au n° 12 ; nous avons vu qu'on pouvait ramener ce cas aux formules

$$(49) \qquad \xi = u, \qquad \eta = g(\theta), \qquad \xi_1 = -1, \qquad \eta_1 = 0, \qquad n = u.$$

La droite d_1 a pour équation sur le plan Π.

$$(50)\qquad Y - u = 0;$$

elle se déplace parallèlement à elle-même dans le plan Π.

Montrons qu'elle possède une enveloppe dans le plan Π_1. En ayant égard aux formules (2) l'équation de la droite d_1 devient, dans le plan Π_1,

$$b - X_1 \sin\theta + Y_1 \cos\theta - u = 0.$$

Or les formules (32 *bis*), où l'on introduit l'hypothèse $\rho = 0$, donnent

$$(51)\qquad a = \alpha, \qquad b - u = \beta = \text{fonct. de } \theta.$$

Si donc on pose

$$u - b = -\beta = \Theta'(\theta),$$

l'équation de la droite d_1 s'écrit

$$(52)\qquad X_1 \sin\theta - Y_1 \cos\theta - \Theta'(\theta) = 0,$$

ce qui manifeste que la droite d_1 possède une enveloppe dans le plan Π_1. La connaissance de $\Theta(\theta)$ suffit pour définir cette enveloppe (e_1).

Elle suffit aussi pour définir le mouvement.

Montrons, à cet effet, que la fonction $g(\theta)$ s'exprime au moyen de la fonction $\Theta(\theta)$.

Dans les équations (4) déjà utilisées plusieurs fois, ayons égard aux valeurs (51) de a, b et à la valeur (49) de ξ, il viendra

$$\alpha' = \beta, \qquad \beta' = -\alpha - g(\theta),$$

où α', β' représentent les dérivées de α, β, qui sont des fonctions de θ.

On tire de là

$$\beta'' = -\beta - g'(\theta)$$

ou, comme $\beta = -\Theta'(\theta)$,

$$g'(\theta) = -\Theta'(\theta) - \Theta'''(\theta).$$

Intégrons en faisant rentrer dans Θ la constante d'intégration, nous aurons

$$(53)\qquad g(\theta) = -\Theta(\theta) - \Theta''(\theta).$$

20. L'équation (52) manifeste que, si θ demeure constant, la droite d_1 est fixe dans le plan fixe Π_1 tandis que le plan Π est animé d'une translation rectiligne perpendiculaire à d_1.

Si, au contraire, u demeure constant et si θ devient variable, la droite d_1 enveloppe dans Π_1 une ligne (e_1) qu'elle touche au point E_1. Au cours de ce mouvement, la droite d_1 est fixe dans le plan Π, comme le montre l'équation (50).

En même temps la droite d_1 est le lieu du centre instantané dans le plan Π; son enveloppe (e_1) est donc le lieu du centre instantané dans le plan Π_1. En conséquence, au cours du mouvement $u =$ const., la droite d_1 roule sans glisser sur la courbe (e_1).

Le mouvement peut donc se définir ainsi :

Une droite d que l'on peut concevoir entraînant un plan Π_0 roule sans glisser sur une courbe (e_1) tracée dans le plan Π_1, tandis que le plan Π est animé par rapport à Π_0 d'une translation rectiligne perpendiculaire à la droite d.

On reconnaît ici encore un mouvement décomposable. C'est le cas où la courbe (e) du cas général se trouverait réduite à un point rejeté à l'infini.

21. Un point P de la droite d décrit dans Π_1 une développante (a_1) de la courbe (e_1), tandis que dans son mouvement relatif par rapport à Π, il décrit une droite (a) perpendiculaire à d et par conséquent tangente constamment en P à la courbe (a_1). Sans avoir besoin d'insister davantage on se rend compte que ce cas est le cas général où la courbe (a) serait devenue une ligne droite.

En résumé :

Le cas où d_1 conserve dans le plan mobile une direction constante est celui des $\mathfrak{M}^2$ définis par la condition qu'une droite du plan mobile doive toucher une ligne déterminée du plan fixe.

Les translations $\mathfrak{T}'$ correspondent au glissement de la droite sur elle-même.

22. Cherchons maintenant les $\mathfrak{M}^2$ exceptionnels pour lesquels, φ étant fonction de θ, la droite d_1 ne dépendrait que d'un paramètre dans le plan Π, en excluant le cas qui vient d'être étudié où φ serait constant.

Si nous nous reportons à la valeur de n fournie par les équations (32), pour que n se réduise à une fonction de φ ou, ce qui revient au même, de θ, il faut et il suffit que u disparaisse de cette valeur, c'est-à-dire que l'on ait

$$(54) \qquad 1 - \varphi' = 0.$$

Cette condition exprime que la droite d_1 fait avec l'axe fixe $A_1 X_1$ un angle $\psi = \theta + \varphi$ constant ou que d_1 conserve *dans le plan fixe* une direction constante.

On pourra prendre $A_1 X_1$ parallèle à cette direction et faire $\psi = 0$ ou

$$(55) \qquad \varphi = -\theta.$$

Nous retrouvons donc le mouvement exceptionnel qui a été envisagé au n° 13.

La droite d_1 enveloppe dans le plan Π une courbe (e) tout en ayant une direction fixe dans le plan fixe.

En considérant Π comme le plan fixe et Π_1 comme le plan mobile, on retrouverait le $\mathfrak{M}^2$ précédent. Le mouvement actuel de Π par rapport à Π_1 est donc l'inverse d'un mouvement du type antérieurement étudié.

Si l'on prend l'équation de la droite d_1 sous la forme habituelle

$$X \sin\varphi - Y \cos\varphi - n = 0,$$

en faisant $\varphi = -\theta$, il viendra

$$(56) \qquad -X \sin\theta - Y \cos\theta - n = 0;$$

or

$$n = \alpha_1 = \Theta(\theta),$$

où $\Theta(\theta)$ est une fonction de θ. La connaissance de $\Theta'(\theta)$ équivaut à se donner l'enveloppe (e) de la droite d_1 dans le plan Π.

La connaissance de Θ suffit par déterminer complètement la représentation finie du mouvement qui, d'après les équations (37) du n° 13, devient, en y faisant $\beta_1 = 0$ et $\alpha_1 = \Theta$,

$$(57) \qquad \begin{cases} x_1 = \Theta(\theta) + x \cos\theta - y \sin\theta, \\ y_1 = -u + x \sin\theta + y \cos\theta, \end{cases}$$

formules qui mettent bien en évidence les circonstances du mouvement.

Avec la fonction Θ les valeurs de ξ, η, ξ_1, η_1, u sont les suivantes :

$$
(58)\quad \begin{cases} \xi = -\Theta' \cos\theta, & \eta = -\Theta' \sin\theta, \\ \xi_1 = -\sin\theta, & \eta_1 = -\cos\theta, \\ u = \Theta'. \end{cases}
$$

23. Naturellement ce mouvement peut être défini par la condition qu'une courbe (a) du plan Π doit être tangente par n'importe quel point et en n'importe quel point à une droite (a_1) du plan fixe Π_1.

En résumé, les deux cas exceptionnels où la droite d_1 ne dépend que d'un paramètre dans chaque plan sont ceux où l'une des deux courbes (a), (a_1) du cas général devient une ligne droite.

VII. — Propriétés du second ordre des mouvements plans à deux paramètres, dans le cas général.

24. Les propriétés du premier ordre d'un mouvement $\mathfrak{M}^1$ à un paramètre sont connues, du moins en ce qui concerne les normales et les tangentes et les points où une courbe touche son enveloppe, lorsque l'on connaît le centre instantané I.

Pareillement, les propriétés du second ordre, du moins en ce qui concerne les courbures des trajectoires ou des enveloppes résultent de la connaissance d'un point K' appelé souvent *le centre géométrique des accélérations*.

C'est le point d'accélération nulle dans l'hypothèse où l'on prendrait comme mesure du temps l'angle de position de la figure ou, ce qui revient au même, si le mouvement se faisait avec une vitesse angulaire $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ constante, auquel cas on peut supposer $\omega = 1$ par un choix convenable d'unités.

Ce point K' est diamétralement opposé au centre instantané I dans le cercle des inflexions. On peut l'obtenir ainsi :

En supposant que l'angle θ mesure le temps, soit $\overrightarrow{\mathrm{IV}}$ le vecteur qui représente la vitesse propre au centre instantané. Si l'on fait tourner $\overrightarrow{\mathrm{IV}}$ de trois angles droits dans le sens direct, de façon à

amener $\overrightarrow{\mathrm{IV}}$ en $\overrightarrow{\mathrm{IK}'}$, l'extrémité K′ du nouveau vecteur sera le centre géométrique cherché des accélérations.

Si donc on appelle x_1, y_1 les coordonnées du centre instantané par rapport aux axes AX, AY, solidaires du plan mobile Π, nous aurons en premier lieu

$$\frac{dx_1}{d\theta}, \quad \frac{dy_1}{d\theta},$$

pour les projections de la vitesse $\overrightarrow{\mathrm{IV}}$ et par conséquent

$$+\frac{dy_1}{d\theta}, \quad -\frac{dx_1}{d\theta},$$

pour les projections de $\overrightarrow{\mathrm{IK}'}$; en conséquence, les coordonnées du point K′ seront

$$(59)\qquad \begin{cases} x_{K'} = x_1 + \dfrac{dy_1}{d\theta}, \\[2mm] y_{K'} = y_1 - \dfrac{dx_1}{d\theta}. \end{cases}$$

25. Ceci posé, si nous envisageons un mouvement $\mathfrak{M}^1$ à un paramètre contenu dans un $\mathfrak{M}^2$ donné, il nous sera facile de calculer les coordonnées $x_{K'}$, $y_{K'}$ de son point K′ en partant des formules (9) qui donnent x_1, y_1 et des formules (59).

Naturellement, en outre de la dérivée $u' = \dfrac{du}{d\theta}$, s'introduira la dérivée seconde $u'' = \dfrac{d^2 u}{d\theta^2}$, comme nous l'avons expliqué au nº 5. On aura par un calcul évident

$$\begin{cases} x_{K'} = -\eta - \eta_1 u' + \dfrac{d}{d\theta}(\xi + \xi_1 u'), \\[2mm] y_{K'} = \xi + \xi_1 u' + \dfrac{d}{d\theta}(\eta + \eta_1 u'), \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x_{K'} = -\eta + \dfrac{\partial \xi}{\partial \theta} + \left(\dfrac{\partial \xi}{\partial u} + \dfrac{\partial \xi_1}{\partial \theta} - \eta_1\right) u' + \dfrac{\partial \xi_1}{\partial u} u'^2 + \xi_1 u'', \\[2mm] y_{K'} = \xi + \dfrac{\partial \eta}{\partial \theta} + \left(\dfrac{\partial \eta}{\partial u} + \dfrac{\partial \eta_1}{\partial \theta} + \xi_1\right) u' + \dfrac{\partial \eta_1}{\partial u} u'^2 + \eta_1 u''. \end{cases}$$

En tenant compte des équations (8) d'intégrabilité, ces expres-

sions s'écrivent

$$(60)\quad \left\{\begin{aligned} x_{K'} &= -\eta - \frac{\partial\xi}{\partial\theta} + 2\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial\theta} - \eta_1\right)u' + \frac{\partial\xi_1}{\partial u}u'^2 + \xi_1 u'', \\ y_{K'} &= \xi + \frac{\partial\eta}{\partial\theta} + 2\left(\frac{\partial\eta_1}{\partial\theta} - \xi_1\right)u' + \frac{\partial\eta_1}{\partial u}u'^2 + \eta_1 u''. \end{aligned}\right.$$

Pour une position $\mathfrak{P}$ donnée, c'est-à-dire pour un système donné de valeurs de θ, u, les divers points K' qui correspondent aux divers $\mathfrak{M}^1$ qui ont lieu dans le $\mathfrak{M}^2$ à partir de $\mathfrak{P}$, dépendent des deux paramètres u', u''. Ils remplissent donc sinon tout le plan, au moins une région du plan.

26. Mais, parmi ces mouvements $\mathfrak{M}^1$, considérons ceux qui sont tangents, c'est-à-dire qui ont même centre instantané I et, partant, même valeur de u'. Pour ces mouvements, u' étant regardé comme constant, le point K' ne dépend plus que du seul paramètre variable u''.

En conséquence l'élimination de u'' nous fournira le lieu des points K' pour tous les $\mathfrak{M}^1$ tangents, c'est-à-dire qui ont dans la position $\mathfrak{P}$ un centre instantané donné I. L'élimination est immédiate et fournit une droite que nous désignerons par le symbole $d_{K'}^{I}$, pour indiquer qu'elle est un lieu de points K' et qu'elle correspond à une position donnée I du centre instantané sur la droite d_I.

L'équation de cette droite $d_{K'}^{I}$ s'écrit

$$(61)\qquad -\eta_1 X + \xi_1 Y - S = 0$$

en posant

$$(62)\quad \begin{aligned} S = \eta_1\left(-\eta - \frac{\partial\xi}{\partial\theta}\right) - \xi_1\left(\xi + \frac{\partial\eta}{\partial\theta}\right) - 2\left(\eta_1\frac{\partial\xi_1}{\partial\theta} - \xi_1\frac{\partial\eta_1}{\partial\theta} - \xi_1^2 - \eta_1^2\right)u' \\ + \left(\eta_1\frac{\partial\xi_1}{\partial u} - \xi_1\frac{\partial\eta_1}{\partial u}\right)u'^2. \end{aligned}$$

En rapprochant l'équation (61) de l'équation (10) de la droite d_I on constate que :

La droite $d_{K'}^{I}$ est perpendiculaire à la droite d_I.

Nous appellerons H le point où la droite d_I est coupée par la droite $d_{K'}^{I}$. Il est clair que la correspondance entre le point I et la

droite d_K^I se réduit à celle qui relie le point H au point I sur la droite d_I.

27. Mais c'est ici que va apparaître la différence profonde qui existe entre les mouvements $\mathfrak{M}^2$ les plus généraux et ceux à translations rectilignes que j'ai appelés *exceptionnels*.

Supposons d'abord qu'il s'agisse des $\mathfrak{M}^2$ les plus généraux pour lesquels conséquemment θ et φ peuvent être pris comme paramètres de position.

Le calcul de l'expression de S s'opère facilement en partant des formules (17) et (18) du n° 8. Les simplifications sont aussi caractéristiques qu'on puisse le désirer et méritent bien à ces variables θ et φ le nom de *canoniques*.

On trouve successivement

$$-\eta - \frac{d\xi}{d\theta} = \left(\frac{\partial n}{\partial\theta} - \frac{\partial n}{\partial\varphi} - \rho\right)\cos\varphi - \left(\frac{\partial^2 n}{\partial\varphi\,\partial\theta} - n - \frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)\sin\varphi,$$

$$\xi - \frac{d\eta}{d\theta} = \left(\frac{\partial n}{\partial\theta} - \frac{\partial n}{\partial\varphi} + \rho\right)\sin\varphi + \left(\frac{\partial^2 n}{\partial\varphi\,\partial\theta} - n - \frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)\cos\varphi,$$

$$\eta_1\left(-\eta - \frac{d\xi}{d\theta}\right) - \xi_1\left(\xi - \frac{d\eta}{d\theta}\right) = -\rho\left(\frac{\partial n}{\partial\theta} - \frac{\partial n}{\partial\varphi} - \rho\right),$$

puis :

$$\eta_1\frac{d\xi_1}{d\theta} - \xi_1\frac{d\eta_1}{d\theta} - \xi_1^2 - \eta_1^2 = -\rho^2;$$

$$\eta_1\frac{d\xi_1}{d\varphi} - \xi_1\frac{d\eta_1}{d\varphi} = -\rho^2;$$

d'où, en n'oubliant pas que, puisque $u = \varphi$, on a aussi $u' = \varphi'$,

$$\begin{aligned} S &= -\rho\left(\frac{\partial n}{\partial\theta} - \frac{\partial n}{\partial\varphi} + \rho\right) - 2\rho^2\varphi' - \rho^2\varphi'^2 \\ &= -\rho\left(\frac{\partial n}{\partial\theta} - \frac{\partial n}{\partial\varphi}\right) - \rho^2(\varphi' - 1)^2. \end{aligned}$$

De la sorte, l'équation de la droite $d_{K'}^I$ devient

$$(63)\qquad X\cos\varphi - Y\sin\varphi - \frac{\partial n}{\partial\theta} - \frac{\partial n}{\partial\varphi} - \rho(\varphi' - 1)^2 = 0.$$

Au n° 9 nous avons introduit le paramètre de position λ_M d'un point M de la droite d_I. Appelons λ_H le paramètre du point H, en

sorte que

$$(64)\qquad \begin{cases} x_H = -\eta - \rho\lambda_H \cos\varphi, \\ y_H = \quad \xi - \rho\lambda_H \sin\varphi. \end{cases}$$

En exprimant que ce point est sur la droite d_K^1, équation (63), il viendra

$$-\eta\cos\varphi - \xi\sin\varphi + \rho\lambda_H - \frac{dn}{d\theta} - \frac{dn}{d\varphi} - \rho(\varphi' - 1)^2 = 0.$$

Or, eu égard aux formules (18), on a

$$-\eta\cos\varphi - \xi\sin\varphi = \rho - \frac{dn}{d\varphi};$$

il vient donc, toutes réductions faites,

$$(65)\qquad (1 - \lambda_H) - (1 - \varphi')^2 = \frac{1}{\rho}\frac{dn}{d\theta}.$$

Telle est la forme éminemment simple que revêt la correspondance entre les points H et I, car dans φ' on reconnaît le paramètre de position ($\lambda_I = \varphi'$) du point I.

28. Mais au n° 9, nous avons donné l'interprétation géométrique de la quantité $1 - \lambda_M$ [formule (26)] et montré qu'elle représente le rapport vectoriel

$$\frac{\overrightarrow{OM}}{\overrightarrow{OO_1}},$$

où O, O_1 sont les deux points remarquables que nous avons définis sur la droite d_1.

La relation purement analytique (65) peut donc recevoir la forme géométrique

$$(66)\qquad \frac{\overrightarrow{OH}}{\overrightarrow{OO_1}} - \left(\frac{\overrightarrow{OI}}{\overrightarrow{OO_1}}\right)^2 = \frac{1}{\rho}\frac{dn}{d\theta}.$$

Or, il y a sur la droite d_1 un point H_0 qui est la position que vient occuper le point H lorsque le centre instantané est justement au point O; on a d'après cela, en vertu de (66) même,

$$(67)\qquad \frac{\overrightarrow{OH_0}}{\overrightarrow{OO_1}} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial n}{d\theta}.$$

On doit ici remarquer que, puisque ρ est la mesure de $\overrightarrow{OO_1}$ sur l'axe δ_1, qui fait l'angle φ avec AX, on a

(68) $$\text{mesure de } \overrightarrow{OH_0} = \frac{\partial n}{\partial \theta}.$$

L'équation (66) en vertu de (67) s'écrit du reste aussi

$$\frac{\overrightarrow{OH}}{\overrightarrow{OO_1}} - \left(\frac{\overrightarrow{OI}}{\overrightarrow{OO_1}}\right)^2 = \frac{\overrightarrow{OH_0}}{\overrightarrow{OO_1}},$$

ou encore

(69) $$\frac{\overrightarrow{H_0H}}{\overrightarrow{OO_1}} = \left(\frac{\overrightarrow{OI}}{\overrightarrow{OO_1}}\right)^2,$$

ou finalement

(70) $$\overrightarrow{OO_1}.\overrightarrow{H_0H} = \left(\overrightarrow{OI}\right)^2;$$

relation simple, d'une interprétation facile et de construction élémentaire.

29. La relation (70) met d'abord en évidence ce fait que le vecteur $\overrightarrow{H_0H}$ et le vecteur $\overrightarrow{OO_1}$ doivent être de même sens. En conséquence :

Le lieu de H *est la moitié de la droite* d_1 *issue du point* H_0 *dans le sens du vecteur* $\overrightarrow{OO_1}$.

Rien n'empêche de supposer que φ ait été choisi de façon que l'axe δ_1 ait le sens de $\overrightarrow{OO_1}$, alors ρ est positif et la demi-droite lieu de H a dès lors la direction de δ_1.

Appelons f la droite normale en H_0 à la droite d_1. On voit que la droite f décompose le plan en deux parties et que le *demi-plan qui contient la demi-droite précédente est seul le lieu des points* K'.

Cherchons encore à nous rendre compte de la relation qui existe entre les points I et H.

A un point I ne correspond qu'un point H; mais à un point H donné sur la demi-droite *il correspond deux positions* I, J *du centre instantané, symétriques par rapport au point* O.

Ces points coïncident ensemble et avec le point O lorsque le point H occupe la position H_0. Ils deviennent imaginaires si H est pris sur la demi-droite issue de H_0 dans le sens opposé au vecteur $\overrightarrow{OO_1}$.

D'après tout ce qui précède, la construction du point H qui correspond à un point I donné est aisée à réaliser.

1° *Construire* J *symétrique de* I *par rapport au point* O;

2° *Prendre le point* G *conjugué harmonique de* O_1 *par rapport à* IJ. On a

$$\overrightarrow{OO_1}.\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OI}^2;$$

3° *Imprimer à* G *une translation* $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{OH_0}$ *qui amène* G *en* H; *le point* H *est le point cherché.*

En effet, $\overrightarrow{H_0H}$ est équipollent à $\overrightarrow{OG}$.

On voit en définitive que l'établissement des propriétés de courbures d'un $\mathfrak{M}^2$ donné exige que l'on connaisse sur chaque droite d_1 les trois points O, O_1 et H_0.

30. Voyons, par exemple, ce que sont ces points dans le cas où la droite d_1 ne dépend que d'un paramètre dans chacun des plans Π et Π_1.

Le point O est le centre instantané pour le mouvement $\mathfrak{M}^1$ au cours duquel la droite d_1 fait un angle $\psi = \theta + \varphi$ constant avec l'axe fixe X_1X_1; dans ce cas, la droite d_1 est fixe dans le plan fixe; le centre instantané est donc le point E où la droite d_1 touche la courbe (e), donc O c'est le point E.

On verra de même que O_1 est le point E_1 où la droite d_1 touche la courbe (e_1) dans le plan fixe Π_1. Quant au point H_0, la formule (68) nous prouve qu'il coïncide avec le point O, car la mesure de $\overrightarrow{OH_0}$ est $\frac{\partial n}{\partial \theta}$; or, n est ici fonction de la seule variable φ, en sorte que $\frac{\partial n}{\partial \theta} = 0$.

On voit même que ce cas est le seul où cette circonstance se présente.

En se reportant à la construction donnée plus haut pour le point H, on constate que la translation $\overrightarrow{OH_0}$ disparaît.

L'équation géométrique (70) se réduit à

$$\overrightarrow{OO_1}.\overrightarrow{OH} = \left(\overrightarrow{OI}\right)^2.$$

en sorte que, *dans ce cas, le point* H *est le point conjugué harmonique du point* O, *par rapport à* IJ.

31. Notons que si, dans le cas général, on désire obtenir l'équation de la droite f qui limite le demi-plan lieu du point K′ et qui est perpendiculaire en H_0 à la droite d_1, il suffit, dans l'équation (63), de prendre la valeur de φ' qui correspond au point O, c'est-à-dire $\varphi' = -1$; on obtient ainsi :

$$(71) \qquad X\cos\varphi + Y\sin\varphi - \frac{\partial n}{\partial\theta} + \frac{\partial n}{\partial\varphi} = 0.$$

Si n ne dépend pas de θ, on retrouve bien la normale en E à la courbe (e); le demi-plan lieu de K′ est alors celui qui contient le point E_1.

32. Revenons au cas général. L'existence d'une droite d_1 correspondant à chaque position du point I équivaut au théorème suivant :

Si l'on envisage tous les mouvements $\mathfrak{M}^1$ *qui sont contenus dans un* $\mathfrak{M}^2$ *donné, qui ont lieu à partir d'une position* $\mathfrak{L}$ *donnée et qui sont tangents, leurs cercles des inflexions forment un faisceau, car ils coupent la droite* d_1 *en deux points fixes.*

En effet, soit K′ un centre géométrique des accélérations. Le cercle des inflexions est décrit sur IK′ comme diamètre; il passe donc au point H, car l'angle IHK′ est droit.

33. La possibilité de construire simplement le point H et la droite d_1 rend accessible la solution de diverses questions concernant les courbures.

Supposons par exemple que l'on veuille définir le point K′ et par suite toutes les propriétés de courbures pour le mouvement $\mathfrak{M}^1$

contenu dans un $\mathfrak{M}^2$ donné, sachant qu'un point M du plan mobile doit décrire une trajectoire dont M_1 serait le centre de courbure.

D'après un théorème que j'ai donné dans mes *Leçons de Cinématique*, page 443, la polaire du point K' par rapport au cercle de centre M qui passe par I, coupe en M_1 la normale MI à la trajectoire. On peut en conclure, que réciproquement, la polaire de M_1 passe au point K'.

En conséquence, dans le cas actuel, on aura d'abord I en prenant la trace de la normale MM_1 sur la droite d_1, ensuite on prendra la polaire de M_1 par rapport au cercle de centre M qui passe en I; cette polaire coupe la droite $d^1_{K'}$, que l'on sait construire, précisément au point K'.

De même, si l'on définit le mouvement $\mathfrak{M}^1$ contenu dans $\mathfrak{M}^2$ par la condition qu'une courbe (c) du plan mobile touche son enveloppe (c_1) par un point R et que (c_1) ait en R un centre de courbure M_1, la droite RM_1 coupe d_1 au point I; en outre, si M est le centre de courbure de la courbe (c) au point R, le point M_1 est le centre de courbure de la trajectoire de M. On est donc ramené au cas précédent,

VIII. — Propriétés du second ordre des mouvements plans à deux paramètres dans les cas exceptionnels.

34. Dans le cas où φ est une simple fonction de θ, ou même une constante, il n'est plus possible de prendre θ et φ comme variables de position.

Mais on peut alors adopter comme variables θ et u, cette dernière représentant l'amplitude de la translation $\mathfrak{T}^1$ qui est toujours rectiligne.

Les quantités en ξ, η, ξ_1, η_1 sont données par les formules (32).

Nous partirons des formules générales (61) et (62) qui conviennent à tous les cas.

On trouve ici successivement

$$-\eta_1 - \frac{d\xi}{d\theta} = -(1+\varphi')^2 u \sin\varphi + u\varphi'' \cos\varphi - f' - g,$$

$$\xi - \frac{d\eta_1}{d\theta} = (1-\varphi')^2 u \cos\varphi + u\varphi'' \sin\varphi - g' - f$$

et

$$\eta_1\left(-\eta-\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)-\xi_1\left(\xi-\frac{\partial\eta}{\partial\theta}\right)=-u\varphi''-(f'-g)\cos\varphi-(g'+f)\sin\varphi,$$

$$\eta_1\frac{\partial\xi_1}{\partial\theta}-\xi_1\frac{\partial\eta_1}{\partial\theta}-\xi_1^2-\eta_1^2=-(1+\varphi'),$$

$$\eta_1\frac{\partial\xi_1}{\partial u}-\xi_1\frac{\partial\eta_1}{\partial u}=0.$$

Il vient ainsi, pour équation de la droite $d_{K'}^1$,

$$(72)\qquad X\cos\varphi-Y\sin\varphi-u\varphi''-(f'-g)\cos\varphi-(g'+f)\sin\varphi$$
$$-2(1+\varphi')u'=0.$$

35. Les coordonnées du point H où la droite $d_{K'}^1$ coupe la droite d_1 sont

$$x_H=-\eta+\lambda_H\cos\varphi,$$
$$y_H=\xi+\lambda_H\sin\varphi;$$

d'où, en transportant dans (72),

$$-\eta\cos\varphi+\xi\sin\varphi+\lambda_H-\varphi''u$$
$$-(f'-g)\cos\varphi-(g'+f)\sin\varphi-2(1+\varphi')u'=0.$$

Or les équations (32) donnent

$$-\eta\cos\varphi+\xi\sin\varphi=f(\theta)\sin\varphi-g(\theta)\cos\varphi,$$

en sorte que l'équation précédente se réduit à

$$(73)\qquad \lambda_H-(f'\cos\varphi+g'\sin\varphi)-\varphi''u-2(1+\varphi')u'=0.$$

On se rend compte que λ_H est la mesure du vecteur $\overrightarrow{NH}$, où N est le point de d_1 qui correspond à la valeur zéro de u', et que u' lui-même mesure le vecteur $\overrightarrow{NI}$.

L'équation précédente, mise sous la forme

$$(74)\qquad \overrightarrow{NH}=2(1+\varphi')\overrightarrow{NI}+\varphi''u+(f'\cos\varphi+g'\sin\varphi),$$

témoigne que, dans ce cas, *les points* H *et* I *tracent sur la droite* d_1 *des divisions semblables*.

36. Il est aisé de comprendre pourquoi la correspondance pré-

sente ici un caractère si différent. Le point O, centre instantané pour le $\mathfrak{M}^1$ au cours duquel ψ est constant est ici rejeté à l'infini, car θ est constant avec ψ et le $\mathfrak{M}^1$ en question est, en réalité la translation $\mathfrak{T}^1$.

Il est clair que, dans ce cas, tout point de la droite d_1 est une position possible d'un point H et tout point du plan une position possible d'un point K'.

37. Mais il est un cas encore plus singulier, c'est celui ou $1+\varphi'$ serait nul. C'est le cas du dernier $\mathfrak{M}^2$ exceptionnel considéré au n° 13 et dont l'étude fait aussi l'objet du n° 22.

C'est le cas du roulement sans glissement d'une courbe (e) sur une droite d, tandis que celle-ci est animée d'une translation arbitraire dans un sens perpendiculaire à sa propre direction. Dans ce cas, la formule géométrique (74) donne pour H un point fixe, indépendant de I.

En calculant les coefficients de l'équation au moyen des données des formules (58), on trouve cette équation pour la droite $d^1_{K'}$.

$$\text{(75)} \qquad X\cos\theta - Y\sin\theta - \Theta'' = 0.$$

Si l'on observe que la droite d_1 a pour équation [formule (56)]

$$X\sin\theta + Y\cos\theta - \Theta' = 0,$$

on se rend compte que la droite (75) est la normale à l'enveloppe (e) de la droite d_1 sur le plan Π.

38. Or, on pouvait aisément prévoir ce résultat.

Appelons, comme nous l'avons déjà fait, Π_0 un plan solidaire de la droite d (ou d_1). L'accélération d'un point M dans le plan Π_1 est la somme géométrique de son accélération dans le plan Π_0 et de l'accélération du point de coïncidence dans le mouvement de Π_0 par rapport à Π_1, attendu que ce mouvement d'entraînement est un mouvement de translation.

Or, dans le roulement de (e) sur d, le centre géométrique K'_0 des accélérations est le centre de courbure de la courbe (e). L'accélération de tout point est la même que s'il tournait uniformément autour de K'_0 avec la vitesse angulaire égale à 1.

L'accélération de M est donc le vecteur $\overrightarrow{MK'_0}$. Dans le mouvement de translation, l'accélération est au contraire normale à d, et c'est un vecteur constant en grandeur et direction $\overrightarrow{\Gamma}$. On voit donc que, si l'on prend sur la normale à la courbe (e) un point M tel que le vecteur $\overrightarrow{MK'_0}$ soit égal et opposé à $\overrightarrow{\Gamma}$, ce point M sera le centre géométrique des accélérations, dans le mouvement résultant du roulement de (e) et de la translation. Ainsi se justifie *a priori* que la normale à la courbe (e) soit ici le lieu du point K'.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Rebière (A.). — *Mathématiques et Mathématiciens.* Pensées et curiosités. 1 vol. gr. in-8, 566 pages. Quatrième édition. Paris, Vuibert, 1914. Prix : 5fr.

Joukowski (N.). — *Aérodynamique. Bases théoriques de l'Aéronautique.* Cours professé à l'Ecole impériale technique de Moscou. Traduit du russe par *S. Drzewiecki.* 1 vol. gr. in-8 (25-16), XVIII-230 pages, avec 140 figures. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1916. Prix : 11fr.

Lanchester (F.-W.). — *Le vol aérien.* Tome I : *Aérodynamique.* Traduit de l'anglais sur la deuxième édition par *C. Benoit.* 1 vol. in-8 (23-14), XVI-512 pages, avec 162 figures et 1 planche. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1914. Prix : 14fr. — Tome II : *Aérodonétique.* Traduit de l'anglais sur la deuxième édition par *C. Benoit.* 1 vol. in-8 (23-14), XVII-478 pages, avec 208 figures et 1 planche. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1916. Prix : 14fr.

Rey Pastor (J.). — *Teoría de la Representació conforme.* Conferencies donades el Juny de 1915, redactades per *E. Terradas.* (Publicacions de l'Institut de Ciencies. Col.lecció de Cursos de Fisica i Matemática dirigida per *E. Terradas.*) 1 vol. in-8, 115 pages. Barcelona, Institut d'Estudis catalans, Palau de la Diputació, 1917. Precio : 3 pesetas.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BIANCHI (LUIGI). — LEZIONI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE. Volume III. *Teoria delle Trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche.* 1 vol. gr. in-8, VI-350 pages. Pisa, Enrico Spoerri, 1909.

Ce Tome des réputées *Lezioni* de Luigi Bianchi étudie les surfaces applicables sur les quadriques. Dans le domaine des généralités il n'y a rien de plus simple après les surfaces développables ou applicables sur le plan. Et les quadriques ne se placent pas ici après le plan uniquement parce que ce sont des surfaces du second degré à étudier après celles du premier, mais surtout parce que les quadriques, au point de vue réel ou au point de vue imaginaire, sont des surfaces réglées.

Malgré tout cela l'analogie avec les surfaces développables est à peu près nulle et une théorie spéciale a demandé à naître.

On pourrait d'abord tenter de créer une théorie générale des surfaces applicables sur les surfaces réglées quelconques; elle est déjà bien compliquée, mais non sans quelques beaux résultats tels que le théorème de O. Chieffi. Soit une surface S applicable sur une surface réglée R et, sur S, un système de géodésiques g s'appliquant sur les génératrices de R. Une asymptotique a de S coupe les g en des points où nous mènerons des tangentes r à ces g; le lieu des r sera une R_1 applicable sur S en transformant a en une droite.

Quant à l'application sur une quadrique Q, elle repose essentiellement sur l'existence d'une infinité de congruences rectilignes W ne pouvant avoir une première nappe focale S applicable sur Q sans qu'il en soit de même de toutes les autres nappes.

Soit S donnée par ses deux formes quadratiques fondamentales

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \qquad D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2.$$

Au point F(x, y, z), de S, menons, dans le plan tangent T, un segment FF_1, tel que F_1 ait des coordonnées qui, d'après l'équation

de T, ont forcément la forme

$$x = l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad y = l\frac{\partial y}{\partial u} + m\frac{\partial y}{\partial v}, \qquad z = l\frac{\partial z}{\partial u} + m\frac{\partial z}{\partial v},$$

où l et m seront fonctions des coordonnées curvilignes u, v de F. Les coordonnées de F_1 garderont même expression après déformation de S et les segments FF_1 formeront les congruences W quand, en F_1, il seront tangents au lieu de ce point.

Les R_1 applicables sur Q peuvent s'apercevoir aussi dans les congruences formées par les génératrices d'une Q' confocale à Q et roulant sur une R. C'est la combinaison de ces deux ordres de considérations qui joue ici le rôle fondamental; on peut immédiatement traiter le cas du paraboloïde hyperbolique.

Alors la détermination complète de l et m dépend d'une équation de Riccati et ce résultat donne une première idée de l'élégance de la question. En s'appuyant sur ce qui précède on peut d'abord établir que toutes les R_1 forment une simple infinité de surfaces dépendant de transformations dites *transformations* B_k, mais qu'en outre ces dernières acquièrent la constante arbitraire introduite par l'intégration de l'équation de Riccati.

La constance du rapport anharmonique de quatre solutions de cette équation donne alors des interprétations adéquates. De même, entre deux points correspondants de deux quadriques confocales, il existe une loi simple dite *affinité d'Ivory;* elle se conserve entre les R et R_1 applicables sur la Q considérée et des théorèmes, dus à Ivory même, donnent des invariants métriques et des réciprocités entre positions respectives de plans tangents, pour la R et la Q, dans le roulement qu'elles peuvent effectuer l'une sur l'autre.

Il y a une théorie analogue pour l'hyperboloïde à une nappe; elle dépend d'une équation différentielle qui, sans être immédiatement une équation de Riccati, peut, du moins, se ramener à ce type et ce qu'il y a ici de plus compliqué est racheté par le cas exceptionnellement élégant de l'hyperboloïde de révolution. Quand celui-ci roule sur une R, son axe décrit une R_1; quand il se déforme en une R, son cercle de gorge devient une courbe de Bertrand.

Relevons encore ici les noms de Laguerre, ceux de MM. Bioche

et Demartres et nous aurons montré que des cas particuliers de haut intérêt justifient amplement celui de la théorie générale. Mais ne perdons point de vue que celle-ci n'a trait jusqu'ici qu'à la déformation *réglée*.

C'est dans un second Chapitre que nous étudions les transformations B_k pour les déformations *générales* des quadriques réglées. Il est facile de caractériser l'esprit de cette seconde étude si nous considérons bien, comme l'indique le sous-titre du Volume, qu'il s'agit moins d'étudier, de manière quelconque, les surfaces applicables sur les quadriques que leurs procédés de transformation des unes en les autres. Les transformations entre R_1 réglées conservaient évidemment des génératrices rectilignes; nous étudions maintenant des transformations dont la propriété principale est de conserver des lignes asymptotiques lesquelles, en particulier, sont transformables en droites d'après le théorème de Chieffi. L'équation de Riccati du Chapitre précédent est remplacée par une équation aux différentielles totales, complètement intégrable, c'est-à-dire dont l'intégrale dépend d'une constante arbitraire tout comme s'il s'agissait d'une équation différentielle ordinaire. Toutes les élégances déduites de l'affinité d'Ivory sont transformées mais non détruites, et les résultats d'abord obtenus pour le paraboloïde hyperbolique se conservent, au point de vue de la méthode, pour l'hyperboloïde à une nappe.

Nous quittons ces quadriques réglées réelles en abordant le Chapitre III qui envisage maintenant les quadriques à génératrices imaginaires. Quelques préliminaires élargissent la question jusqu'à en faire le problème général de correspondance de Sophus Lie, entre éléments (x, y, z, p, q) de surfaces différentes. Quant aux précédentes méthodes géométriques, elles demandent surtout à être étendues mais non rejetées quant à leur esprit fondamental.

Comme au Chapitre I, on peut encore utiliser les quadriques Q' confocales à Q pourvu que ces Q' soient réellement réglées. Mais en associant ainsi des quadriques à génératrices imaginaires à des quadriques à génératrices réelles, on risque d'obtenir des surfaces à ds^2 équivalents, mais non *réellement* applicables l'une sur l'autre parce qu'à une région réelle de l'une correspond une région imaginaire de l'autre. Cette applicabilité *idéale* semble avoir été

étudiée, pour la première fois, par Peterson, géomètre russe de grand mérite, sur lequel Gaston Darboux a attiré l'attention à plusieurs reprises, dont les travaux ont été traduits dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* et qui, cependant, semble demeurer dans un oubli immérité.

L'applicabilité idéale n'est pas seulement remarquable au point de vue analytique ; elle conduit à des applicabilités réelles. Ainsi, dans le cas du paraboloïde elliptique, les congruences W peuvent, avec une première nappe idéalement applicable, donner une infinité de secondes nappes d'applicabilité réelle. Il peut même arriver qu'on trouve des résultats du plus haut intérêt en se proposant d'étudier les surfaces applicables sur des quadriques imaginaires, par exemple sur la sphère de rayon i. Alors les transformations B_k redonnent les fameuses transformations de Bäcklund entre surfaces pseudosphériques. Rappelons aussi que Gaston Darboux a construit les surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution à l'aide de courbes imaginaires à torsion constante.

On peut dire que, jusqu'ici, la recherche des surfaces applicables sur les quadriques a été traitée par des méthodes directes. Le Chapitre IV nous apporte un théorème de permutabilité d'une grande harmonie simplificatrice. Une surface applicable, appartenant à une transformation B_k, étant connue, on peut avoir par quadratures toutes celles appartenant au même indice, le problème dépendant d'une équation du type de Riccati. Parmi celles-là, on peut en choisir une et obtenir une nouvelle famille par de nouvelles quadratures et ainsi de suite. Le théorème de permutabilité dont il s'agit nous affranchira de ces suites indéfinies de quadratures ; on peut le comparer, pour le précédent ensemble d'équations de Riccati, au théorème du rapport anharmonique ayant lieu pour une seule équation de Riccati ordinaire. Il donne d'ailleurs des théorèmes géométriques de même physionomie et s'accorde, de manière élémentaire, avec la simple affinité d'Ivory.

Les quadriques *conjuguées en déformation* et la transformation H font l'objet du Chapitre V. Après la déformation réglée, nous avons eu recours, avec le théorème de Chieffi, aux déformations transformant les asymptotiques en droites. Les transformations H ont lieu non entre asymptotiques véritables, mais entre

systèmes d'asymptotiques *virtuelles*, en appelant ainsi des lignes tracées sur des surfaces correspondantes et qui, par déformation de ces surfaces, peuvent devenir de véritables asymptotiques. Ces transformations H ne vont pas sans la conservation de systèmes conjugués qui, de ce fait, sont dits *permanents;* elles généralisent des transformations de surfaces à courbure constantes; si les surfaces à transformer sont considérées comme nappes focales d'une congruence W, il est loisible, dans la transformation, de leur conserver cette origine, d'où d'intimes combinaisons entre les transformations H et B_k.

Quant aux systèmes conjugués permanents sur les surfaces résultant de la déformation des quadriques, le Chapitre VI leur est consacré en entier. Ces systèmes conjugués n'apparaissent point comme chose accessoire; leur existence équivaut, au fond, à la possibilité de la déformation et les étudier d'abord c'est attaquer le problème sur un autre front. Ce point de vue serait plutôt celui de Gaston Darboux, qui rattache la question aux équations aux dérivées partielles [1]. En s'en tenant aux quadriques, on peut dire que leur déformation revient à la recherche des réductions

$$e\,du^2 + g\,dv^2 = d\alpha^2 + d\beta^2,$$

en lesquelles $e + g$ égale une fonction donnée $H(\alpha, \beta)$. A un théorème de G. Darboux sur le caractère isotherme des systèmes conjugués permanents sur quadriques déformées, s'en ajoute un autre, de M. Servant, sur la détermination par quadratures de ces systèmes.

Tout ces résultats sont susceptibles d'extensions dans l'espace non euclidien, ce qui est plus particulièrement précisé, au point de vue géométrique, dans un septième et dernier Chapitre sur la déformation des quadriques de révolution et des quadriques tangentes à l'absolu. Un beau théorème de M. Guichard lie les quadriques de révolution déformées aux surfaces à courbure constante; c'est un nouvel aspect de la transformation de Bäcklund.

---

[1] Voir ses *Leçons sur la Théorie générale des Surfaces et sur les applications géométriques du Calcul infinitésimal*, IIe partie, 2e édition, 1915.

Les propriétés établies d'abord pour quadriques bitangentes à l'absolu peuvent être modifiées de manière à s'appliquer encore à celles qui ne touchent cet absolu qu'en un point; à la nature de ce dernier contact correspond d'ailleurs une certaine classification des surfaces pseudosphériques.

Deux Notes terminent l'Ouvrage. La seconde, de beaucoup la plus importante, se propose de retrouver la marche des raisonnements généraux, relatifs à la quadrique générale Q, dans le cas où cette Q vient à dégénérer. Certains cas de dégénérescence sont propres à éclairer d'une manière particulièrement frappante les théories du corps du Volume.

Le retard mis par le *Bulletin* à analyser ce Livre, publié en 1909, ne peut lui nuire en rien. Au contraire, il semble que la déformation des surfaces, de par les efforts de l'école franco-italienne, soit, justement maintenant, en train de progresser dans des voies nouvelles qui montrent combien Luigi Bianchi a été heureux dans la manière de disposer les diverses parties de son œuvre et d'orienter les chercheurs dans les voies les plus fécondes.

La possibilité des extensions aux espaces non euclidiens a, comme pendant, l'extension aux hyperespaces. Tentée sans précautions, cette extension semble d'abord se heurter à une impossibilité : toutes les courbes du plan sont applicables les unes sur les autres; les surfaces de l'espace ordinaire nécessitent des choix qui, ces *Leçons* le prouvent, ne vont point sans quelque difficulté; dans l'hyperespace, le choix est encore plus restrictif. On pourra consulter à ce sujet un Mémoire de M. E. Cartan (*Bulletin de la Société mathématique*, 1916, p. 65) et une Note de M. E. Bompiani (*Comptes rendus*, 26 mars 1917) qui établit que l'applicabilité ne va pas sans l'existence de réseaux conjugués persistants. C'est précisément le fait souligné par Luigi Bianchi, dans le Chapitre VI, alors qu'il ne s'agissait que de l'espace à trois dimensions.

Dans l'hyperespace ou dans l'espace ordinaire, les géomètres ont encore de belles questions à travailler.

A. BUHL.

ECHEGARAY (José). — Conferencias sobre Fisica matematica. — *Curso de* 1910 *á* 1911 : *Teoría de los torbellinos.* 1 vol. gr. in-8, 394 pages; 1911. — *Curso de* 1911 *á* 1912 : *Teorias diversas.* 1 vol. gr. in-8, 582 pages; 1912. — *Curso de* 1912 *á* 1913 : *Ecuaciones de la mecánica.* 1 vol. gr. in-8, 531 pages; 1913. — *Curso de* 1913 *á* 1914 : *Teoria de los torbellinos* (*segunda parte*). 1 vol. gr. in-8, 550 pages; 1914. — Madrid, Establecimiento Tipográfico Editorial.

José Echegaray disparaît avant d'avoir pu terminer la tâche qu'il s'était assignée dans ses *Conférences de Physique mathématique*. Il n'a traité, dans les Volumes actuellement parus, qu'une petite partie de son programme : telle qu'elle est, son œuvre est pourtant très notable et ne peut manquer d'avoir une très profonde et très heureuse influence.

J'en ai déjà défini ici même, à propos des Volumes précédents de ces *Conférences*, les caractères essentiels. Destinée à un pays qui s'éveille seulement à la vie scientifique et où, particulièrement, les études mathématiques ont été longtemps délaissées, cette œuvre se propose un double but : de vulgarisation, en présentant sous une forme très facilement accessible les principales théories de la Physique mathématique; d'éducation, en mettant le lecteur à même de poursuivre ensuite leur étude dans les Traités classiques étrangers. L'originalité de ces Livres réside donc dans l'exposition qui, descendant minutieusement jusqu'aux plus petits détails, aplanit avec soin les difficultés, d'ordre mathématique ou autre, qui pourraient troubler un lecteur encore peu familier avec les études scientifiques. Il n'y faut point chercher d'originalité dans les problèmes étudiés, ni, sous les réserves précédentes, dans les méthodes utilisées pour les traiter : l'Auteur a largement puisé aux Ouvrages classiques de Physique mathématique. C'est le plus souvent aux Ouvrages français qu'il se réfère : il est impossible de ne pas le noter ici, en saluant en Echegaray un sincère ami de notre pays, imbu de la pensée des maîtres de la Science française, dont l'œuvre contribue à resserrer les liens intellectuels entre son pays et le nôtre. J'ai déjà indiqué tout ce que les Volumes précédents doivent à l'œuvre de Henri Poincaré; c'est encore de cette œuvre et du *Traité de Mécanique rationnelle* de M. Appell que Echegaray s'inspire le plus souvent dans les Volumes dont j'ai à parler ici.

Le caractère précédemment indiqué de ces *Conférences*, préparatoires à l'étude des traités classiques de Physique mathématique, mais ne devant pas les suppléer, explique un certain laisser-aller dans leur plan, sans importance ici, mais qui constituerait un défaut dans un cours systématique. L'exposition est souvent interrompue de longues digressions parfois bien éloignées du sujet. L'Auteur n'a d'ailleurs pas à se préoccuper d'être complet et peut, dans l'exposé d'une théorie, laisser de côté des questions, pourtant importantes, pour en traiter d'autres avec plus de détails.

Les quatre Volumes des *Conférences*, dont il sera question ici, ont entre eux des liens étroits. Ayant exposé, dans son Cours de 1910-1911, les éléments de l'Hydrodynamique et commencé l'étude de la théorie des tourbillons, l'Auteur, avant d'approfondir cette étude dans le quatrième des Volumes en question, est conduit à développer la théorie du potentiel newtonien, puis les principaux résultats de la Mécanique analytique. Bien entendu il n'a pas limité l'exposition de ces théories aux quelques résultats qui lui seront immédiatement utiles dans l'étude des tourbillons : tout en restant, comme dans toutes ses Conférences, élémentaire, il n'en développe pas moins, dans ses Cours de 1911-1912 et 1912-1913, d'une façon assez complète, l'étude du potentiel et celle de la Mécanique analytique.

Après les explications précédentes sur l'esprit dans lequel sont conçus ces Livres, sur les sources dont ils dérivent, je puis me borner, la plupart du temps, à indiquer brièvement les sujets traités.

Dans le premier Volume, une longue introduction (Conférences 1 à 4) est principalement consacrée à l'examen des raisons qui ont déterminé l'Auteur dans le choix de son sujet : outre son intérêt propre, la théorie des tourbillons constitue, par ses relations avec l'Electrodynamique, une excellente préparation à l'étude de cette dernière théorie ; d'autre part, les importants travaux auxquels elle a donné lieu pour fonder sur elle des explications des actions à distances par des actions de contact, en font, constate Echegaray, une théorie de transition entre la Physique mathématique classique et les théories plus modernes.

L'Auteur, abordant alors l'étude des fluides parfaits, établit les équations de leur équilibre et de leur mouvement. Il indique rapi-

dement, et sans faire aucune application, comment on résoudra les problèmes d'équilibre. Ayant enfin formé les équations du mouvement dans les deux systèmes de variables de Lagrange et d'Euler, il donne quelques indications, un peu brèves, sur la façon dont se présentent les conditions limites. Les Conférences suivantes (10-12) sont consacrées à une étude, où l'Auteur s'est efforcé de faire un appel aussi large que possible à l'intuition, de la Cinématique des fluides : étude des trajectoires, notion de vecteur tourbillon (en insistant sur sa signification cinématique), ligne tourbillon, mouvement rotationnel et irrotationnel.

Se plaçant alors dans le cas où il y a une fonction des forces, et ayant indiqué qu'il s'agit désormais, ici comme dans bien d'autres questions d'Analyse, non pas d'intégrer les équations du mouvement, mais de déduire de ces équations, sans intégration, le plus de propriétés possible du mouvement, l'Auteur aborde la théorie des tourbillons.

Il démontre d'abord le théorème sur la constance de la circulation

$$\int u\,dx + v\,dy + w\,dz$$

le long d'une ligne fluide fermée, pour en déduire le théorème de Lagrange. Ayant transformé l'intégrale précédente dans le flux du vecteur tourbillon, il établit la conservation, dans le mouvement, des lignes et surfaces tourbillons. Il définit ensuite les tubes et filets tourbillons, donne l'expression du moment de tels tubes, établit leurs plus immédiates propriétés. Se plaçant enfin dans le cas d'un mouvement permanent et ayant fait observer qu'alors les lignes de courant et le système des lignes tourbillons ne dépendront pas du temps, il forme l'équation des surfaces engendrées par les lignes de courant s'appuyant sur une, et donc une infinité de lignes tourbillons. Dans le cas d'un mouvement permanent irrotationnel, l'Auteur montre enfin, avec exemples à l'appui, que la circulation, toujours nulle si la partie du fluide irrotationnel est à connexion simple, prendra différentes valeurs constantes si la connexion est multiple.

La partie la plus élémentaire de la théorie des tourbillons étant ainsi exposée, l'Auteur se borne dans ce Volume à indiquer le problème important : connaissant dans un fluide la distribution

des tourbillons en un instant, en déduire les vitesses. Il se contente de traiter ici un cas particulier, celui d'un seul tube tourbillon de section circulaire, rectiligne et indéfini, posant *a priori* la solution classique pour la vérifier.

L'étude approfondie du problème que je viens d'indiquer nécessitant l'appui d'autres théories, l'Auteur consacre, comme il a déjà été dit au début de cette analyse, les deux Volumes suivants de ses Conférences à leur développement.

C'est d'abord (Cours de 1911-1912) la théorie du potentiel newtonien : étude du champ et de l'énergie d'un système de masses discontinues, étude des systèmes continus (l'Auteur se borne ici à étudier les potentiels solides, l'existence de leurs dérivées premières et secondes et à établir l'équation de Poisson). Passant alors à l'équation de Laplace et ayant mis en évidence, pour le cas de deux variables, le lien entre cette équation et la théorie des fonctions de variable complexe, Echegaray étudie, pour l'équation à trois variables, les propriétés générales des fonctions harmoniques; il pose ensuite le problème de Dirichlet et, ayant expliqué comment on doit prévoir physiquement l'existence de sa solution, il développe la suite des concepts qui conduisent à la notion de fonction de Green et mettent en évidence son importance dans la résolution du problème de Dirichlet. Il forme enfin la fonction de Green dans le cas de la sphère. On ne trouvera dans ce Livre nulle indication sur les diverses méthodes qui permettent, dans le cas général, de prouver l'existence de la solution du problème de Dirichlet.

Après avoir établi les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction harmonique soit un potentiel, il consacre la fin de ce Cours à quelques exemples particuliers, tirés des Traités classiques de Poincaré et de M. Appell : potentiel d'une surface sphérique homogène, du volume compris entre deux sphères concentriques, potentiel d'un ellipsoïde homogène.

La dernière Conférence est enfin consacrée à une étude rapide des polynomes harmoniques et de leur application au développement en série du potentiel.

Dans le Volume suivant, Echegaray expose la Mécanique analytique : il justifie d'abord la place qu'il donne à cette étude dans ses Conférences, en indiquant son importance en Physique mathé-

matique; il insiste en même temps sur les limites du champ d'application de cette théorie, provenant d'abord du fait que les équations de Lagrange ne s'appliquent qu'à certains systèmes mécaniques, et d'autre part, ce qui est plus grave au point de vue théorique, du fait que, d'après les théories modernes, la Mécanique rationnelle classique doit être considérée comme une première approximation.

Déjà, dans le premier Volume de son œuvre, l'Auteur avait établi les équations de Lagrange, les déduisant du principe de Hamilton. Il les réétablit ici directement, pour en conclure enfin les équations canoniques, en s'attachant beaucoup, et avec plein succès, à présenter le plus naturellement possible cette dernière transformation.

Arrivant enfin au problème de l'intégration, Echegaray étudie en détail la théorie des parenthèses de Poisson, puis démontre le théorème fondamental de Jacobi, ramenant l'intégration des équations de Hamilton à la recherche d'une intégrale complète d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre. Comme application de ces résultats, il démontre un théorème de Liouville : « Étant donné le système canonique

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

dont on connaît k intégrales indépendantes du temps, et telles que les parenthèses de Poisson de ces intégrales prises deux à deux soient nulles, le système s'intègre par quadratures. »

On trouvera enfin dans ce Volume, après l'exposé des relations entre l'intégration du système

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n},$$

et de l'équation

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0,$$

une bonne exposition de la théorie des multiplicateurs de Jacobi. En terminant, l'Auteur démontre le théorème de Liouville qui

indique l'existence de l'invariant intégral

$$\underbrace{\int \ldots \int}_{2k} dq_1\, dq_2 \ldots dq_k\, dp_1 \ldots dp_k$$

pour les équations de Hamilton; on sait que ce résultat, important en Mécanique statistique, n'est pas distinct de l'existence, pour les équations canoniques, du multiplicateur 1.

L'Auteur peut alors reprendre (Cours de 1913-1914) l'exposé de la théorie des tourbillons. Après avoir indiqué, assez rapidement, les résultats généraux sur un mouvement plan irrotationnel, il établit, en s'appuyant sur les résultats obtenus dans le premier Volume pour la distribution des vitesses autour d'un tourbillon filiforme, les équations du mouvement de trois tourbillons filiformes parallèles : on sait que ces équations se mettent aisément sous forme canonique; l'Auteur prouve l'existence des quatre intégrales premières classiques qui, grâce au multiplicateur 1, permettent d'achever l'intégration par quadratures.

Il revient alors au problème posé dans le premier Volume : *connaissant en un instant les tourbillons, déterminer les vitesses, pour le traiter complètement* (détermination des solutions et unicité) *dans le cas d'un liquide indéfini.* On sait que la théorie du potentiel conduit aisément à la solution, dont Echegaray donne l'interprétation vectorielle, sans négliger le développement des analogies électrodynamiques. Il établit ensuite la forme particulière que prend la solution, par introduction de la fonction de Stokes, dans le cas d'un système de tourbillons circulaires de même axe.

Examinant enfin le cas d'un liquide contenu dans un vase, l'Auteur montre comment, en remplissant l'espace extérieur d'un liquide immobile relié au premier par une couche de passage, on se ramène au cas précédent. Mais les formules qui donnent la solution contiennent alors non seulement les tourbillons, mais les vitesses aux parois de vase. Il étudie ensuite très sommairement, donnant seulement une idée de la méthode, le cas d'un liquide compressible.

La fin de ce Cours est consacré à des questions assez différentes. Supposant le fluide visqueux, l'Auteur établit, d'après Stokes,

les équations du mouvement de ce fluide (il met bien en évidence l'analogie entre la méthode employée et celle qui permet d'établir les équations de l'élasticité); l'étude du travail dépensé dans la déformation d'un parallélépipède élémentaire le conduit à la notion, essentielle pour la suite, de *fonction dissipation* de Lord Rayleigh. Il applique enfin les théories précédentes à l'étude de la chute, à partir du moment où la vitesse est uniforme, d'un corps pesant de révolution autour de la verticale, dans un fluide visqueux : il s'agit de déterminer la relation entre le poids et la vitesse limite. L'Auteur suit la méthode d'exposition de l'Hydrodynamique de Lamb : les équations du problème se réduisent, en coordonnées polaires, à une équation simple; on en trouve aisément les solutions particulières permettant de remplir les conditions aux limites si le corps est sphérique. Il n'y a alors plus de difficulté à calculer le travail dissipé par la viscosité et, comme il doit être égal au travail des forces de pesanteur, on obtient finalement la célèbre formule de Stokes qui exprime la vitesse limite du corps.

Pour traiter une application de cette formule de Stokes, l'Auteur expose en terminant, d'après Thomson, la détermination du nombre d'ions contenus dans un gaz ionisé, et par conséquent de la charge élémentaire d'électricité, par observation de la vitesse de chute d'un nuage formé par détente adiabatique dans le gaz ionisé. Il a glissé, un peu légèrement sans doute, sur les points faibles de la méthode [impossibilité d'appliquer la loi de Stokes, établie pour un liquide incompressible, dans le cas d'un gaz; hypothèse que chaque goutte ne porte qu'un ion (1)]. Il est vrai qu'il s'agissait, non point d'exposer cette nouvelle théorie, mais d'illustrer d'un exemple les théories déjà exposées et de montrer une fois de plus l'aide mutuelle que des branches toutes différentes de la Science peuvent se prêter.

JOSEPH PÉRÈS.

(1) Le lecteur pourra se reporter, pour une discussion de ces questions et pour l'étude des recherches plus récentes sur ce sujet, au beau Livre de M. Perrin : *Les Atomes* (Alcan, 1913).

AL-KHOWARIZMI. — ALGEBRA. ROBERT OF CHESTER'S *Latin Translation.* With an Introduction, critical Notes and an english Version by LOUIS-CHARLES KARPINSKI. (University of Michigan Studies, Humanistic Series, vol. XI, Part I.) 1 vol. in-8 jésus, VII-164 pages; avec 4 planches fac-simile de manuscrits et 25 diagrammes dans le texte. New-York, The Macmillan Company, 1915.

Ce Livre est une contribution à l'histoire des Sciences mathématiques. Dans une Introduction, M. Karpinski étudie ce qu'était l'Analyse algébrique avant Al-Khowarizmi; il indique les premières apparitions de l'équation du second degré, les constructions des racines que l'on connaissait. Puis il donne quelques renseignements sur le grand mathématicien arabe Al-Khowarizmi, sur ses divers Ouvrages, et en particulier sur son Algèbre. Il analyse l'influence qu'a eue cette Algèbre sur le développement des Mathématiques. Il attire ensuite notre attention sur Robert de Chester, et les autres traducteurs d'arabe en latin de l'époque. Il indique les omissions ou altérations de la traduction en latin faite par Robert de Chester de l'Algèbre d'Al-Khowarizmi, et leurs causes, en s'appuyant sur le texte arabe de l'Algèbre publié par Rosen. Il énumère et compare les divers manuscrits de la traduction de Robert de Chester.

Cette Introduction est suivie de la publication du texte latin avec, en regard, la traduction en anglais, le tout accompagné de nombreuses Notes explicatives.

Le texte a été très minutieusement étudié, et traduit consciencieusement. Du reste le Livre se termine par un lexique latin-anglais, où M. Karpinski s'est donné la peine, pour chaque mot, d'indiquer la page et la ligne où la traduction est utilisable. De l'Algèbre elle-même je ne dirai rien, sinon qu'elle sera utile aux savants qui s'intéressent à la manière dont on traitait au XII[e] siècle les problèmes du second degré.

R. LE VAVASSEUR.

MÉLANGES.

SUR LES TRANSFORMATIONS PONCTUELLES QUI CONSERVENT LES VOLUMES;

Par M. E. GOURSAT.

On n'a pas encore donné, du moins à ma connaissance [1], les équations finies, sans aucun signe de quadrature, du groupe infini formé par les transformations ponctuelles qui conservent les volumes dans l'espace à n dimensions. Ayant été conduit à m'occuper de cette question, à propos de certaines généralisations du problème de Pfaff, j'ai obtenu un système d'équations assez simple pour représenter ces transformations. Le même résultat peut aussi s'établir par une voie très élémentaire que je vais indiquer ici.

1. La solution du problème est bien facile pour $n = 2$. Cependant j'étudierai d'abord ce cas particulier, parce que la méthode qui s'applique à n quelconque est une extension naturelle de celle qui fait l'objet de ce paragraphe.

Les transformations ponctuelles du plan qui conservent les aires sont définies par les formules

$$(1) \qquad X = f(x, y), \qquad Y = \varphi(x, y).$$

---

[1] Depuis que ces lignes sont écrites (janvier 1916), j'ai reconnu que M. Demoulin s'était déjà occupé de la résolution de l'équation

$$\frac{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

qui se ramène par un changement de variables à l'équation dont je m'occupe, correspondant au cas où $F = 1$ (*Résolution d'un problème de Calcul intégral*, *Comptes rendus*, t. 157, p. 1505, 29 décembre 1913). M. Demoulin indique comment on peut résoudre le problème de proche en proche pour $n = 2, 3, 4, \ldots$, mais il ne donne pas les formules définitives qui conviennent au cas général.

où les deux fonctions $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ satisfont à la relation

$$(2) \qquad \Delta = \frac{D(f, \varphi)}{D(x, y)} = \pm 1.$$

Il n'y a pas lieu de distinguer le cas où $\Delta = -1$ du cas où $\Delta = 1$, car on passe de l'un à l'autre en permutant x et y, ou X et Y, ou encore en changeant X en $-$X. Pour trouver tous les systèmes de deux fonctions $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$, vérifiant la relation (2), nous pouvons toujours supposer que $\varphi(x, y)$ dépend de y. En effet, cette fonction dépend au moins de l'une des variables x ou y; si elle ne renfermait que x, il suffirait de permuter x et y pour être ramené au cas où elle contient y. On peut donc supposer la seconde équation du système (1) résolue par rapport à y, et, en remplaçant y par son expression dans la première équation, le système (1) est remplacé par le système équivalent

$$(3) \qquad X = F(x, Y), \qquad \Phi(x, Y) = y.$$

De ces équations on tire immédiatement

$$\frac{D(X, Y)}{D(x, y)} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y};$$

mais la dérivée $\frac{\partial Y}{\partial y}$ de la fonction implicite Y définie par la seconde équation (3) est donnée par la relation

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial y} = 1.$$

On a donc

$$\frac{D(X, Y)}{D(x, y)} = \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial \Phi}{\partial Y},$$

et la condition $\Delta = 1$ devient

$$(4) \qquad \frac{\partial F(x, Y)}{\partial x} = \frac{\partial \Phi(x, Y)}{\partial Y}.$$

Les fonctions $F(x, Y)$, $\Phi(x, Y)$ sont donc les dérivées partielles d'une fonction $U(x, Y)$, et les formules qui définissent la transformation sont de la forme

$$(5) \qquad X = \frac{\partial U(x, Y)}{\partial Y}, \qquad \frac{\partial U(x, Y)}{\partial x} = y.$$

Inversement, quelle que soit la fonction $U(x, Y)$, pourvu que la dérivée seconde $\frac{\partial^2 U}{\partial x \, \partial Y}$ ne soit pas nulle, le calcul précédent prouve que les formules (5) définissent une transformation du plan qui conserve les aires. Cette fonction U étant choisie, pour avoir les expressions explicites de X et de Y, il faudra résoudre la seconde équation par rapport à Y. Il faudra au contraire résoudre la première équation par rapport à x pour avoir les formules explicites de la transformation inverse.

On aura par exemple les transformations qui font correspondre aux droites parallèles $x =$ const. les droites parallèles $X =$ const., en prenant pour U une fonction linéaire de Y,

$$U = Y f(x) + \varphi(x).$$

Les équations (5) peuvent aussi s'écrire, en introduisant deux paramètres auxiliaires α, β,

$$(6) \qquad x = \alpha, \qquad Y = \beta, \qquad X = \frac{\partial U(\alpha, \beta)}{\partial \beta}, \qquad y = \frac{\partial U(\alpha, \beta)}{\partial \alpha};$$

pour avoir une correspondance entre les points de deux plans avec conservation des aires, il suffit d'associer les points (x, y), (X, Y) qui correspondent à un même système de valeurs des paramètres α, β. La vérification est immédiate, car on a

$$\frac{D(X, Y)}{D(\alpha, \beta)} = \frac{D(x, y)}{D(\alpha, \beta)} = \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha \, \partial \beta}.$$

Si la fonction $f(x, y)$ contient x, on peut de même écrire les formules qui définissent la transformation

$$(5') \qquad Y = \frac{\partial V(y, X)}{\partial X}, \qquad \frac{\partial V(y, X)}{\partial y} = x,$$

et l'on vérifie facilement que les deux fonctions U et V se déduisent l'une de l'autre par la transformation de Legendre.

Remarques. — 1° Si l'on remplace Y par son expression explicite $\varphi(x, y)$ dans la fonction $U(x, Y)$, le résultat est une fonction $H(x, y)$ dont on a immédiatement la différentielle

$$dH = dU = X \, dY + y \, dx.$$

Inversement, étant donnée une fonction quelconque $H(x, y)$,

si l'on a mis la différence $dH - y\,dx$ sous la forme $X\,dY$, on en déduit une transformation qui conserve les aires. Toutes les transformations que l'on déduit ainsi d'une fonction $H(x, y)$ se ramènent facilement l'une à l'autre.

2° L'équation

$$H(X, Y)\frac{D(X, Y)}{D(x, y)} = \pi(x, y), \tag{7}$$

qui se présente quand on cherche tous les modes de correspondance entre les points de deux surfaces quelconques qui conservent les aires, se ramène à l'équation (2) par un changement de variables. Posons en effet

$$X_1 = \int H(X, Y)\,dX, \qquad Y_1 = Y, \qquad x_1 = \int \pi(x, y)\,dx, \qquad y_1 = y;$$

on a

$$\frac{D(X_1, Y_1)}{D(x_1, y_1)} = \frac{D(X_1, Y_1)}{D(X, Y)}\,\frac{D(X, Y)}{D(x, y)} : \frac{D(x_1, y_1)}{D(x, y)}$$
$$= H(X, Y)\frac{D(X, Y)}{D(x, y)} : \pi(x, y),$$

et la relation (7) est remplacée par l'équation

$$\frac{D(X_1, Y_1)}{D(x_1, y_1)} = 1.$$

2. Dans le cas de n quelconque, le problème peut être posé ainsi : Trouver les expressions les plus générales de n fonctions X_1, X_2, ..., X_n de n variables indépendantes x_1, x_2, ..., x_n vérifiant la relation

$$\frac{D(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \pm 1. \tag{8}$$

Il est clair que l'on peut choisir arbitrairement $n - 1$ des fonctions X_i, par exemple X_1, ..., X_{n-1}, pourvu qu'elles soient distinctes, et la dernière X_n est alors déterminée par une équation aux dérivées partielles du premier ordre dont l'intégrale générale s'obtiendra en ajoutant à une intégrale particulière une fonction arbitraire de X_1, ..., X_{n-1}. Mais on ne voit pas immédiatement comment il faut choisir les $n - 1$ fonctions X_1, ..., X_{n-1} pour que cette équation aux dérivées partielles puisse être intégrée en

termes finis. En procédant d'une autre façon, nous allons montrer comment on peut former un système de n équations dépendant de $n-1$ fonctions arbitraires de n variables, et définissant, quelles que soient ces fonctions, n fonctions implicites X_i des variables x_i, vérifiant la relation (8).

Soient

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{l} X_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ X_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{array}\right.$$

les équations qui définissent une transformation ponctuelle, pour laquelle le jacobien $\dfrac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ est différent de zéro. On peut toujours écrire ces formules sous une forme un peu différente. La fonction f_n dépend de l'une au moins des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$; en changeant, s'il est nécessaire, l'ordre des indices des variables x_i, on peut supposer que f_n dépend de x_n. De la relation $X_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, imaginons que l'on tire x_n en fonction de $x_1, \ldots, x_{n-1}, X_n$, et que l'on remplace x_n par l'expression ainsi obtenue dans les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$; $X_1, \ldots, X_{n-1}$ s'exprimeront au moyen de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, X_n$. La fonction

$$X_{n-1} = \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, X_n)$$

dépend de l'une au moins des variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, car autrement X_{n-1} et X_n ne seraient pas indépendantes. Pour la même raison que tout à l'heure, nous pouvons supposer que φ_{n-1} dépend de x_{n-1}. On peut alors exprimer x_{n-1} au moyen de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, X_{n-1}, X_n$ et, en portant cette expression de x_{n-1} dans les fonctions précédentes, $X_1, \ldots, X_{n-2}$ s'expriment au moyen de $x_1, \ldots, x_{n-2}, X_{n-1}, X_n$. En continuant de la sorte, on voit que les équations qui définissent une transformation ponctuelle réversible peuvent toujours être mises sous la forme suivante

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{l} X_1 = F_1(x_1, X_2, X_3, \ldots, X_n), \\ X_2 = F_2(x_1, x_2, X_3, \ldots, X_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_{n-1} = F_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, X_n), \\ X_n = F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{array}\right.$$

Pour passer des formules (9) aux formules (10) il peut être nécessaire d'effectuer une permutation sur les variables x_i, ce qui peut changer le signe du jacobien, mais ce changement de signe n'a aucune importance pour la question.

Le jacobien prend une forme particulièrement simple. On a en effet

$$\Delta = \frac{D(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{D(X_2, X_3, \ldots, X_n)}{D(x_2, x_3, \ldots, x_n)},$$

puis

$$\frac{D(X_2, X_3, \ldots, X_n)}{D(x_2, x_3, \ldots, x_n)} = \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\frac{D(X_3, \ldots, X_n)}{D(x_3, \ldots, x_n)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{D(X_{n-2}, X_{n-1}, X_n)}{D(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)} = \frac{\partial F_{n-2}}{\partial x_{n-2}}\frac{D(X_{n-1}, X_n)}{D(x_{n-1}, x_n)},$$

$$\frac{D(X_{n-1}, X_n)}{D(x_{n-1}, x_n)} = \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\frac{\partial X_n}{\partial x_n} = \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\frac{\partial F_n}{\partial x_n},$$

et par suite, en multipliant membre à membre,

$$(11) \qquad \Delta = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial F_n}{\partial x_n}.$$

Pour que Δ soit différent de zéro, il faut et il suffit que chaque fonction F_i contienne la variable x_i; il est évident que la transformation est alors réversible.

Par analogie avec la forme qui convient au cas où $n = 2$, nous écrirons la première des équations (10)

$$X_1 = \frac{\partial U_1(x_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)}{\partial X_2},$$

la fonction U_1 n'étant pas complètement déterminée puisqu'elle est une quelconque des fonctions qui vérifient la relation

$$\frac{\partial U_1}{\partial X_2} = F_1(x_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Ayant choisi une de ces fonctions U_1, si, dans la dérivée

$$\frac{\partial U_1(x_1, X_2, \ldots, X_n)}{\partial x_1},$$

on remplace X_2 par $F_2(x_1, x_2, X_3, \ldots, X_n)$, le résultat de la substitution est une fonction de $x_1, x_2, X_3, \ldots, X_n$ que l'on peut

représenter par

$$\frac{\partial U_2(x_1, x_2, X_3, \ldots, X_n)}{\partial X_3},$$

de sorte que la seconde des équations (10) est remplacée par l'équation

$$\frac{\partial U_1(x_1, X_2, \ldots, X_n)}{\partial x_1} = \frac{\partial U_2(x_1, x_2, X_3, \ldots, X_n)}{\partial X_3}.$$

On peut continuer ainsi jusqu'à l'avant-dernière équation du système (10), de façon à mettre les $n - 1$ premières équations de ce système sous la nouvelle forme

$$X_1 = \frac{\partial U_1(x_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)}{\partial X_2},$$

$$\frac{\partial U_1(x_1, X_2, \ldots, X_n)}{\partial x_1} = \frac{\partial U_2(x_1, x_2, X_3, \ldots, X_n)}{\partial X_3},$$

$$\frac{\partial U_2(x_1, x_2, X_3, \ldots, X_n)}{\partial x_2} = \frac{\partial U_3(x_1, x_2, x_3, X_4, \ldots, X_n)}{\partial X_4},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial U_{n-2}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, X_{n-1}, X_n)}{\partial x_{n-2}} = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, X_n).$$

Quant à la dernière équation (10), nous l'écrirons, en la supposant résolue par rapport à x_n,

$$\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, X_n) = x_n.$$

Les fonctions F_2, F_3, ..., F_n s'obtiendraient en résolvant les équations précédentes, par rapport à X_2, X_3, ..., X_n. Les dérivées $\frac{\partial F_1}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$ sont fournies par les relations

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1\, \partial X_2},$$

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1\, \partial X_2}\,\frac{\partial F_2}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_2\, \partial X_3},$$

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_2\, \partial X_3}\,\frac{\partial F_3}{\partial x_3} = \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_3\, \partial X_4},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$\frac{\partial^2 U_{n-2}}{\partial x_{n-2}\, \partial X_{n-1}}\,\frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_{n-1}} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-1}},$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial X_n}\,\frac{\partial F_n}{\partial x_n} = 1.$$

En multipliant ces égalités membre à membre, et supprimant les facteurs communs aux deux produits, il reste

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial F_n}{\partial x_n}\frac{\partial \Psi}{\partial X_n}=\frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-1}}.$$

Pour que le jacobien Δ soit égal à un, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{\partial \Psi}{\partial X_n}=\frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-1}},$$

c'est-à-dire que Φ et Ψ soient de la forme

$$\Phi=\frac{\partial U_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, X_n)}{\partial X_n},$$
$$\Psi=\frac{\partial U_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, X_n)}{\partial x_{n-1}}.$$

Les équations qui définissent la transformation peuvent donc être mises sous la forme

$$(12)\quad \begin{cases} X_1=\dfrac{\partial U_1(x_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)}{\partial X_2}, \\ \dfrac{\partial U_1(x_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)}{\partial x_1}=\dfrac{\partial U_2(x_1, x_2, X_3, \ldots, X_n)}{\partial X_3}, \\ \dfrac{\partial U_2(x_1, x_2, X_3, \ldots, X_n)}{\partial x_2}=\dfrac{\partial U_3(x_1, x_2, x_3, X_4, \ldots, X_n)}{\partial X_4}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial U_{n-2}(x_1, \ldots, x_{n-2}, X_{n-1}, X_n)}{\partial x_{n-2}}=\dfrac{\partial U_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, X_n)}{\partial X_n}, \\ \dfrac{\partial U_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, X_n)}{\partial x_{n-1}}=x_n. \end{cases}$$

Inversement, étant données $n-1$ fonctions arbitraires de leurs arguments

$$U_1(x_1, X_2, \ldots, X_n), \quad U_2(x_1, x_2, X_3, \ldots, X_n), \quad \ldots, \quad U_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, X_n),$$

telles que les dérivées secondes

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1\, \partial X_2}, \quad \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_2\, \partial X_3}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^2 U_{n-1}}{\partial x_{n-1}\, \partial X_n}$$

ne soient pas nulles, les équations (12) peuvent être résolues de proche en proche, en commençant par la dernière, par rapport à $X_n, X_{n-1}, \ldots, X_1$, et il résulte du calcul précédent que le jaco-

bien de ces n fonctions X_i par rapport aux variables $x_1, \ldots, x_n$, est égal à un. La solution a bien le degré de généralité voulue. On aurait la transformation inverse en résolvant les équations (12), en commençant par la première, par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

3. Lorsque les fonctions $U_1, \ldots, U_{n-1}$ sont égales respectivement à $x_1 X_2, x_2 X_3, \ldots, x_{n-1} X_n$, les formules (12) deviennent $X_i = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, et l'on retrouve la transformation identique. Si l'on a $U_i = x_i X_{i+1}$, sauf pour une valeur de l'indice $i = p$, on obtient une transformation particulière définie par les formules

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} & X_i = x_i \qquad (i \neq p,\ i \neq p+1), \\ & X_p = \frac{\partial U_p(x_1, x_2, \ldots, x_p, X_{p+1}, \ldots, X_n)}{\partial X_{p+1}}, \\ & \frac{\partial U_p(x_1, \ldots, x_p, X_{p+1}, \ldots, X_n)}{\partial x_p} = x_{p+1}; \end{aligned} \right.$$

nous dirons pour abréger que cette transformation, qui ne change que les deux variables x_p, x_{p+1}, est une transformation *binaire*. Nous allons montrer que *la transformation générale définie par les formules* (12) *est un produit de transformations de cette espèce*.

Considérons en effet les deux transformations T′, T″, définies par les formules

$$(\mathrm{T}')\quad \left\{ \begin{aligned} & x'_1 = x_1, \qquad \ldots, \qquad x'_p = x_p, \\ & x'_{p+1} = \frac{\partial U_{p+1}(x_1, \ldots, x_{p+1}, x'_{p+2}, \ldots, x'_n)}{\partial x_{p+2}}, \\ & \frac{\partial U_{p+1}(x_1, \ldots, x_{p+1}, x'_{p+2}, \ldots, x'_n)}{\partial x_{p+1}} = \frac{\partial U_{p+2}(x_1, \ldots, x_{p+2}, x'_{p+3}, \ldots, x'_n)}{\partial x'_{p+3}}, \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \frac{\partial U_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x'_n)}{\partial x_{n-1}} = x_n; \end{aligned} \right.$$

$$(\mathrm{T}'')\quad \left\{ \begin{aligned} & X_1 = \frac{\partial U_1(x'_1, X_2, \ldots, X_n)}{\partial X_2}, \\ & \frac{\partial U_1(x'_1, X_2, \ldots, X_n)}{\partial x_1} = \frac{\partial U_2(x'_1, x'_2, X_3, \ldots, X_n)}{\partial X_3}, \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \frac{\partial U_p(x'_1, \ldots, x'_p, X_{p+1}, \ldots, X_n)}{\partial x'_p} = x_{p+1}, \\ & X_{p+2} = x'_{p+2}, \qquad \ldots, \qquad X_n = x'_n. \end{aligned} \right.$$

Le produit T des deux transformations T', T'', effectuées successivement est précisément défini par les formules (12), car on obtient ces formules en éliminant les variables x'_i entre les deux groupes de formules précédents.

En faisant $p = n - 2$, la transformation T est décomposée en un produit de deux transformations dont l'une T' ne change que les deux dernières variables

$$x'_1 = x_1, \quad \ldots, \quad x'_{n-2} = x_{n-2},$$

$$x'_{n-1} = \frac{\partial U_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x'_n)}{\partial x'_n}, \qquad \frac{\partial U_{n-1}}{\partial x_{n-1}} = x_n,$$

tandis que la transformation T'' est une transformation de la forme générale (12), ne portant que sur les $n - 1$ variables $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n-1}$, jointe à l'équation $X_n = x'_n$. On peut à son tour décomposer T'' en un produit de deux transformations dont l'une ne porte que sur deux variables, et l'autre sur $n - 2$ variables. En continuant de la sorte, il est clair qu'après $n - 1$ opérations on aura décomposé la transformation considérée en un produit de $n - 1$ transformations de la forme (13), dont chacune ne porte que sur deux des variables.

Remarque. — L'équation

$$(14) \qquad H(X_1, X_2, \ldots, X_n)\,\frac{D(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \pi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

se ramène à la forme (8) en posant

$$Y_1 = \int H(X_1, X_2, \ldots, X_n)\, dX_1, \qquad Y_2 = X_2, \qquad \ldots, \qquad Y_n = X_n,$$

$$y_1 = \int \pi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1, \qquad y_2 = x_2, \qquad \ldots, \qquad y_n = x_n.$$

4. J'avais d'abord obtenu les formules (12) en partant de considérations empruntées à la théorie des formes symboliques de différentielles, qui généralisent la *Remarque I* du premier paragraphe. Soit

$$\omega = \sum A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}}\, dx_{\alpha_1}\, dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_{n-1}}$$

une forme symbolique de degré $n - 1$, où les coefficients sont des fonctions des n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la

sommation étant étendue à toutes les combinaisons $n-1$ à $n-1$ des n premiers nombres. Nous dirons avec H. Poincaré que ω est une *différentielle totale symbolique* si l'intégrale multiple $\int\omega$, étendue à une variété fermée quelconque E_{n-1} de l'espace à n dimensions, est nulle, les coefficients et leurs dérivées partielles étant supposés continus sur E_{n-1} et dans la variété à n dimensions E_n limitée par E_{n-1}. Toute forme symbolique $dF_1\, dF_2 \ldots dF_{n-1}$ est une différentielle totale, quelles que soient les fonctions F_1, F_2, ..., F_{n-1}, et il en est évidemment de même de la somme d'un nombre quelconque de produits symboliques de cette espèce.

Cela posé, soient X_1, X_2, ..., X_n des fonctions de x_1, x_2, ..., x_n et

$$F_1(x_1, X_2, \ldots, X_n), \quad F_2(x_1, x_2, X_3, \ldots, X_n), \quad \ldots,$$
$$F_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, X_n)$$

un système de $n-1$ fonctions arbitraires de leurs arguments. La forme symbolique

$$\omega_{n-1} = dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-2}\, dF_{n-1} + dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-3}\, dX_n\, dF_{n-2} + \ldots$$
$$+ dx_1\, dX_4 \ldots dX_n\, dF_2 + dX_3\, dX_4 \ldots dX_n\, dF_1$$

est une différentielle totale, et en la développant, d'après les règles du calcul symbolique, on a aussi

$$\omega_{n-1} = \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1} + dx_1 \ldots dx_{n-2}\, dX_n \left(\frac{\partial F_{n-1}}{\partial X_n} - \frac{\partial F_{n-2}}{\partial x_{n-2}}\right)$$
$$+ dx_1 \ldots dx_{n-3}\, dX_{n-1}\, dX_n \left(\frac{\partial F_{n-3}}{\partial x_{n-3}} - \frac{\partial F_{n-2}}{\partial X_{n-2}}\right) + \ldots$$
$$+ dx_1\, dX_3 \ldots dX_n \left(\frac{\partial F_2}{\partial X_3} - \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\right) + dX_2\, dX_3 \ldots dX_n \frac{\partial F_1}{\partial X_2}.$$

Si les fonctions X_1, X_2, ..., X_n vérifient les relations (12), où l'on aurait remplacé U_i par F_i, l'expression de ω_{n-1} se réduit à

$$\omega_{n-1} = x_n\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1} = X_1\, dX_2 \ldots dX_n.$$

Lorsque le point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ décrit une multiplicité fermée E_{n-1}, le point $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ décrit aussi une multiplicité fermée E'_{n-1} et, puisque ω_{n-1} est une différentielle totale,

les deux intégrales

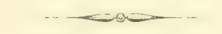
$$\int_{E_{n-1}} x_n\,dx_1\,dx_2\ldots dx_{n-1} \quad \text{et} \quad \int_{E'_{n-1}} X_1\,dX_2\ldots dX_n$$

sont égales au signe près.

Or ces deux intégrales sont aussi égales au signe près aux deux intégrales

$$\int_{E_n} dx_1\,dx_2\ldots dx_n, \quad \int_{E'_n} dX_1\,dX_2\ldots dX_n$$

étendues aux variétés correspondantes à n dimensions E_n et E'_n, qui sont limitées respectivement par E_{n-1} et E'_{n-1}.



SUR L'IMPOSSIBILITÉ D'UNE CERTAINE GÉNÉRALISATION DES TRANSFORMATIONS DE CONTACT;

PAR M. P. DROUIN.

1. Soit le système du premier ordre

$$(1) \qquad F_i(x_1\ldots x_p,\ z_1\ldots z_m,\ p_1^1\ldots p_p^m) = 0 \qquad (i=1,2,\ldots,\mu),$$

où $z_1\ldots z_m$ sont m fonctions inconnues de p variables $x_1\ldots x_p$, et où l'on a posé $p_i^k = \frac{\partial z_k}{\partial x_i}$. On peut dire qu'intégrer ce système, c'est trouver toutes les $m(p+1)$ fonctions $z_1\ldots z_m$, $p_1^1\ldots p_p^m$ de $x_1\ldots x_p$, satisfaisant aux équations (1) et aux équations

$$(2) \qquad \delta_i = dz_i - p_1^i\,dx_1 - p_2^i\,dx_2 - \ldots - p_p^i\,dx_p = 0.$$

En suivant une voie tout à fait semblable à celle qui conduit aux transformations de contact dans le cas où $m=1$, on pourrait se proposer de déterminer $m(p+1)$ nouvelles fonctions $Z_1\ldots Z_m$, $P_1^1\ldots P_p^m$ de p nouvelles variables $X_1\ldots X_p$, par la condition que, en posant

$$\Delta_i = dZ_i - P_1^i\,dX_1 - P_2^i\,dX_2 - \ldots - P_p^i\,dX_p,$$

on ait, entre les Δ et les δ, m relations linéaires

$$(3)\qquad \sum_{i=1}^{i=m} a_i^r \delta_i + \sum_{i=1}^{i=m} A_i^r \Delta_i = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, m),$$

où le déterminant des a et celui des A soient tous les deux différents de zéro, en sorte que les équations (2) entraînent les équations $\Delta_i = 0$, et réciproquement. Il est clair d'ailleurs que, le déterminant $|a_i^k|$ étant différent de zéro, on pourra, sans diminuer la généralité, résoudre les équations (3) par rapport aux δ, et les prendre sous la forme

$$(4)\qquad \delta_i = \sum_{j=1}^{j=m} \mathrm{X}_j^i \Delta_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

2. Les relations (4) expriment qu'il existe entre les x, z, X, Z, au moins m relations; supposons qu'il en existe $m+n$

$$\mathrm{H}_s(x_1 \ldots x_p, z_1 \ldots z_m, \mathrm{X}_1 \ldots \mathrm{X}_p, \mathrm{Z}_1 \ldots \mathrm{Z}_m) = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, m+n),$$

les équations (4) devront être des conséquences des équations $d\mathrm{H}_s = 0$, et l'on devra pouvoir trouver $m(m+n)$ facteurs λ_i^k tels que

$$\delta_i - \sum_{j=1}^{j=m} \alpha_j^i \Delta_j = \lambda_1^i \, d\mathrm{H}_1 + \lambda_2^i \, d\mathrm{H}_2 + \ldots + \lambda_{m+n}^i \, d\mathrm{H}_{m+n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

En égalant dans les deux membres de ces équations les coefficients des différentielles, on obtient en définitive

$$(5)\quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{e=1}^{e=m+n} \lambda_e^i \frac{\partial \mathrm{H}_e}{\partial z_i} = 1, \qquad \sum_{e=1}^{e=m+n} \lambda_e^i \frac{\partial \mathrm{H}_e}{\partial z_k} = 0 \\ \qquad \text{pour } k \neq i \quad \text{et} \quad i = 1, 2, \ldots, m. \\ \displaystyle p_s^i = -\sum_{e=1}^{e=m+n} \lambda_e^i \frac{\partial \mathrm{H}_e}{\partial x_s} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m; \quad s = 1, 2, \ldots, p), \\ \displaystyle \alpha_j^i = -\sum_{e=1}^{e=m+n} \lambda_e^i \frac{\partial \mathrm{H}_e}{\partial \mathrm{Z}_j} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, m), \\ \displaystyle \sum_{j=1}^{j=m} \alpha_j^i \mathrm{P}_s^j = \sum_{e=1}^{e=m+n} \lambda_e^i \frac{\partial \mathrm{H}_e}{\partial \mathrm{X}_s} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m; \quad s = 1, 2, \ldots, p). \end{array} \right.$$

soit un système de $2(m^2 + mp)$ équations : si de ces équations on élimine les α et les λ, puis qu'on adjoigne au système obtenu les m équations $H_s = 0$, on sera donc conduit à

$$2(m^2 + mp) + m - (m + p + mp) = m^2 - m(m - n) + (m - 1)(p - n)$$

équations de plus qu'il n'en faudrait pour déterminer les x, z, p, au moyen des X, Z, P, ou réciproquement, sans qu'il y ait impossibilité. Écartons dès maintenant les deux cas possibles où ce nombre d'équations supplémentaires est nul :

1° Si $m = 1$, on se trouve dans le cas habituel d'une transformation de contact ;

2° Si $n = p$, les équations $H_i = 0$ déterminent une transformation ponctuelle ordinaire.

Ces deux cas exceptés, il y a trop d'équations entre les x, z, p, X, Z, P, et, au moins à première vue, on n'est pas conduit à une transformation.

3. Plaçons-nous dans ce cas ; soit $m > 1$, et supposons pour simplifier qu'on ait $n = 0$. Le nombre des relations $H_s = 0$ étant maintenant égal à m, ni l'un ni l'autre des deux déterminants

$$D = \frac{D(H_1 \ldots H_m)}{D(z_1 \ldots z_m)} \qquad \text{et} \qquad D' = \frac{D(H_1 \ldots H_m)}{D(Z_1 \ldots Z_m)}$$

ne peut être nul identiquement : en désignant alors par

$$D(H_e, z_i)$$

le déterminant obtenu en supprimant dans D la ligne des dérivées de H_e et la colonne des dérivées par rapport à z_i, *et en conservant l'ordre des autres éléments*, nous tirerons des équations (5),

$$\lambda_e^i = \frac{D(H_e, z_i)}{D}$$

$$\alpha_k^i = -\sum_{e=1}^{e=m} \frac{D(H_e, z_i)}{D} \frac{\partial H_e}{\partial Z_k}$$

$$(e = 1, 2, \ldots, m;\ i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, m),$$

et les $2mp$ équations restantes du système (5) deviennent, quand

on élimine les z et les λ.

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} & p^i_s = -\sum_{e=1}^{e=m} \frac{D(H_e, z_i)}{D}\,\frac{\partial H_e}{\partial x_s} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m;\ s = 1, 2, \ldots, p), \\ & \sum_{k=1}^{k=m} P^k_s \sum_{e=1}^{e=m} \frac{D(H_e, z_i)}{D}\,\frac{\partial H_e}{\partial Z_k} = -\sum_{e=1}^{e=m} \frac{D(H_e, z_i)}{D}\,\frac{\partial H_e}{\partial X_s}. \end{aligned}\right.$$

Soit F une fonction de quelques-unes des variables $y_1, \ldots, y_r$; désignons par

$$(y_k, y_i)(F)$$

le résultat obtenu en substituant dans F la variable y_k à la variable y_i. De même, désignons symboliquement par

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial x_\beta}\right)(D)$$

le résultat obtenu en remplaçant dans D les dérivées par rapport à x_β par des dérivées par rapport à z_α. En se reportant aux équations (6), nous voyons qu'on a, avec cette notation,

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} & p^i_s = -\frac{\left(\dfrac{\partial}{\partial z_i}, \dfrac{\partial}{\partial x_s}\right)(D)}{D} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m;\ s = 1, 2, \ldots, p), \\ & \sum_{k=1}^{k=m} P^k_s \left(\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial Z_k}\right)(D) = -\left(\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial X_s}\right)(D). \end{aligned}\right.$$

En considérant toutes celles des équations contenant les P, qui correspondent à une même valeur de s et à $i = 1, 2, \ldots, m$, on voit qu'en posant

$$W = \begin{vmatrix} \left(\dfrac{\partial}{\partial z_1}, \dfrac{\partial}{\partial Z_1}\right)(D) & \ldots & \left(\dfrac{\partial}{\partial z_1}, \dfrac{\partial}{\partial Z_m}\right)(D) \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial z_2}, \dfrac{\partial}{\partial Z_1}\right)(D) & \ldots & \left(\dfrac{\partial}{\partial z_2}, \dfrac{\partial}{\partial Z_m}\right)(D) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial z_m}, \dfrac{\partial}{\partial Z_1}\right)(D) & \ldots & \left(\dfrac{\partial}{\partial z_m}, \dfrac{\partial}{\partial Z_m}\right)(D) \end{vmatrix},$$

on aura

$$P^k_s = -\frac{\left(\dfrac{\partial}{\partial Z_k}, \dfrac{\partial}{\partial X_s}\right)(W)}{W},$$

à la condition que W ne soit pas identiquement nul. Mais en développant les éléments de W, un calcul assez long montre qu'on a

$$W = D.D'.$$

Comme d'ailleurs D ne contient pas de dérivées par rapport aux Z, on aura évidemment

$$\left(\frac{\partial}{\partial Z_k}, \frac{\partial}{\partial X_s}\right)(D.D') = \left(\frac{\partial}{\partial Z_k}, \frac{\partial}{\partial X_s}\right)(D').D,$$

et les équations (7) prennent enfin la forme

$$p_s^i = -\frac{\left(\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial x_s}\right)(D)}{D},$$

$$P_s^k = -\frac{\left(\frac{\partial}{\partial Z_k}, \frac{\partial}{\partial X_s}\right)(D')}{D'};$$

elles expriment tout simplement que les p et les P sont solutions des équations linéaires

$$(8)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{i=m} \frac{\partial H_e}{\partial z_i} p_s^i + \frac{\partial H_e}{\partial x_s} = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{k=m} \frac{\partial H_e}{\partial Z_k} P_s^k + \frac{\partial H_e}{\partial X_s} = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} e = 1, 2, \ldots, m \\ s = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}.$$

En définitive, entre les x, z, p, X, Z, P, nous aurons les $2mp + m$ relations (8) et $H_e = 0$. Si, entre toutes ces équations, on élimine les $(m + p + mp)$ quantités X, Z, P, on sera conduit, en général, à un système du premier ordre (s) en x, z, p. Si, au contraire, on élimine les petites lettres on sera également conduit à un système du premier ordre en X, Z, P; soit (S) ce système. On peut encore dire que le système des équations (8) et $H_e = 0$ est équivalent à un système donnant les grandes lettres en fonction des petites et à un système de $p(m-1)$ équations en x, z, p; ou encore, à un système donnant les petites lettres en fonction des grandes et à $p(m-1)$ équations en X, P, Z.

4. Si le système donné (1) est quelconque, il y aura en général

impossibilité, puisque, outre les équations (1), les x, z, p, devront vérifier les équations (s). Mais supposons que le système (s) soit précisément une conséquence des équations du système (1) : pour plus de simplicité, supposons même que le système (1) soit identique au système (s). Alors le système obtenu en adjoignant à (8) les équations $H_e = 0$ se réduit à $m + p + mp$ équations distinctes : l'impossibilité précédente n'existe plus ; mais nous allons voir qu'il se présente une autre difficulté. En effet, il ne suffit pas que le système formé par (8) et les équations $H_e = 0$ se réduise à $m + p + mp$ équations donnant les X et les Z, au moyen des x, z, p ; il faut encore que, toutes les fois qu'on remplace les z et les p par des fonctions de $x_1 \ldots x_p$, vérifiant les équations (1) et les équations (2), les fonctions

$$X_i(x_1 \ldots x_p) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

ainsi obtenues soient *indépendantes*. Vérifions qu'ici il n'en sera pas toujours ainsi. En effet, le système (s) résulte de l'élimination des X et des Z entre les équations

$$H_e(x_1 \ldots x_p, z_1 \ldots z_m, X_1 \ldots X_p, Z_1 \ldots Z_m) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{i=m} \frac{\partial H_e}{\partial z_i} p_s^i + \frac{\partial H_e}{\partial x_s} = 0 \qquad (e = 1, 2, \ldots, m; s = 1, 2, \ldots, p),$$

et l'on voit que les relations $H_e = 0$ représentent, quand on y considère les grandes lettres comme des paramètres, *une intégrale complète de* (s); il y a donc des intégrales de (s) [qui joue ici le rôle du système donné (1)] auxquelles correspondent des valeurs constantes pour les X ; au système (s) ne correspondra donc pas un système en X, Z, P, mais bien le système résultant de l'élimination des z entre les équations

$$H_e(x_1 \ldots x_p, z_1 \ldots z_m, X_1 \ldots X_p, Z_1 \ldots Z_m) = 0,$$

$$\sum_{r=1}^{r=p} \frac{\partial H_e}{\partial X_r} \frac{\partial X_r}{\partial x_s} + \sum_{k=1}^{k=m} \frac{\partial H_e}{\partial Z_k} \frac{\partial Z_k}{\partial x_s} = 0,$$

et que fournit la méthode de la variation des constantes. La transformation, quoique pour une raison différente, se trouve donc encore impossible.

5. On peut se rendre compte d'une autre manière, sur un cas plus particulier de la nature de la première impossibilité. Supposons qu'on ait pris les relations (4) sous la forme particulière

$$(9) \qquad \delta_i - \alpha_i \Delta_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Autrement dit, à chaque fonction inconnue z_i, faisons correspondre, au moyen d'une transformation de contact ordinaire, la nouvelle fonction inconnue Z_i des variables $X_1 \ldots X_p$. Sans qu'il soit besoin de répéter des calculs connus, nous pouvons prévoir ce qui arrivera : chacune des équations (9), prise isolément, fera correspondre à $z_i, x_1, \ldots, x_p$, les nouvelles grandeurs Z_i, $X_1, \ldots, X_p$: *mais rien ne prouve que les valeurs obtenues pour* $X_1, \ldots, X_p$ *soient les mêmes quelle que soit l'équation de* (9) *qu'on ait considérée;* il est même évident qu'en général c'est le contraire qui arrivera. Les valeurs de $X_1, \ldots, X_p$, obtenues au moyen de la transformation en z_i, seront de la forme

$$X_s = \varphi_s^i(x_1 \ldots x_p, z_i, p'_1 \ldots p'_p),$$

et, pour qu'on obtienne la même valeur quel que soit i, il faudra que les $p(m-1)$ équations du premier ordre

$$(10) \qquad \varphi_s^1 = \varphi_s^2 = \ldots = \varphi_s^m \qquad (s = 1, 2, \ldots, p)$$

soient vérifiées; nous retrouvons ici le système (s), et la première impossibilité dans le cas où le système donné (1) est quelconque.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Rebière (A.). — *La Vie et les Travaux des Savants modernes, d'après les documents académiques* choisis et abrégés par l'Auteur. Troisième édition, ornée de portraits, revue et augmentée par E. Goursat. (Les deux Notices nouvelles sont consacrées à Marcellin Berthelot et à Henri Poincaré.) 1 vol. in-8, VIII-473 pages. Paris, Vuibert. Prix : 5 fr.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

REY PASTOR (J.). — INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA SUPERIOR. ESTADO ACTUAL, MÉTODOS Y PROBLEMAS. Madrid, Biblioteca Corona, 1916; petit in-8°, 202 pages.

Est-il possible et utile de populariser les théories qui forment aujourd'hui les Mathématiques supérieures? Voilà une question que certainement plusieurs savants se seront posée et qui aura reçu des réponses différentes suivant les opinions de celui qui se la posa et suivant le milieu où il vivait. Mais, sans doute, l'utilité d'un essai pour répandre les dernières conquêtes de la recherche mathématique est particulièrement évidente pour une personne vivant dans un pays où l'instruction mathématique se développe encore suivant les manuels français parus avant l'an 1850 [1]. Or, pour celui qui, enflammé en même temps par l'amour de sa Patrie et par les intérêts de la Science, aspire à révolutionner de fond en comble ce déplorable état de choses, un moyen s'offre comme extrêmement approprié, c'est celui de démontrer que les Ouvrages de Legendre, de Lacroix, de Sturm, de Duhamel, de Serret, etc., ne sont plus des portraits fidèles de notre science, faisant connaître les nouvelles mines découvertes dans les provinces d'acquisition récente et les outils puissants qu'on a forgés et mis en œuvre pour les exploiter. C'est le moyen employé depuis longtemps par M. Galdeano, l'infatigable professeur de l'Université de Sarragosse, à qui est dédié l'Ouvrage que nous analysons. C'est aussi celui adopté par le jeune professeur de l'Université de Madrid. Rentrant dans sa patrie après un long séjour dans plusieurs grandes Universités étrangères, où il fut en contact avec les nouveaux courants que suit aujourd'hui la pensée mathématique, frappé du triste spectacle qu'offre l'instruction publique dans son pays, il voulut faire connaître ces nouveaux courants aux futures espérances de la Science par une demi-douzaine de

---

(1) Cette donnée m'est fournie par un passage de la conférence *Evolución de la Matemática en la edad contemporanea*, faite par M. Rey Pastor à l'Athénée de Madrid en mars 1916.

Conférences, qu'il a eu la bonne inspiration de faire ensuite imprimer.

Dans la Conférence I, il expose les vues les plus récentes sur les fondements de l'Algèbre et de l'Analyse, en arrivant jusqu'aux nombres transfinis. Comme pendant à ce thème on trouve ensuite une Conférence consacrée aux fondements de la Géométrie ; on y apprend les critiques faites au système euclidien et les résultats de travaux entrepris depuis un siècle pour les corriger. La Conférence III est consacrée à la théorie des variables réelles, dont l'exposition est poussée assez loin pour arriver aux plus récentes généralisations de la notion d'intégrale. Le même sujet est encore développé dans la Conférence suivante, où M. Rey Pastor, en partant de l'opération « passage à la limite », fait connaître les recherches récentes sur la série de Fourier, sur les séries divergentes, sur les fonctions d'infinis variables, enfin sur les équations intégrales et intégro-différentielles. La Conférence V se rapporte à la théorie des fonctions de variables imaginaires suivant les points de vue de Cauchy, de Weierstrass et de Riemann; elle finit par un aperçu très rapide des plus importantes fonctions particulières (1). Encore plus vaste est le sujet de la dernière Conférence, dans laquelle M. Rey Pastor fait connaître le nouvel arrangement atteint par la généralité des théories mathématiques en conséquence de l'introduction de la notion de groupe. Comme il est naturel, le ton est donné par les travaux classiques de Galois et de Lie, suivis de loin par F. Klein; toute l'exposition est faite de manière à mener à la conclusion que les Mathématiques ont

(1) L'Auteur s'excuse de ne pas entrer dans des détails à ce sujet par la déclaration suivante : « Le lecteur profane comprendra quelle tâche difficile ce serait d'entrer dans ces théories particulières, dont l'étude exige la connaissance complète de la théorie moderne des fonctions analytiques à laquelle on consacre dans les Universités étrangères au moins deux semestres, lorsque dans nos écoles supérieures on ne donne pas même le concept de fonctions de variables imaginaires; et c'est seulement à la veille du doctorat, au terme de la carrière, lorsqu'il n'y a plus le temps pour en faire des applications aux autres théories, qu'on se borne timidement à quelques notions élémentaires de cette théorie, qui, cependant, est le véritable coin des Mathématiques modernes.... Faisons des vœux pour que cette réalité si bornée vienne se modifier et que les réformateurs de nos études soient heureusement inspirés et comblent une lacune si regrettable en faisant entrer dans nos programmes les théories postérieures à l'année 1851, dans laquelle Riemann inaugura une ère nouvelle » (p. 169-170).

aujourd'hui comme fondement les trois concepts : Ensemble, Fonction, Groupe.

M. Rey Pastor possède à merveille l'art d'intéresser : il choisit, avec une habileté vraiment rare, les thèmes et les faits les plus saisissants; d'ailleurs il écrit avec une clarté et une précision qui font reconnaître en lui un professeur très habile; enfin par les nombreuses et exactes citations d'Ouvrages importants il offre une aide précieuse à ses lecteurs qui désirent connaître à fond les sujets qu'il n'a pu qu'effleurer. Par conséquent, le Livre que nous venons d'analyser, quoique d'aspect bien modeste, mérite de se trouver dans la bibliothèque des étudiants tout aussi bien que sur la table des savants avancés; à ceux-là il apprendra des choses tout à fait nouvelles et aux derniers il fournira ces vues d'ensemble si utiles à quiconque se voue exclusivement à des recherches de détail.

GINO LORIA.

DUHEM (P.). — LE SYSTÈME DU MONDE. HISTOIRE DES DOCTRINES COSMOLOGIQUES DE PLATON A COPERNIC, t. IV. 1 vol. gr. in 8, 597 pages. Paris, A. Hermann et Fils, 1916.

Ce nouveau Volume du monumental travail de M. Duhem [1] comprend six longs Chapitres qui se rangent naturellement en deux sections de longueur presque égale.

Les trois premiers viennent clore la deuxième Partie de tout l'Ouvrage, car ils complètent ce qui se rapporte à l'*Astronomie latine au Moyen-Age;* deux d'entre eux traitent de l'*Astronomie parisienne au* XIVe *siècle*, le troisième de l'*Astronomie italienne.*

Ce n'est certainement pas sans d'excellentes raisons que M. Duhem a consacré presque 200 pages à l'œuvre astronomique des savants qui enseignèrent dans l'Université de Paris, car l'éclat que cette Université répandit à ce moment-là, alors que des ténè-

---

[1] Pour les Volume précédents, voyez ce *Bulletin*, 2e série, t. XXXVIII, p. 193-199; t. XXXIX, p. [illegible], et t. XL, p. [illegible]-85. Les détails dans lesquels nous sommes entrés dans ces comptes rendus nous autorisent à être aujourd'hui plus court, car, par rapport aux méthodes de recherches et d'exposition suivies par M. Duhem, nous ne pourrions que nous répéter.

bres épaisses couvraient encore la plus grande partie de l'Europe, est vraiment éblouissant. L'attrait qu'elle exerçait à cette époque, même en dehors des frontières de la France, est tel que, parmi les personnages qui y jouèrent un rôle important, nous rencontrons trois Italiens (Jean de Sicile, Jean de Gênes, Gilles de Rome), deux Allemands (Jean et Albert de Saxe), un Danois (Pierre de Dacie) et un Anglais (Marsile d'Inghen). A ces sept ou huit étrangers (je pose cette alternative, car Jean de Sicile offre le phénomène d'un probable dédoublement) font pendant les Français Guillaume de Saint-Cloud, Henri Bate de Malins, Jean de Murs, Firmin de Belleval, Jean de Linières (¹), Geofroi de Meaux, Jean de Jandun, Durand de Saint-Pourçain, Nicole Oresme et Pierre d'Aily. On pourrait probablement ajouter quelque autre nom s'il était possible de déterminer l'auteur de certains manuscrits anonymes étudiés par M. Duhem.

Sans doute, il ne s'agissait pas de penseurs originaux, mais seulement de commentateurs pleins d'érudition. Quoique Saint Thomas d'Aquin eût déjà déclaré que « le but de la Philosophie n'est pas de savoir ce que les hommes ont pensé, mais bien quelle est la vérité des choses », ils continuèrent à gaspiller leur temps sur de volumineux *in-folio*, au lieu de puiser la vérité dans l'observation et l'expérience; leur véritable mérite est donc d'avoir maintenu l'esprit humain en éveil, dans une époque de torpeur envahissante et d'avoir de la sorte préparé l'époque radieuse de la véritable Renaissance de la Science des astres. Toutefois — c'est justice de le reconnaître — ces études ont donné, dès lors, naissance à un événement d'une grande importance théorique et pratique : nous parlons du mouvement qui devait aboutir à la réforme du Calendrier; et pour montrer que la direction qu'on imprima alors à ce mouvement était rationnelle, il suffit de remarquer que la célèbre Commission instituée plus tard par le pape Grégoire XIII et présidée par Clavius, Commission qui fit aboutir la réforme, prit pour ses calculs la même base que choisirent en 1345 J. de Murs et F. de Belleval.

(¹) Dans une Note à la fin du Volume, M. Duhem a ajouté, sur ce savant, quelques nouvelles données tirées des communications faites tout récemment par M. Bigourdan à l'Académie des Sciences.

Bien moins concluants ont été les ouvrages des astronomes italiens de la même époque qui n'abandonnèrent pas leur patrie; beaucoup d'entre eux ne sont que des astrologues et il n'en est aucun qui n'ait composé quelque traité d'Astrologie judiciaire (¹). Mais, à côté d'une foule de personnes au-dessous de la médiocrité — tels que Guido Bonatti, Ristoro d'Arezzo, Barthélemy et Blaise de Parme, Cecco d'Ascoli, Paul de Venise et Gaëtan de Thiene — on trouve le grand nom de Dante, le poète immortel qui embrassa dans son vaste esprit toute la science du Moyen-Age, puis, les noms de personnalités qui depuis longtemps occupent une bonne place dans l'Histoire des sciences exactes (je veux parler de Andalò di Negro et Presdocimo de Beldomandi), enfin le nom d'un penseur remarquable, Pierre d'Abano. Ce dernier avait été déjà rencontré par M. Duhem au cours de son Tome III; dans le Tome IV, il en fait une étude achevée, en publiant pour la première fois, d'après un manuscrit existant à Paris, de longs extraits du *Lucitador Astronomiæ* de cet auteur.

Pour déterminer les contributions données par ces savants à la Science et à la Philosophie, notre Auteur a eu recours aux textes originaux (dont plusieurs sont encore inédits) et à leurs meilleurs commentateurs anciens et modernes. Une exception doit être faite au sujet de Dante. La grande importance de ce génie dans l'histoire des sciences en général a été établi (pour ne citer qu'un nom très connu) par Libri (²); quant à son savoir astronomique, en particulier, il a été l'objet de recherches profondes et si nom-

---

(¹) On doit prendre bien garde de tirer de cela la conclusion que l'Italie fût alors plongée dans les ténèbres de l'ignorance; elle était tout bonnement occupée d'autre chose. En effet, c'est au cours des XIIIᵉ et XIVᵉ siècles que fut constituée la langue italienne et que commencèrent ces grands travaux d'érudition, grâce auxquels la pensée grecque a recommencé à répandre sur le monde sa lumière bienfaisante; c'est aussi alors que virent le jour les immortels ouvrages des peintres et des architectes qui assurèrent à l'Italie la première place dans les arts muets; c'est alors enfin que commencèrent à se développer les germes de l'Algèbre qui, transportés en Europe par Léonard de Pise, produisirent peu après la magnifique floraison caractérisée par les noms de J. Cardan et N. Tartaglia et de leurs élèves. Et il est bon de remarquer que, dans l'histoire de l'Algèbre, on rencontre, sous un jour très favorable, des savants (par exemple Blaise de Parme et Presdocimo de Beldomandi) qui font une maigre figure dans l'histoire de l'Astronomie.

(²) *Histoire des Sciences mathématiques en Italie*, t. II (Paris, 1838), p. 164-1[illegible].

breuses, qu'elles forment une collection d'une richesse hors ligne; nous croyons que l'étude de cette collection aurait amené M. Duhem à ajouter plusieurs pages intéressantes à celles qu'il a consacrées à l'auteur de la *Divina Commedia* et à conclure que, en Astronomie, Dante avait bien plus que des connaissances tout élémentaires.

Les trois derniers Chapitres du Volume que nous analysons forment le début de la troisième Partie de tout l'Ouvrage, c'est-à-dire de la Section ayant pour sujet *La crue de l'Aristotélisme*. Cette Section commence par un remarquable Avant-Propos d'un caractère général sur *Le péripatétisme, les religions et les sciences d'observation*, dans lequel notre savant Auteur note d'abord que l'ensemble des œuvres scientifiques d'Aristote parut satisfaire le noble et ambitieux désir de l'homme d'embrasser dans une synthèse universelle la totalité des vérités scientifiques : c'est un désir qu'éprouvèrent les sages de l'Hellade aussi bien que les Arabes du Moyen-Age. Or, ces derniers manifestèrent, par l'organe d'Averroès, leur foi absolue et pleine d'enthousiasme dans la parole du Maître et, de cette manière, jetèrent les bases de la longue, lourde et néfaste domination d'Aristote sur tous les esprits. « Deux puissances », suivant M. Duhem, « les déterminèrent à briser le joug du Péripatétisme; ces deux puissances furent la Science expérimentale et la Théologie. La première leur fit connaître que, pour suivre le sens d'Aristote, il leur fallait abdiquer leur propre bon sens; la seconde leur affirma que leur confiance en la parole du philosophe contredisait à leur foi dans la parole de Dieu ».

Or, pour remonter aux origines du long règne d'Aristote, M. Duhem étudie avant tout *Les sources du néo-Platonisme arabe*, ensuite *Le néo-Platonisme arabe* lui-même, enfin *La théologie musulmane et Averroès*. Ces trois Chapitres forment une contribution très importante à l'Histoire générale de la pensée, bien digne d'intéresser toute personne cultivée; mais nous ne pouvons pas nous arrêter à en exposer des analyses, car ils traitent de thèmes si éloignés des Sciences exactes qu'il est impossible de les faire entrer dans le programme du *Bulletin*. Ils représentent probablement un *intermezzo* indispensable, après lequel M. Duhem

reviendra sans doute à des sujets directement astronomiques. De ce retour nous nous réjouissons d'avance, car il nous donnera l'occasion de prendre de nouveau la plume que nous posons aujourd'hui.

GINO LORIA.

BAHIER (EUGÈNE). — RECHERCHE MÉTHODIQUE ET PROPRIÉTÉS DES TRIANGLES RECTANGLES EN NOMBRES ENTIERS. 1 vol. gr. in-8, VII-266 pages. Paris, A. Hermann et Fils, 1916.

L'étude des triangles rectangles en nombres entiers est ancienne; Pythagore d'une part, Archytas et Platon d'autre part, avaient donné des règles particulières permettant de calculer certaines catégories de ces triangles; la formule générale est due à Euclide.

D'un intérêt un peu mince par elle-même, mais acquérant une importance réelle par ses relations étroites avec la théorie des nombres et l'analyse indéterminée, cette question a, par la suite, retenu l'attention de plusieurs mathématiciens parmi lesquels il faut citer Diophante, divers mathématiciens arabes, Fibonacci, le grand Fermat, Frenicle, Euler, et plus récemment Édouard Lucas. Celui-ci s'était proposé de la comprendre dans son Ouvrage sur la *Théorie des Nombres;* une mort prématurée l'en a empêché.

Un de ses élèves, M. Eugène Bahier, ingénieur des Arts et Manufactures, a eu l'heureuse pensée, sans doute en mémoire de son ancien maître, de grouper les principaux points de cette étude, à laquelle il a lui-même apporté une contribution importante. Il a réussi d'une manière remarquable, et son Ouvrage est des plus intéressants.

Peut-on regretter que l'Auteur, écartant toute intervention de la théorie des congruences et de l'analyse indéterminée, s'en soit tenu aux formes élémentaires? Je ne le pense pas; car, d'une part, ses démonstrations souvent élégantes conservent toute la précision et la rigueur nécessaires, et d'autre part, son Livre, simple et clair, très méthodiquement divisé en Chapitres où se trouvent de nombreux aperçus intéressants, est ainsi plus à portée d'un grand nombre de lecteurs que des formes plus savantes eussent pu

rebuter, et qui seront ainsi incités à se mieux familiariser avec la théorie des nombres.

On ne saurait du reste assez louer l'Auteur du soin qu'il a pris de toujours rester parfaitement clair; il n'a pas craint d'insister, lorsque cela était utile, sur certains points importants, et à les envisager de différentes manières pour les mettre en pleine lumière. Il y a du reste parfaitement réussi.

Peut-être trouvera-t-on que quelques parties sont trop développées; par exemple les Chapitres IV, VI, VII et VIII relatifs aux propriétés géométriques, au périmètre, à la surface et à divers problèmes; ce n'est pas mon avis, justement pour les raisons que j'ai esquissées plus haut; je regrette plutôt que, au cours de ses premiers Chapitres, l'Auteur n'ait pas fait la distinction, dans les triangles secondaires, entre ceux dont les nombres générateurs sont entiers et ceux dont ces nombres sont incommensurables.

L'un des Chapitres les plus intéressants est celui où, par l'étude des suites récurrentes, M. Bahier est arrivé à donner une solution élégante et générale de la recherche des triangles dans lesquels la différence des côtés de l'angle droit est un nombre donné, problème qui n'avait pas encore été complètement résolu.

Enfin, il a étendu la question à l'espace à trois dimensions en terminant son Livre par un Chapitre où il examine sommairement, mais avec les mêmes qualités de précision et de clarté, l'équation indéterminée $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$.

M. Eugène Bahier a confié son important et intéressant travail à MM. A. Hermann et Fils; c'est assez dire avec quels soins cet Ouvrage a été édité, et combien la forme sous laquelle il est présenté le rend attrayant, ainsi que tant d'autres livres que ces éditeurs ont publiés.

D.-A. Roche.

MÉLANGES.

LES SCIENCES MATHÉMATIQUES EN FRANCE DEPUIS UN DEMI-SIÈCLE (¹);

PAR M. ÉMILE PICARD.

On se propose d'indiquer ici succinctement la part prise par la France dans le progrès des Sciences mathématiques pendant la seconde moitié du XIXe siècle et dans les premières années du siècle actuel, sans avoir la prétention de donner en quelques pages un tableau complet, et en laissant de côté des travaux trop récents, pour lesquels le recul paraît insuffisant.

Pendant la première moitié du XIXe siècle, les voies les plus fécondes avaient été ouvertes par Fourier, Cauchy et Galois. L'ouvrage de Fourier sur la théorie analytique de la chaleur est célèbre en Physique mathématique; il contient le germe des méthodes employées dans l'étude des équations différentielles auxquelles conduisent de nombreuses théories physiques, et les séries célèbres qui portent le nom de Fourier ont fait l'objet d'immenses généralisations. L'activité de Cauchy fut prodigieuse et s'étendit à tous les domaines des mathématiques pures et appliquées. Sa plus grande création fut celle de la théorie des fonctions de variables complexes; il a ainsi donné une vie nouvelle à l'Analyse mathématique, et, en ce sens, les travaux les plus modernes relèvent de lui. On doit les notions les plus essentielles sur la théorie des groupes à Évariste Galois, qui en a fait d'admirables applications à la théorie des équations algébriques et montra qu'à chaque équation correspond un groupe de substitutions dans lequel se

(¹) Nous reproduisons ici un article de M. Émile Picard sur les Sciences mathématiques, inséré dans un Ouvrage publié en 1916 par divers littérateurs, savants et artistes, et intitulé : *Un demi-siècle de civilisation française* (1870-1915), (Paris, Hachette).

La Rédaction.

reflètent les caractères essentiels de l'équation. D'ailleurs les notions introduites par Galois dépassent de beaucoup en réalité le domaine de l'Algèbre et s'étendent au concept de groupe d'opérations dans son acception la plus étendue. Si brève qu'ait été la vie de Galois, qui disparut à vingt ans dans une obscure querelle, il avait fait aussi en analyse des découvertes capitales sur les intégrales de différentielles algébriques, comme le montre une lettre écrite la veille de sa mort.

Les trois grands noms que nous venons de citer sont représentatifs des mentalités que l'on rencontre chez ceux qui cultivent les sciences mathématiques. A ce sujet, il ne sera pas inutile d'indiquer les points de vue divers sous lesquels ces sciences peuvent êtres envisagées. Pour Fourier, l'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques. L'affirmation est exacte d'une manière générale ; il est vrai, comme le dit l'illustre géomètre et physicien, que la Physique a été souvent l'origine première de grandes théories analytiques, mais il ne faut pas ajouter que l'Analyse est uniquement utile au physicien, parce qu'elle constitue une langue d'une admirable clarté, qui n'a pas de signe pour exprimer les notions confuses et procure à la pensée une véritable économie. C'est méconnaître que le calcul a devancé parfois l'expérimentation, c'est méconnaître aussi l'admirable puissance de transformation du raisonnement et du calcul mathématiques. Des notions, identiques au fond, peuvent avoir des formes très différentes, et il arrive que la forme soit essentielle ; telle aussi l'énergie peut être constante en quantité, mais variable en qualité. La phrase, quelquefois citée, qu'il n'y a dans une formule que ce que l'on y a mis, est vide de sens ou n'est qu'un pur truisme. Il n'y a par exemple dans la Mécanique céleste que la loi de la gravisation universelle et quelques constantes fournies par l'observation, mais d'innombrables transformations de calcul nous font passer de ce point de départ à l'explication de presque toutes les particularités des mouvements des astres. Ce n'est pas assez non plus que de vanter la clarté du langage analytique ; en fait, il a joué un rôle important pour la plus grande extension des principes. Par le simple jeu de ses formules, l'Analyse peut suggérer des généralisations dépassant beaucoup le cadre primitif. N'en a-t-il pas été ainsi avec le principe des déplacements virtuels en Mécanique,

dont l'idée première vient des mécanismes les plus simples? La forme analytique qui le traduisait, où apparaissent des sommes de produits de deux facteurs, suggéra des extensions qui conduisirent de la Mécanique rationnelle à la Mécanique chimique à travers la Physique tout entière. Un autre exemple est encore fourni par les équations de Lagrange; ici des transformations de calcul ont donné le type des équations différentielles, auxquelles certains ont proposé de ramener la notion d'explication mécanique. Le mathématicien a créé un moule témoignant de l'importance de la forme d'une relation analytique; il va de soi qu'il appartient à l'expérience de vérifier si l'instrument forgé est assez souple pour se prêter aux concordances expérimentales.

Si la Mécanique et la Physique mathématique sont pour le mathématicien pur une mine fructueuse, il s'en faut de beaucoup que les questions de Philosophie naturelle soient l'unique objet de ses méditations. On le comprend assez par ce qui précède, et la marche n'est pas parallèle entre la théorie pure et ses applications. Le monde des formes et des grandeurs abstraites est en lui-même un sujet d'études, sur lequel l'esprit humain fait travailler les règles logiques qu'il a lentement élaborées à travers les âges. L'imagination a aussi sa part dans ces recherches, et la Mathématique a une valeur à la fois scientifique et artistique. Là, comme dans bien d'autres domaines, le beau et l'utile se rejoignent parfois, et il est arrivé que des spéculations théoriques sont restées pendant longtemps éloignées de toute application, quand un moment est venu où elles ont pu être utilisées. Beauté et simplicité vont d'ailleurs de pair, et l'on sait que le mot *élégance* revient souvent sur les lèvres des géomètres.

Le XVIIe et le XVIIIe siècle virent presque toujours les mathématiques et leurs applications cultivées par les mêmes savants. Il devait arriver un moment où des spécialisations s'établiraient; c'est une loi générale, qui régit malheureusement tous les ordres de recherches, et à laquelle échappent seuls quelques rares esprits, assez puissants pour ne pas avoir à sacrifier l'étendue à la profondeur. Les problèmes analytiques posés exigeaient de nouveaux perfectionnements. Une ère nouvelle commençait pour les mathématiques, rappelant, toutes proportions gardées, les temps où la Géométrie grecque, devenue autonome, s'était séparée des spécu-

lations cosmogoniques auxquelles elle avait été liée à une époque antérieure. Fourier et Poisson cultivèrent à peu près exclusivement les parties de l'Analyse se rapportant à la Physique, tandis que les recherches de Galois furent d'un caractère essentiellement abstrait. Quand à Cauchy, il fut à la fois un grand théoricien de la Physique et de la Mécanique, et un inventeur de génie en Mathématiques pures.

I. — Les fonctions analytiques.

Plaçons-nous maintenant dans les environs de 1850. Cauchy, avons-nous dit, est le créateur de la théorie des fonctions *analytiques;* non pas qu'il l'ait présentée d'une manière didactique. Son esprit, toujours en travail, se souciait peu de donner à ses conceptions une forme parfaite. Les lois des fonctions analytiques appliquées à des fonctions particulières ont souvent donné avec facilité leurs principales propriétés. La théorie des fonctions elliptiques en offre un mémorable exemple. Ainsi Liouville a traité le premier de la théorie générale des fonctions doublement périodiques; peu après, Hermite intégrait le long d'un parallélogramme de périodes et obtenait la décomposition fondamentale en éléments simples. Le Mémoire de Puiseux sur les fonctions algébriques d'une variable a fait époque, en donnant une idée précise d'un mode d'existence de fonctions non uniformes; c'est dans ce travail qu'est posée nettement la notion de période d'une intégrale, indiquée seulement par Cauchy. Briot et Bouquet ont été aussi parmi les premiers pionniers mettant en lumière la fécondité et la puissance des idées de Cauchy. Leur étude sur certaines équations différentielles à intégrales uniformes, et surtout leur Mémoire sur les singularités correspondant au cas où le coefficient différentiel est indéterminé, resteront dans l'histoire de la Science; ce dernier travail appelait pour la première fois l'attention sur les point singuliers. Dans leur grand Ouvrage sur les fonctions elliptiques, Briot et Bouquet ont voulu, suivant leur propre expression, rendre à Cauchy la justice qui ne lui a pas toujours été rendue.

On voit combien à ses débuts la théorie des fonctions d'une variable complexe a été une science essentiellement française; elle est toujours restée en grand honneur chez nous. Depuis quarante

ans, une partie importante de notre effort a été consacrée, soit aux fonctions analytiques en général, soit à certaines fonctions spéciales. L'édifice fut repris à la base simultanément en France par Méray et en Allemagne par Weierstrass, en prenant comme premier élément de la théorie la série entière. Les deux points de vue, celui de Cauchy, adopté plus tard par Riemann, et celui de Méray-Weierstrass, se raccordent d'ailleurs très vite, et il n'y a aucun intérêt, tout au contraire, à apporter là un esprit systématique.

Les fonctions analytiques ont fait pendant de nombreuses années l'objet de l'enseignement d'Hermite ; citons d'abord parmi ceux qui ont fait progresser la théorie générale les noms de Laguerre, Poincaré, Picard, Appell, Goursat, Painlevé, Hadamard, Borel. La démonstration du théorème de Cauchy sur l'intégrale nulle le long d'un contour supposait la continuité de la dérivée : Goursat montra que cette hypothèse est inutile.

Cauchy et ses premiers disciples français avaient seulement considéré les pôles des fonctions uniformes. Le géomètre allemand Weierstrass appela l'attention sur une singularité plus complexe, le point singulier essentiel. Picard établit que, dans le voisinage d'un point singulier essentiel isolé, la fonction prend une infinité de fois toute valeur donnée, une exception étant possible seulement pour *deux* valeurs au plus ; diverses conséquences résultent de là pour les fonctions entières. La démonstration utilisait la fonction modulaire de la théorie des fonctions elliptiques, fonctions à singularités plus élevées présentant précisément la propriété qu'on veut démontrer être impossible. Ces propositions donnèrent lieu à un grand nombre de travaux. Borel, le premier indiqua le principe d'une démonstration, où n'intervenait pas la transcendante indiquée.

Depuis 1880, les généralités sur les fonctions uniformes, mises sous forme de séries ou de produits infinis, ont été étudiées par les géomètres cités plus haut. Rappelons notamment les développements, en séries de polynomes, d'Appell et de Painlevé, les fonctions à espaces lacunaires de Poincaré et de Goursat, et plus récemment certains développements de Montel.

L'étude des séries entières sur leur cercle de convergence est de la plus haute importance. Dans son Mémoire sur l'approximation

des fonctions de grands nombres, Darboux a tiré un parti très heureux du cas où les singularités sur ce cercle sont de nature simple. Le travail d'Hadamard sur cette question est fondamental, et a appelé en particulier l'attention sur des cas étendus où le cercle de convergence est une coupure ; il a été suivi dans cette voie par Borel, Leau et Fabry ; celui-ci a pu établir que, en général, le cercle de convergence est une coupure. La considération d'une certaine intégrale définie par Hadamard a été féconde et fut l'origine de nombreuses recherches ultérieures.

La notion de genre a été introduite par Laguerre dans la théorie des fonctions *entières* ; elles est intimement liée à la distribution des racines de la fonction. Poincaré a donné une condition nécessaire pour qu'une fonction soit de genre donné. Hadamard put démontrer que la condition est suffisante, et il établit un lien entre la décroissance des coefficients et la croissance des racines ; de ces résultats il a fait une application remarquable à l'étude d'une fonction célèbre considérée par Riemann dans la théorie des nombres premiers. Borel s'est occupé avec grand succès de la distribution des racines des fonctions entières et de l'impossibilité de certaines identités ; il a étudié, après Hadamard, la difficile question de la croissance des fonctions entières, sujet qu'ont encore approfondi dans des études récentes Boutroux, Denjoy et Valiron.

La notion de série divergente sommable, telle qu'elle a été posée par Borel, s'est montrée très féconde pour l'extension d'une série entière au delà de son cercle de convergence, même dans le cas où le rayon de ce cercle est nul. On doit à Painlevé d'importants développements dans cet ordre d'idées, qui se raccorde avec les résultats de Mittag-Lefller sur *l'étoile* d'une fonction. La plupart des travaux précédents ont été exposés d'une manière didactique dans une collection précieuse sur la théorie des fonctions, publiée par Borel et ses collaborateurs français Lebesgue, Boutroux, Baire, Montel qui y font aussi connaître leurs travaux personnels.

La théorie générale des fonctions multiformes présente de grandes difficultés. Poincaré a démontré à ce sujet un théorème remarquable et bien inattendu : étant envisagée une fonction multiforme quelconque d'une variable, on peut exprimer fonction et variable par des fonctions uniformes d'un paramètre, résultat

considérable qui montre que, au moins théoriquement, les fonctions multiformes se ramènent aux fonctions uniformes. Painlevé a fait une classification rationnelle des singularités des fonctions analytiques.

Si, d'une variable, on passe à deux variables les difficultés augmentent considérablement. L'extension aux intégrales doubles du théorème fondamental de Cauchy relatif aux intégrales prises le long d'un contour a été réalisée par Poincaré ; on en déduit la notion de résidu d'une fonction rationnelle. Il faut encore citer le théorème de Poincaré sur la possibilité de mettre sous la forme de deux fonctions entières toute fonction uniforme n'ayant que des singularités non essentielles à distance finie, résultat étendu par Cousin à un nombre quelconque de variables.

Jetons maintenant un coup d'œil sur quelques fonctions spéciales. Il n'en est pas qui aient été plus étudiées que les fonctions algébriques d'une variable depuis le Mémoire de Puiseux. La notion capitale du *genre* d'une courbe algébrique avait été entrevue par Abel ; elle fut certainement approfondie par Galois, comme le montre une lettre rappelée précédemment. Mais la théorie fut complètement reprise par Riemann et Weierstrass, et poussée à un haut point de perfection. Les intégrales de différentielles algébriques ont fait, au point de vue de la réduction, l'objet des travaux de Picard et de Poincaré. Appell s'est occupé des fonctions à multiplicateurs, et, dans le cas elliptique, a étudié les développements en éléments simples des fonctions doublement périodiques de troisième espèce. La découverte des fonctions, que Poincaré a appelées *fonctions fuchsiennes*, et qui restent invariables, par les substitutions d'un groupe linéaire discontinu conservant une circonférence, restera à jamais mémorable. Ces fonctions lui ont permis de faire une représentation paramétrique uniforme d'une courbe algébrique quelconque : c'est là certainement un des résultats les plus profonds obtenus depuis cinquante ans en Analyse. Les fonctions fuchsiennes correspondant à une courbe de genre supérieur à l'unité ont comme singularités essentielles soit la circonférence entière, soit sur celle-ci un ensemble parfait discontinu de points ; c'est ce qui résulte d'un théorème général de Picard, d'après lequel deux fonctions uniformes autour d'un point, liées par une relation algébrique de genre supérieur à *un*, ne peuvent

avoir ce point comme point singulier essentiel isolé. Il y a des groupes linéaires plus généraux que les groupes fuchsiens ; Poincaré les étudie sous le nom de *groupes kleinéens*. La circonférence ici est remplacée par des courbes étranges ayant en chaque point une tangente mais n'ayant pas de courbure.

On peut développer les fonctions non seulement en séries et produits infinis, mais les mettre aussi sous forme de fractions continues. Laguerre et Halphen ont signalé à ce sujet des circonstances curieuses, et un Mémoire de Stieltjes renferme des résultats généraux sur la convergence de certaines fractions continues, convergence qui peut cesser le long de certaines lignes. Au point de vue historique, Laguerre paraît avoir donné le premier exemple d'une série divergente, d'où l'on peut déduire une fraction continue convergente.

Dans le champ des fonctions spéciales de plusieurs variables, les fonctions abéliennes ont été le plus étudiées. Les Mémoires d'Hermite sur la division et la transformation de ces fonctions sont classiques. Poincaré, Picard et Appell ont donné diverses démonstrations de la relation énoncée, par Riemann, entre les périodes d'une fonctions de n variables à $2n$ périodes. Cousin a été le plus loin dans cette voie, en étudiant les relations entre les périodes d'une fonction de n variables à $n+2$ périodes. Les fonctions abéliennes *singulières* ont été l'objet des travaux d'Humbert, qui en a tiré des résultats intéressant non seulement la théorie des fonctions, mais aussi la géométrie et la théorie des nombres. On doit à Hermite l'étude de polynomes généralisant les polynomes de Legendre, et il a été suivi par Didon et par Appell qui a découvert ainsi des séries hypergéométriques de deux variables. Des transcendantes nouvelles, présentant un théorème de multiplication et comprenant comme cas particuliers les fonctions abéliennes, ont été introduites par Poincaré et par Picard.

Après les études de Poincaré sur les fonctions fuchsiennes, il était naturel de rechercher des groupes discontinus à deux variables et des fonctions correspondantes. Les types sont ici très nombreux. L'étude des groupes linéaires et de certains groupes quadratiques a été abordée par Picard et l'a conduit aux fonctions hyperfuchsiennes et hyperabéliennes.

Quand on passe d'une à deux variables, les différences sont profondes dans la théorie des fonctions algébriques, comme il résulte des travaux de Picard, qui a posé les principes de la théorie des intégrales de différentielles totales et des intégrales doubles attachées à une surface algébrique, ainsi que de leur périodicité. Les nombres des intégrales distinctes, simples et doubles, de seconde espèce sont deux *invariants* fondamentaux de la surface. Il faut y ajouter un troisième invariant, découvert ausssi par Picard, en relation étroite avec les courbes algébriques tracées sur la surface. Certains points de la théorie des surfaces algébriques peuvent être rapprochés de questions de *géométrie de situation*, questions difficiles, quand on les prend dans toute leur généralité, et sur lesquels Poincaré a écrit de profonds et difficiles Mémoires. Les surfaces hyperelliptiques, signalées d'abord par Picard, ont été étudiées d'une manière approfondie par Humbert, qui a découvert à leur sujet des théorèmes d'une grande élégance.

Je ne veux pas terminer ce Chapitre consacré aux fonctions analytiques sans rappeler que, dans ces dernières années, Borel a insisté sur ce que, des deux notions, *l'analyticité* au sens de Weierstrass, et la *monogénéité* au sens de Cauchy, c'est cette dernière qui est l'essentiel. La théorie des fonctions analytiques ne serait donc qu'un cas particulier de la théorie des fonctions monogènes.

II. — Les équations différentielles.

Au XVIIe siècle, le développement de la Dynamique naissante fut l'origine des plus grands progrès de l'Analyse. Ce fut une époque décisive dans l'histoire de la Science que le moment où l'on se rendit compte avec précision que l'étude des phénomènes naturels était susceptible de prendre une forme mathématique, et cela surtout, quand le développement de la Mécanique conduisit à postuler que les modifications d'un système dépendent uniquement de l'état actuel de celui-ci ou, tout au plus, de cet état et de l'état infiniment voisin. On fut ainsi conduit à des équations différentielles, c'est-à-dire à des relations entre des fonctions et leurs dérivées. Cette idée a, depuis le XVIIIe siècle, orienté le développement de l'Analyse. Les problèmes posés par

la Géométrie eurent aussi une part dans cette orientation. On voit donc l'importance de la théorie des équations différentielles dont nous allons suivre maintenant les principaux progrès.

C'est à Cauchy que l'on doit les premières démonstrations rigoureuses de l'existence des intégrales des équations différentielles. Quand les équations et les données sont analytiques, l'idée essentielle consiste dans la considération de fonctions majorantes; pour le cas général des systèmes d'équations aux dérivées partielles, la démonstration complète a été donnée par Riquier, Delassus et, dans un ordre d'idées un peu différent, par Cartan. Il y eut longtemps quelques hésitations sur la notion même d'intégrale générale pour une équation aux dérivées partielles; Ampère et Cauchy ne se plaçaient pas au même point de vue. Goursat a montré que le point de vue de Cauchy est plus général que celui d'Ampère.

Sans supposer les éléments analytiques, Cauchy a donné une méthode pour établir l'existence des intégrales des équations différentielles ordinaires; les développements ainsi obtenus restent valables tant que les intégrales restent continues et laissent continus les coefficients différentiels, comme l'ont montré Picard et Painlevé. Pour le problème classique et d'autres plus généraux, quant aux conditions aux limites, on peut utiliser des méthodes d'approximations successives, dont Picard a donné des exemples très étendus, et qui présentent une grande marge dans leur application, comme l'ont montré ensuite les travaux d'Hadamard, de Coulon, d'Adhémar, de Cotton et autres.

Les équations linéaires sont particulièrement simples. L'étude des points singuliers réguliers avait été faite en Allemagne par Fuchs. Pour les points irréguliers, Poincaré a fait connaître des représentations asympotiques très cachées des intégrales, valables sur un rayon partant du point singulier, mais pouvant varier quand le rayon change. Une admirable découverte de Poincaré, se rattachant à ses travaux sur les fonctions fuchsiennes, fut l'intégration des équations linéaires algébriques à points singuliers réguliers, au moyen de séries thétafuchsiennes. Parmi les équations spéciales, citons les équations hypergéométriques de Goursat, l'équation de Lamé intégrée par Hermite, les équations de Picard à coefficients doublement périodiques et à intégrale uniforme,

les équations d'Halphen intégrables par des exponentielles et des fonctions rationnelles.

Dans les équations non linéaires on ne peut habituellement tirer aucun parti de solutions particulières pour avoir l'intégrale générale ; c'est ce qui donne un grand prix à un travail de Darboux sur les équations du premier degré, pour lesquelles l'intégrale générale se déduit d'un certain nombre d'intégrales particulières. Les résultats anciens de Briot et Bouquet ont été d'abord complétés par Poincaré et par Picard, puis ensuite par Autonne et Dulac ; mais c'était là une étude locale. En dehors des points singuliers visibles sur l'équation, il peut y en avoir d'autres variables d'une intégrale à l'autre. Ceux-ci, d'après Painlevé, sont nécessairement des points critiques algébriques pour les équations du premier ordre, et Poincaré, complétant un résultat de Fuchs, avait montré que l'on est ramené, dans le cas des équations du premier ordre à points critiques fixes, à des quadratures ou à une équation de Riccati. Picard avait indiqué que la méthode de Poincaré ne pouvait pas s'étendre au second ordre, à cause de la possibilité d'une transformation univoque non birationnelle pour une surface. Les difficultés étaient considérables; elles ont été brillamment levées par Painlevé dans une série de travaux très remarquables qui le conduisirent à tous les types d'équations à points critiques fixes. Dans la voie ouverte par Painlevé, ont marché avec succès P. Boutroux, Gambier, Chazy et Garnier.

L'étude des équations différentielles dans le champ réel est capitale pour la Géométrie et la Mécanique. Poincaré a consacré de nombreux Mémoires à la question des courbes définies par des équations différentielles. Le cas le plus simple est celui des équations du premier ordre et du premier degré ; la nature des points singuliers, foyers, cols, nœuds, est d'abord discutée, puis sont envisagées les courbes intégrales fermées (cycles), et celles qui sont asymptotes à un cycle limite. Pour les équations du premier ordre et de degré supérieur, le *genre* d'une certaine surface fermée intervient dans la discussion, et ce n'est pas un des moindres mérites de Poincaré d'avoir montré le rôle de la Géométrie de situation dans ces questions. Parmi les recherches qui ont suivi, il faut au moins citer les études de Painlevé sur les trajectoires en Dynamique et celles de Hadamard. Celui-ci montre

notamment que l'allure des géodésiques dans les surfaces à courbures opposées et à connexion multiple peut dépendre des propriétés arithmétiques de constantes d'intégration.

Les conditions pouvant déterminer une intégrale d'une équation aux dérivées partielles sont très variées. Nous avons parlé du problème de Cauchy ; l'étude des cas exceptionnels de ce problème conduit à la notion des multiplicités caractéristiques, vaguement entrevue par Monge et Ampère. Pour les équations linéaires du second ordre à deux variables, la détermination d'une surface intégrale par la condition de passer par deux caractéristiques a été d'abord étudiée. Dans son grand Ouvrage sur la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre, Goursat a ajouté aux résultats antérieurs les résultats de ses belles recherches personnelles. Beudon, Hadamard, Delassus et Le Roux ont aussi réalisé d'importants progrès dans l'étude des caractéristiques.

Pour les équations particulières, les conditions aux limites sont le plus souvent fournies par la Géométrie ou la Physique. Il arrive en général que tous les éléments envisagés sont réels, et la nature des caractéristiques joue un rôle essentiel dans la position des problèmes. Picard a montré que, pour les équations linéaires, toutes les intégrales sont analytiques quand les caractéristiques sont imaginaires. Les problèmes sont si variés qu'il est impossible de parler de méthodes générales. Cependant dans des cas étendus, on peut employer les méthodes d'approximations successives de Picard, dont nous avons déjà parlé plus haut ; dans d'autres cas, une solution particulière, présentant certaines discontinuités, joue un rôle essentiel, telle la fonction de Green pour le potentiel. On doit de nombreux travaux à ce sujet à Poincaré, Picard, Hadamard et leurs élèves d'Adhémar, Le Roy, Coulon, Gevrey. Souvent aussi il y a lieu de recourir à des développements généralisant les séries de Fourier, et dont autrefois Fourier lui-même, Poisson, Sturm, et Liouville avaient donné des exemples. Dans cet ordre d'idées, le Mémoire de Poincaré sur la méthode de Neumann renferme des vues originales et profondes sur des fonctions dites fondamentales. Le grand Mémoire de Poincaré sur les équations de la Physique mathématique restera particulièrement mémorable ; l'existence des harmoniques en nombre infini d'une membrane vibrante y est établie pour la première fois rigoureusement. Depuis lors, la théo-

rie des équations intégrales de Fredholm a permis de traiter autrement les problèmes de ce genre, mais Poincaré aura été là, comme en d'autres domaines, un précurseur.

C'est surtout dans la théorie des équations aux dérivées partielles que la Physique et la Mathématique se prêtent le mutuel appui, dont je parlais au début. J'ajouterai quelques exemples à ceux que nous avons déjà rencontrés. Quand toutes les intégrales ne sont pas analytiques, le prolongement d'une solution réside dans le fait qu'il y a des contacts jusqu'à un certain ordre. Ces notions ont conduit aux résultats importants obtenus par Hugoniot dans la mécanique des fluides et magistralement complétés par Hadamard dans son Livre sur la propagation des ondes. Ailleurs, il pourra y avoir des contacts d'ordre infini entre des intégrales non analytiques, et c'est la raison pour laquelle le célèbre théorème de Lagrange sur les potentiels de vitesse en Hydrodynamique rationnelle ne subsiste pas pour les fluides visqueux, comme Boussinesq l'a indiqué le premier. Une vue très nette des différentes espèces d'ondes, au point de vue de la propagation, résulte de la considération de différents types d'équations. Dans les équations du type de la chaleur, qui remontent à Fourier, il n'y a pas de vitesse de propagation. Les choses se passent autrement dans les équations du type de la propagation du son, qui est aussi celui de la propagation de la lumière et des ondes électriques ; il y a lieu d'envisager là une vitesse de propagation. Les deux types précédents se trouvent rassemblés dans l'équation de la propagation du son dans un liquide visqueux, de l'électricité dans une ligne télégraphique avec self-induction. Il y a dans ce cas propagation par ondes avec une vitesse déterminée, mais cette onde s'étale à l'arrière, comme il résulte des travaux de Poincaré, Picard et Boussinesq. Dans des questions un peu différentes, notamment le principe d'Huygens, Hadamard a montré l'importance de la parité des dimensions de l'espace et de l'intégrale résiduelle.

Parmi les applications de la théorie des équations différentielles, il en est qui concernent la Géométrie. En France et aussi en dehors de notre pays, cette école d'analystes géomètres, pour qui les problèmes de Géométrie infinitésimale sont l'occasion de belles recherches analytiques, a actuellement Darboux pour chef ; elle se rattache à Monge et à Ampère, tout en utilisant les travaux analy-

tiques les plus récents. Les leçons de Darboux sur la théorie générales des surfaces et ses leçons sur les surfaces orthogonales forment des Ouvrages considérables, où l'auteur expose ses recherches, et aussi celles de ses devanciers, en leur donnant une forme nouvelle et originale. Parmi ces devanciers, nous devons citer Liouville, Bertrand, Bonnet, qui ont été au milieu du siècle dernier les dignes continuateurs de Monge. Relativement à l'intégration effective des équations aux dérivées partielles du second ordre, il n'avait été, pendant de longues années après la publication du Mémoire d'Ampère de 1818, rien ajouté d'essentiel à la théorie développée par le grand géomètre et physicien. Darboux, en 1870, publia un Mémoire faisant connaître une méthode nouvelle, où il substitua aux équations de Monge une suite indéfinie de systèmes analogues, trouvant même l'intégrale générale si celle-ci ne renferme pas de signe d'intégrale définie. L'étude des systèmes orthogonaux, des surfaces applicables, de la représentation sphérique des surfaces doit à Darboux des progrès considérables ; il a tiré aussi d'importants résultats de la considération de l'équation linéaire aux variations correspondant à une équation quelconque aux dérivées partielles.

Goursat a consacré plusieurs Mémoires à élucider les questions que suggère la méthode de Darboux ; on lui doit aussi de pénétrantes recherches sur des équations intégrables comprenant la première classe d'Ampère, et sur les caractéristiques des équations à plus de deux variables indépendantes. Guichard, qui a montré un esprit inventif dans toutes les parties de la Géométrie infinitésimale, a été un heureux continuateur de Darboux dans ses travaux sur les systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques, et sur la déformation des quadriques. Les recherches de Kœnigs sur la Géométrie réglée, sur les systèmes conjugués, sur les surfaces ayant certains éléments linéaires, et sur les mécanismes dont il a rattaché la théorie à des principes généraux, le placent également parmi les maîtres de la Géométrie infinitésimale et aussi de la Géométrie cinématique.

III. — Théorie des nombres. Algèbre et Géométrie.

La théorie des fonctions analytiques et celle des équations différentielles nous ont conduit plus d'une fois à parler de diverses autres branches des Sciences mathématiques. Il importe cependant de nous arrêter sur quelques recherches se rapportant plus spécialement à la théorie des nombres, à l'Algèbre, à la Géométrie et à la théorie des groupes.

Les recherches d'Hermite sur la théorie des nombres ont rendu son nom célèbre. L'introduction de variables continues a été l'idée fondamentale qui a dominé la longue suite de ses travaux en Arithmétique supérieure ; les méthodes qu'il a créées ont ouvert à la théorie des nombres des horizons entièrement nouveaux. Un peu plus tard, Hermite passait, de l'approximation simultanée de plusieurs nombres par des fractions de même dénominateur, au problème analogue pour plusieurs fonctions. Ce mode d'approximations algébriques le conduisait en 1873 à une de ses plus mémorables découvertes, je veux parler de la démonstration de la transcendance du nombre e, base des logarithmes népériens. En suivant la voie ouverte par Hermite, le géomètre allemand Lindemann démontrait peu de temps après la transcendance du nombre π, rapport de la circonférence au diamètre.

Les travaux de Jordan sur l'équivalence des formes ont réalisé de grands progrès dans la théorie générale des formes algébriques de degré supérieur. Dans la théorie des formes quadratiques, Poincaré a marqué sa trace par l'introduction de points de vue nouveaux, en particulier sur le *genre* de ces formes. La considération des formes ternaires l'a aussi conduit à une classe de fonctions fuchsiennes présentant un théorème de multiplication. Picard et Humbert ont appliqué la méthode de réduction continuelle d'Hermite à l'étude de divers groupes discontinus.

Parmi les recherches arithmétiques d'une autre nature, les études de Cahen et surtout d'Hadamard sur la théorie asymptotique des nombres premiers doivent être rappelées.

Nous avons dit, au début de cet article, que Galois avait posé les véritables bases de la théorie des équations algébriques. Jordan

a publié un Ouvrage considérable sur les substitutions et les équations algébriques. Il y fait une étude approfondie des idées de Galois, en y ajoutant des résultats essentiels sur les groupes primitifs, les groupes transitifs et les groupes composés, dont un des plus importants est que les facteurs de composition d'un groupe sont les mêmes, à l'ordre près, de quelque manière qu'aient été effectuées les opérations qui les déterminent. Dans la théorie des équations algébriques, Jordan a étudié les équations à groupe composé, abordé et résolu le problème posé par Abel, celui de rechercher les équations de degré donné résolubles par radicaux et de reconnaître si une équation rentre ou non dans cette classe. D'autres travaux algébriques de Jordan se rapportent au problème des groupes linéaires d'ordre fini, dont il indique la formation dans ses grandes lignes ; c'est la question des équations différentielles linéaires à intégrales algébriques. Goursat a approfondi un cas particulier intéressant de ce problème, en recherchant les divisions régulières de l'espace en un nombre fini de régions congruentes.

Laguerre a apporté d'importantes contributions à la théorie des équations algébriques. Il fait preuve d'une rare finesse dans ses Notes sur le théorème de Descartes, le théorème de Sturm, la méthode de Newton, et reste toujours soucieux des applications particulières. On a plaisir à retrouver ces résultats rassemblés dans ses Œuvres complètes récemment parues.

Les recherches de Géométrie pure et de Géométrie analytique sont depuis longtemps en honneur dans notre pays, comme le montrent assez les noms de Lamé, de Dupin, de Poncelet et de Chasles. Après Bertrand, Jordan s'occupe des polyèdres dans un beau Mémoire consacré en fait à la Géométrie de situation, et dans un autre travail donne la condition pour que deux surfaces ou portions de surface flexibles et extensibles à volonté soient applicables l'une sur l'autre sans déchirure ni duplicature. Une partie importante des travaux de Laguerre est consacrée à la Géométrie ; il eut, tout jeune encore, l'heureuse fortune de compléter l'œuvre de Poncelet en Géométrie projective, en montrant comment se fait la transformation des relations angulaires, étendit la théorie des foyers à toutes les courbes algébriques et fonda la Géométrie de direction. De Jonquières a donné le premier exemple des trans-

formations birationnelles de degré quelconque dans le plan, dont Cremona devait indiquer ensuite la forme générale.

Halphen se fit d'abord connaître par ses travaux sur la célèbre théorie des caractéristiques de Chasles, résolvant un problème qui avait arrêté l'illustre géomètre. Les cyclides, c'est-à-dire les surfaces du quatrième ordre ayant pour ligne double le cercle de l'infini, occupèrent de nombreux auteurs, parmi lesquels Laguerre, Darboux et Moutard; ces deux derniers découvrirent simultanément le remarquable système triplement orthogonal formé de cyclides. Dans son Ouvrage, paru en 1873, sur une classe de courbes et de surfaces algébriques, Darboux a fait connaître un grand nombre de résultats intéressants sur les courbes cyclides et les surfaces cyclides, et a étudié les relations de ces dernières avec les fonctions abéliennes hyperelliptiques. A propos de la Géométrie de Cayley, Darboux donne une interprétation de la Géométrie non-euclidienne dans un demi-espace euclidien, souvent attribuée à Poincaré.

Les courbes gauches algébriques ont fait l'objet d'un grand Mémoire d'Halphen, qui est peut-être sa plus belle œuvre mathématique. Ce travail touche en bien des points à la théorie des fonctions ; c'est aussi une étude profonde de Géométrie analytique. L'auteur a réussi à énumérer et à classer en diverses familles les courbes gauches d'un même degré ; il montre la précision de ses méthodes en donnant, comme exemple, la classification complète des courbes de degré cent vingt. Entre tant de résultats bien dignes de remarque, Halphen fait connaître la limite inférieure du nombre des points doubles apparents d'une courbe gauche de degré donné, et démontre que les courbes répondant à cette limite sont sur une surface du second ordre.

Certaines surfaces particulières ont attiré particulièrement l'attention des géomètres, telles les surfaces de Steiner et de Kummer. Darboux a obtenu géométriquement les lignes asymptotiques de la première, et Picard a montré qu'elle était la seule surface non réglée dont toutes les sections planes sont unicursales. Humbert a fait connaître de nouvelles propriétés de la seconde, notamment que toute courbe algébrique tracée sur elle est l'intersection de celle-ci avec une surface qui la touche tout le long de la courbe. Les surfaces de Kummer singulières ont fourni à Humbert le

premier exemple du fait très curieux qu'une surface peut avoir une infinité discontinue de transformations birationnelles en elle-même, sans avoir une infinité continue de telles transformations. Dans un ordre d'idées plus particulièrement géométrique, on doit aussi à Humbert de curieux théorèmes sur les aires sphériques et ellipsoïdales, qui étendent à la sphère et à l'ellipsoïde des propriétés fondamentales du cercle et de l'ellipse.

La théorie des formes algébriques avait jadis conduit à la notion d'invariant. Dans une Note mémorable, Laguerre fit voir que cette notion peut s'étendre aux équations différentielles linéaires. De son côté Halphen faisait une étude approfondie des équations différentielles restant inaltérées par une transformation homographique quelconque. L'équation différentielle des lignes droites et celle des coniques donnaient les deux premiers exemples ; la découverte d'un invariant du septième ordre amenée par d'ingénieuses considérations géométriques permit à Halphen de développer la théorie générale qu'il étendit aux courbes gauches. Après l'apparition de la Note de Laguerre, Halphen vit de suite le rapport entre ses recherches antérieures et la notion introduite par Laguerre, et il édifia une théorie complète des invariants des équations linéaires. Il montra ensuite l'intérêt de ces recherches pour le calcul intégral, en apprenant à reconnaître si une équation différentielle linéaire est susceptible d'être ramenée à certains types déjà intégrés.

La théorie des groupes est fondamentale en Algèbre ; elle ne joue pas en Analyse un moindre rôle, depuis que le géomètre norvégien Sophus Lie a édifié la théorie des groupes de transformations, faisant une étude approfondie des groupes d'ordre fini et posant les bases de la théorie des groupes infinis. Dans les travaux de Lie, la théorie des groupes intervient essentiellement comme un principe de *classification* ; dans les applications qu'il a faites de sa théorie aux équations différentielles, celles-ci sont des équations particulières. La théorie des groupes a apparu comme un principe de *réduction* depuis que Picard a montré comment les idées de Galois sur les équations algébriques pouvaient êtres étendues aux équations différentielles linéaires ; il a été suivi dans cette voie par Vessiot et Drach. On doit à Drach d'avoir montré le premier comment la notion de groupe de rationalité pouvait

être étendue à toutes les équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles ; c'est ce qu'il appelle l'*intégration logique* qu'il oppose à l'intégration géométrique ou intégration par séries. Vessiot s'est aussi occupé de la théorie de Galois et de ses diverses généralisations à un point de vue un peu différent, et a publié de beaux Mémoires d'une forme parfaite sur l'intégration des systèmes différentiels qui admettent des groupes continus de transformations, et sur la réductibilité et l'intégration des systèmes complets ; il a aussi donné la condition pour qu'une équation différentielle linéaire soit intégrable par quadratures, problème qui correspond à celui des équations algébriques résolubles par radicaux.

Les théories générales, pour prendre dans la Science un droit de cité définitif, ont le plus souvent besoin de s'illustrer par des applications particulières. Dans plusieurs domaines, celles-ci ne sont pas toujours faciles à trouver, et des théories très générales risquent quelquefois de rester confinées, si j'ose le dire, dans leur extrême généralité. Il arrive aussi que les applications tentées ramènent seulement à des cas déjà connus; dans ce cas, la théorie, intéressante au point de vue de la classification, n'apparaît pas comme une arme pour la découverte de faits nouveaux. Aussi est-il intéressant de rappeler que la recherche du groupe de rationalité de l'équation différentielle des lignes de courbure de la surface des ondes a conduit Drach à l'intégration de cette équation, cherchée en vain depuis longtemps.

Les recherches de Cartan sur la théorie des groupes sont très importantes. Elles concernent surtout la *structure* des groupes et la détermination des groupes *simples*. Pour les groupes continus et *finis*, les principes avaient été posés par Lie et ses élèves ; pour les groupes infinis, tout était à créer. Cartan a réussi à déterminer tous les groupes infinis *simples*, transitifs ou intransitifs. Je dois encore rappeler les travaux de Cartan sur les systèmes de Pfaff et les systèmes en involution.

IV. — Théorie des fonctions variables réelles et Théorie des ensembles.

Un des principaux objets de l'Analyse abstraite est l'étude de l'idée de fonction, c'est-à-dire de dépendance entre deux ou plu-

sieurs variables. Il a fallu longtemps pour qu'on se rendît compte de l'étendue de cette notion ; c'est là d'ailleurs une circonstance très heureuse pour les progrès de la Science. Si Newton et Leibniz avaient pensé que les fonctions continues n'ont pas nécessairement une dérivée, le Calcul différentiel n'aurait pas pris naissance ; de même les idées inexactes de Lagrange sur la possibilité des développements en série de Taylor ont rendu d'immenses services. Les fonctions analytiques qui sont les seules usuelles, ont pris une importance considérable, et l'on a vu plus haut que la théorie de ces fonctions est une branche maîtresse de l'Analyse. Un jour devait venir cependant où l'idée de fonction serait approfondie dans toute sa généralité. Cauchy, dans plusieurs de ses écrits, avait donné plus de précision à certains résultats intuitifs sur les fonctions continues admis sans démonstration. En Allemagne, Dirichlet en donnant des conditions pour la possibilité du développement en série trigonométrique, Riemann en établissant la distinction entre les fonctions intégrables et les fonctions non intégrables, Weierstrass en donnant un exemple de fonction continue sans dérivée, allèrent beaucoup plus loin. En France, le Mémoire de Darboux sur les fonctions discontinues marque une date ; on y trouve une proposition qui permet de définir de la manière la plus nette l'intégrabilité d'une fonction, et de nombreux exemples de fonctions continues sans dérivées. Jordan a introduit dans cette partie de l'Analyse d'importantes notions : telle la notion de fonction à variation bornée. Les courbes, dites de Jordan, séparant le plan en deux régions distinctes sont également devenues classiques.

Le géomètre allemand Cantor a fondé la théorie des *ensembles* de points. On doit attacher une grande importance à la distinction entre les ensembles énumérables et les autres. Il en est de même pour la notion d'ensemble *dérivé* et d'ensemble *parfait*. Le nombre des Mémoires consacrés aux ensembles est considérable : ils sont de valeur très inégale, au moins au point de vue purement mathématique. Un certain nombre d'entre eux n'ont actuellement aucun intérêt mathématique ; c'est ce qui arrive pour les études sur les nombres transfinis qui n'ont conduit jusqu'ici à aucun résultat inaccessible par une autre voie. On rencontre dans cette *métamathématique* quelques paradoxes et des

difficultés qui ont fait couler des flots d'encre. Plusieurs de ces difficultés proviennent de ce qu'on ne s'entend pas sur le mot *existence*, et l'on pourrait faire des comparaisons avec certaines luttes de la philosophie scolastique au moyen âge. Reconnaissons d'ailleurs que la querelle des mathématiciens sur ce mot intéresse d'autres questions, notamment celles qui concernent les théorèmes dits *d'existence* et se rencontrent dans diverses parties des Mathématiques.

Nous envisageons seulement la partie de la théorie des ensembles, qui jusqu'ici a été un instrument de découverte entre les mains des mathématiciens ; c'est celle qui a été utilisée dans la théorie des fonctions et en Géométrie. Jordan avait donné une définition de la mesure d'un ensemble. Borel a repris la question sous un jour nouveau, en utilisant des définitions constructives ; il a aussi introduit la notion importante d'un ensemble de *mesure nulle*. Dans plusieurs théories, on connaît maintenant des propositions qui sont exactes *à peu près partout*, en entendant par là que réserve est faite pour un ensemble de mesure nulle. Citons, comme exemple, le théorème de Borel, d'après lequel toute fonction bornée définissable analytiquement est égale, sauf peut-être pour un ensemble de mesure nulle, à une série convergente de polynomes. Les séries de Fourier et celles qui les généralisent offrent des exemples analogues.

Riemann, semblait-il, avait approfondi autant qu'il est possible la notion d'intégrale définie. Lebesgue a montré qu'il n'en était rien. L'idée de fonction *sommable*, qu'il a introduite dans la Science, est plus générale que celle de fonction *intégrable* de Riemann, au moins pour les fonctions bornées. Une conséquence de cette notion généralisée de l'intégrale est que toute fonction bornée sommable est la dérivée de son intégrale indéfinie, sauf peut-être pour un ensemble de points de mesure nulle. Ces travaux ne sont pas restés sans applications, et les idées nouvelles ont montré leur fécondité entre les mains de Lebesgue et de ceux qui l'ont suivi. La théorie des séries de Fourier notamment s'est trouvée renouvelée. Loin de conduire à des complications nouvelles, l'emploi de l'intégration des fonctions sommables apporte d'heureuses simplifications. Borel a repris récemment la théorie

de l'intégrale définie en se plaçant au même point de vue que dans sa théorie de la mesure.

Les notions d'aire et de surface sous leurs formes les plus générales sont liées à la théorie des ensembles. Lebesgue a été très loin dans cette voie, où l'on rencontre vite des énoncés différents de ceux auxquels on est habitué, par exemple celui-ci : qu'il y a d'autres surfaces que les surfaces développables qui sont applicables sur le plan.

Baire répartit les fonctions en différentes classes, et cherche la condition pour qu'une fonction d'une variable réelle puisse être développée en série de polynomes. La théorie des ensembles intervient dans la solution ; pour le cas d'une série *simple*, la condition est que la fonction soit ponctuellement discontinue par rapport à tout ensemble parfait. Les recherches de Lebesgue sur les fonctions représentables analytiquement sont connexes de celles de Baire, et posent de graves questions sur le sens qu'il convient d'attribuer au mot *défini*.

Il est une branche de l'Analyse, qui prend aujourd'hui une grande importance : c'est le *Calcul fonctionnel*. Un des premiers Chapitres du Calcul fonctionnel est le *Calcul des variations* auquel reste justement attaché le nom de Lagrange. Le problème du plus court chemin d'un point à un autre sur une surface est sans doute le premier type de problème relatif à ce calcul, qui s'est ensuite développé avec diverses questions posées par la Mécanique, et qui englobe aujourd'hui la Mécanique analytique tout entière. Le Traité que publie en se moment Hadamard sur le Calcul des variations fait connaître les plus récents travaux en cette matière. De nombreux problèmes de l'Electricité et de la Chaleur relèvent aussi du Calcul fonctionnel. La théorie des *équations intégrales*, brillamment créée tout d'abord en Italie et en Suède par Volterra et Fredholm, a fait en France l'objet de nombreux travaux, parmi lesquels ceux de Le Roux intégrant en même temps que Volterra les équations à limite supérieure variable, de Goursat sur les noyaux orthogonaux, de Picard sur les équations de première espèce et les équations singulières, de Marty sur les noyaux symétrisables. Hadamard s'est surtout attaché à mettre en évidence l'influence de la forme de la frontière du domaine dans divers

problèmes de Physique mathématique, appelant l'attention sur les *équations aux dérivées fonctionnelles ;* il a été suivi avec succès dans cette voie par P. Lévy. L'étude du *continu fonctionnel*, nécessitant la création d'un nouveau Chapitre de la théorie des ensembles, a été abordé très heureusement par Fréchet.

L'extension de nos idées sur les fonctions et les opérations fonctionnelles n'est pas la seule qu'aient poursuivie les mathématiciens. La question des quantités complexes a fait, surtout à l'étranger, l'objet de nombreuses recherches. Si on laisse tomber la loi commutative, ne gardant que la loi associative, on a une Algèbre beaucoup plus générale ; un exemple célèbre à quatre unités est fourni par les quaternions de Hamilton. Une remarque fondamentale de Poincaré ramène toute la théorie des quantités complexes à une question concernant la théorie des groupes. Elle consiste en ce que, à chaque système d'unités complexes à multiplication associative, correspond un groupe continu linéaire de substitutions linéaires, et inversement. Le rapprochement entre la théorie des groupes de Lie et les nombres complexes donne la véritable origine de ces symboles. Divers auteurs étrangers avaient utilisé l'idée de Poincaré ; dans ses travaux sur le même sujet, Cartan applique une méthode directe qui le conduit à des résultats nouveaux. Ces quantités complexes plus générales sont-elles susceptibles d'accroître la puissance de l'Analyse ? Jusqu'ici l'emploi des quaternions a seul rendu quelques services en Physique mathématique. On pouvait espérer que les nouvelles quantités complexes présenteraient quelque intérêt pour l'Analyse générale ; les essais tentés jusqu'ici n'ont pas été couronnés de succès.

V. — Quelques remarques finales.

La course rapide que nous venons de faire à travers les principales disciplines où s'exerce l'effort des mathématiciens aura peut-être montré la fécondité de cette branche de la Science française depuis un demi-siècle. Les divisions et classifications, qui ont été nécessaires pour l'exposition, sont d'ailleurs bien artificielles et plus d'un sujet aurait pu être classé dans une autre section de cet article. La pénétration entre elles des diverses parties d'une même science, et souvent même de sciences

diverses, est d'ailleurs de plus en plus générale. Nous n'avons pas ici à faire de critique scientifique. Disons seulement que l'écueil des recherches mathématiques est dans un formalisme et un symbolisme excessifs, incapables de conduire à un fait nouveau et d'êtres utilisés dans une autre recherche que celle-là même pour laquelle ils ont été créés. Or, quand ces dernières conditions ne sont pas remplies, on peut penser qu'il n'y a pas eu progrès réel de la Science. A cet égard, il semble que les mathématiciens français sont restés sagement dans de justes limites, n'oubliant jamais que leur science n'est pas un pur exercice de logique, et se montrant avant tout soucieux de la découverte de faits mathématiques nouveaux et de rapprochements jusque-là insoupçonnés.

Nous nous sommes expliqué au début sur les rapports entre les Mathématiques et la Physique, et nous avons dit que les applications à la Mécanique et à la Physique étaient loin d'être le seul objet des études des mathématiciens. Il est bon cependant que de temps à autre, quand notre science tend à devenir trop formelle, nous nous rappelions la pensée de nos grands géomètres physiciens de la première moité du siècle dernier. Dans notre vision actuelle du monde, l'Analyse mathématique reste un instrument indispensable aux progrès des théories physiques, offrant aux physiciens des moules pour leurs vues théoriques; en échange, les physiciens rendent aux mathématiciens un service d'un haut prix, en les guidant dans l'infinie variété des formes que conçoit notre esprit et les empêchant à certaines heures d'errer à l'aventure. La Mathématique n'apparaît plus alors comme la science étrange et mystérieuse que se représentent tant de gens ; elle est une pièce essentielle dans l'édification de la Philosophie naturelle.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Blichfeldt (H.-F.). — *Finite Collineation Groups*, with and introduction to the theory of groups of operators and substitution groups. (The University of Chicago Science Series.) 1 vol. in-8, XI-194 pages. Chicago (Illinois), the University of Chicago Press, 1917. Price : $ 1,50.

AVIS

À MM. LES RÉDACTEURS D'ANALYSES DE MÉMOIRES
POUR LA « REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES ».

Il semble nécessaire de modifier, dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*, la façon dont a été conçue parfois l'analyse des périodiques. Ces analyses doivent être courtes, ayant au maximum une page. Une analyse bibliographique ne peut remplacer la lecture d'un Mémoire. Il importe seulement que le lecteur du Bulletin apprenne l'existence d'un travail susceptible de l'intéresser, avec son objet général et un ou deux énoncés principaux, s'il y a lieu. Presque personne ne lit entièrement les analyses quand elles contiennent trop de détails. Le point essentiel est que de nombreux journaux soient analysés, et le plus rapidement possible après leur apparition. C'est seulement ainsi que le Bulletin rendra tous les services qu'on peut attendre de lui, en ce qui concerne le dépouillement des Recueils scientifiques.

Pour des Mémoires très importants, des analyses pourront être faites à part dans la première Partie du Bulletin comme pour les Ouvrages. Il y a aussi grand intérêt à ce qu'un groupe de travaux récents relatifs à un même sujet fasse de temps à autre l'objet d'un article d'ensemble; ces sortes de Revues seraient très appréciées de nos lecteurs. Nous ne doutons pas que les collaborateurs du Bulletin voudront bien apporter tous leurs efforts à l'amélioration d'un Recueil qui doit s'efforcer de tenir le public mathématique, en France et à l'étranger, au courant des publications les plus récentes, en même temps qu'il donne dans ses Mélanges des articles originaux.

Rappelons que, pour tout volume ou mémoire écrit en langue étrangère, le titre original doit d'abord être transcrit et que ce titre doit être suivi, entre parenthèses, de sa traduction en français.

ÉMILE PICARD.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

GOURSAT (ÉDOUARD). — COURS D'ANALYSE MATHÉMATIQUE. (Cours de la Faculté des Sciences de Paris). Tome I : Dérivées et différentielles. Intégrales définies. Développements en série. Applications géométriques. 3e édition, revue et augmentée, 1 vol. in-8, VII-668 pages, avec 45 figures. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1917.

Cette nouvelle édition du premier Tome du *Cours d'Analyse* de M. Goursat diffère peu de la précédente : le volume est consacré en entier au calcul différentiel, aux intégrales simples et multiples; aux séries, notamment aux séries entières et aux séries trigonométriques, et à quelques applications géométriques, le tout en se bornant aux variables réelles. La deuxième édition a été analysée en détail dans ce *Bulletin* par M. Lacour (t. XXXIV, 1910).

Une Note nouvelle sur les formules de différentiation des intégrales définies figure à la fin du volume. La formule classique de différentiation sous le signe $\int$ ayant été exposée dans le cours de l'ouvrage pour les intégrales simples à limites variables et pour les intégrales curvilignes à chemins d'intégration indépendant du paramètre, cette Note traite des intégrales curvilignes à chemin variable, des intégrales doubles, des intégrales de surface et des intégrales triples. La formule qui concerne les intégrales curvilignes est d'abord établie avec le plus grand soin; après les considérations purement analytiques vient l'interprétation géométrique du résultat obtenu, qui, malgré sa complication, est ainsi présenté avec la plus grande netteté possible; le cas particulier où le chemin est une courbe plane donne lieu à des simplifications qui sont spécialement signalées. Les intégrales doubles sont ramenées à des intégrales curvilignes, au moyen de la formule de Green : le résultat cherché est ainsi obtenu avec la plus grande élégance. Les intégrales de surface sont ramenées à des intégrales doubles ordinaires, et le résultat est encore éclairé par des considérations géométriques. Enfin, employant le même artifice que pour les

intégrales doubles, M. Goursat ramène les intégrales triples à des intégrales de surface. Ces formules, dont l'application se rencontre si souvent en Physique mathématique et dans le calcul des variations, avaient, suivant l'ordre logique des matières, leur place marquée dans ce volume.

Le second Chapitre du volume, consacré aux dérivées et aux différentielles, a subi quelques légères modifications dans l'ordre adopté : les séries sont considérées à part, et non plus en même temps que ce qui concerne la limite d'une fonction $f_n(x)$ pour n infini. Le troisième Chapitre, sur les fonctions implicites, contient une intéressante innovation : développant quelque peu certaines explications données dans l'édition précédente, et les présentant d'une manière un peu différente, M. Goursat en tire une démonstration de l'existence des fonctions implicites entièrement indépendante de la méthode des approximations successives, qui n'est donnée qu'en second lieu.

Dans le Chapitre sur les intégrales doubles, le paragraphe qui concerne les intégrales de surface a été remanié, ces intégrales étant définies directement comme limites de sommes, et calculées immédiatement au moyen d'une représentation paramétrique *quelconque*. La question du changement de variables pour ces intégrales est ainsi résolue du même coup, de sorte que le paragraphe sur le rapport de deux éléments de surface a pu être renvoyé au Chapitre suivant, où il vient à propos du changement de variables dans les intégrales multiples.

En parlant de la torsion des courbes, M. Goursat a changé la définition des courbes dextrorsum, de sorte que la vis ordinaire devient dextrorsum.

Dans le dernier Chapitre a été ajouté un paragraphe sur la torsion géodésique.

Malgré ces améliorations, l'ordre suivi dans l'édition précédente a été respecté dans son ensemble, et notamment le numérotage des paragraphes a été conservé aussi fidèlement que possible : inaltéré pour la plupart des paragraphes, il n'a été changé que d'une unité pour la presque totalité des autres, ce qui facilitera grandement l'usage des renvois qui se trouvent dans les Tomes II et III de la deuxième édition.

Il serait sans doute surperflu de redire les qualités de clarté

n'excluant pas la parfaite rigueur, qui ont toujours distingué le Cours de M. Goursat; le nouveau volume est, à ce point de vue, entièrement digne de ses devanciers.

GEORGES GIRAUD.

LEVI (BEPPO). — INTRODUZIONE ALLA ANALISI MATEMATICA. I : *Teorie formali.* Campo di numeri. Polinomi. Funzioni. Combinazioni lineari. Sostituzioni lineari. Numeri complessi. Determinanti. Funzioni razionali intere. 1 vol. gr. in-8, XXII-482 pages. Paris, Hermann et Fils, 1916.

Dans l'étude d'une théorie mathématique, il y a lieu de distinguer d'une part la *matière* à laquelle s'applique la théorie, d'autre part la *forme,* la *structure* des raisonnements : il arrive le plus souvent que les mêmes formes de raisonnements peuvent être développées dans des domaines mathématiques fort éloignés les uns des autres par leur contenu, mais tout pareils en ce qui concerne la disposition de ce contenu. C'est ainsi que la plupart des définitions et des propriétés des opérations fondamentales de l'Arithmétique peuvent être appliquées aux théories les plus diverses, qu'il s'agisse de nombres entiers, rationnels, irrationnels, complexes, ou de polynomes, ou encore de substitutions linéaires, ou de vecteurs.... C'est l'étude d'un grand nombre de théories particulières qui a permis de dégager les principes qui leur sont communs et de donner ensuite des théories abstraites englobant plusieurs d'entres elles quant à la forme des raisonnements, la substance seule variant d'une théorie à l'autre. De là l'idée de développer, dans une étude synthétique, les diverses *théories formelles* sans se préocuper de la matière à laquelle on applique ces théories : c'est ce que M. Beppo Levi s'est proposé de faire dans ce premier volume de son *Introduction à l'Analyse mathématique*, volume qui porte en sous-titre *Théories formelles.* A vrai dire, si ce sous-titre exprime bien le but de l'Auteur, on est un peu étonné au premier abord, en parcourant la Table des matières, de voir que M. Beppo Levi rattache son étude à l'Analyse mathématique. Ce sont en effet les théories qui utilisent la notion de limite et la notion du continu que l'on s'accorde en général à considérer comme formant le domaine propre de l'Analyse et il se

trouve que ces notions sont systématiquement exclues du Livre de M. Beppo Levi : on n'y parle ni de limites, ni d'intégrales, ni de dérivées, ni de séries; en revanche, on y trouve l'étude des substitutions linéaires, des matrices des déterminants, des fonctions rationnelles entières, de sorte que les théories développées par M. Levi font partie en réalité de ce que l'on appelle en général l'*Algèbre supérieure*. Ce n'est que dans un second volume, dont l'Auteur annonce la publication pour plus tard, qu'apparaîtra le continu.

Dans les théories formelles que développe l'Auteur, il raisonne d'une façon abstraite sur tout champ d'éléments auquel s'appliquent certaines définitions et certaines opérations posées *a priori*. Lorsqu'une théorie particulière a un intérêt propre, indépendamment de la théorie générale d'où elle dérive, M. Beppo Levi ne manque cependant pas de la signaler. Mais c'est par la théorie la plus générale qu'il commence toujours et la théorie particulière, souvent capitale, dont il s'agit est étudiée sous la rubrique modeste d' « exemples et compléments ». C'est ainsi que les nombres complexes ordinaires, de la forme $a+bi$, sont étudiés dans les exemples et compléments du paragraphe 6 comme un cas particulier des corps algébriques quadratiques étudiés eux-mêmes comme cas particuliers des corps algébriques généraux et ce sont enfin les nombres complexes à n unités qui forment le fond même du chapitre, ou plutôt du paragraphe : l'auteur a, en effet, préféré donner aux divisions principales de son livre le nom de *paragraphes*, plutôt que celui de *chapitres*, dans le but d'indiquer nettement que les différentes théories ne forment pas des compartiments étanches, mais qu'elles se pénètrent, chaque nouveau paragraphe introduisant quelque nouvel élément essentiel dans l'ordre d'idées des paragraphes précédents. Ces paragraphes, au nombre de huit, sont consacrés respectivement aux champs de nombres, aux polynomes, aux fonctions, aux combinaisons linéaires, aux substitutions linéaires, aux nombres complexes, aux déterminants, aux fonctions rationnelles entières. Après une partie principale renfermant le développement des théorie formelles, chaque paragraphe comprend des compléments qui contiennent l'application de ces théories à des éléments particuliers. Ces compléments ont souvent une importance tout aussi grande que

les théories formelles auxquelles l'Auteur les rattache : c'est ainsi que la formule de Taylor constitue l'un des compléments du paragraphe **8**, l'étude des fonctions symétriques l'un des compléments du paragraphe **2**.

Parmi les théories qui sont développées par l'Auteur d'une façon nouvelle, très complète et très rigoureuse, citons celles du dernier paragraphe. L'auteur traite, dans un même ordre d'idées, trois questions qu'il y a lieu de rapprocher : 1° la détermination des solutions d'un système d'équations algébriques, ou problème général de l'élimination au sens de Kronecker ; 2° la définition du résultant de deux fonctions rationnelles entières ; 3° le théorème de Bezout, sous sa forme la plus générale, c'est-à-dire la détermination du nombre de dimensions et de l'ordre de l'intersection de deux variétés algébriques dont le nombre des dimensions et l'ordre sont donnés. Les difficultés que présente une démonstration algébrique rigoureuse du théorème de Bezout sont élucidées avec un soin tout particulier et si l'Auteur est amené à compliquer son étude et à introduire des définitions nouvelles relativement aux variétés, intersections de variétés données, c'est dans le but de pouvoir donner des énoncés rigoureux s'appliquant à tous les cas, en évitant les cas exceptionnels que présentent certains énoncés et certaines démonstrations du théorème de Bezout.

La méthode d'exposition adoptée par M. Beppo Levi dans ce Livre convient très bien au lecteur déjà en possession, tout au moins partielle, des diverses théories particulières : une vue d'ensemble sur les formes de raisonnement communes à diverses théories lui sera alors très profitable ; des répétitions fastidieuses pourront lui être évitées, car il sera inutile de reprendre sur plusieurs théories particulières des raisonnements qu'on peut faire une fois pour toutes, en englobant des champs d'applications très divers ; en outre, en éliminant toutes les contingences, on voit mieux le fond même des raisonnements, la vraie raison des choses. Mais si l'on veut employer la même méthode avec des étudiants qui ignorent les théories particulières et dans le but de les leur enseigner, en d'autres termes si l'on a la prétention de descendre du général au particulier, sans s'être élevé d'abord du particulier au général, il est bien à craindre que l'étudiant ne voie dans les théories formelles qu'un pur jeu de l'esprit, une combinaison de

définitions arbitraire et sans but apparent. L'Auteur reconnaît d'ailleurs que les théories mathématiques les plus générales ont leur origine dans l'étude et la comparaison des cas particuliers : « Il est bien vrai, dit-il dans la Préface, que la plupart des concepts et des démonstrations mathématiques se forment, à l'aide d'abstractions successives, en partant de cas particuliers, au moyen d'essais et de flottements » ; mais il ajoute immédiatement qu'à son avis « il n'est pas possible de reproduire utilement, dans une œuvre écrite, ce drame de la pensée ». C'est l'étudiant lui-même qui doit, d'après M. Beppo Levi, s'essayer à rendre concrètes, sur quelques cas particuliers, les démonstrations abstraites du cas général. Sans adopter complètement les idées de l'Auteur à ce sujet, on peut remarquer qu'il existe de nombreux ouvrages qui présentent dans tous leurs détails les diverses théories particulières, tandis qu'on trouve bien peu d'auteurs qui s'attachent avant tout, comme M. Beppo Levi, aux vues d'ensemble et à la coordination des diverses théories et c'est pour cela que son Livre mérite d'être lu et travaillé par tous ceux qui s'intéressent aux théories de l'Algèbre supérieure.

S. Lattès.

LAMB (Horace). — Hydrodynamics. Fourth edition, 1 vol. in-8° jésus, XVI-708 pages. Cambridge, at the University Press, 1916.

On a souvent constaté que l'enseignement de l'Hydrodynamique, tel qu'il est donné dans les cours de Mécanique rationnelle de nos Facultés, se heurte à un double écueil. Les élèves, dont les tendances naturelles sont dirigées du côté des sciences abstraites, sont déroutés par la nouveauté du langage scientifique; il en est même qui sont arrêtés par la démonstration des théorèmes sur la transformation des intégrales définies, ou qui admettent difficilement les hypothèses simplificatrices, grâce auxquelles on néglige certaines vitesses ou certains déplacements. Ceux-là, au contraire, qui sont attirés par les sciences physiques, s'étonnent du luxe de certains développements analytiques et se demandent dans quelle mesure il peut être justifié par l'expérience.

A vrai dire, il serait bien difficile qu'il en fût autrement; et ce

ne sont pas quelques heures d'un cours de fin d'année qui pourraient suffire à chasser de l'esprit des élèves des objections d'une nature aussi diverse. A celui-ci, il faudrait faire entrevoir toute l'étendue du nouveau champ de recherches, ouvert à ses investigations dans la théorie des équations aux dérivées partielles; à celui-là, il faudrait répondre par l'énumération des expériences qui ont eu leur point de départ dans la vérification d'un résultat analytique; à tous deux, il faudrait s'adresser, chiffres en mains, et montrer l'accord constant entre la théorie et l'expérience, accord qui constitue la justification suprême de l'Hydrodynamique.

Cet objectif, que nous venons de tracer, se trouve rempli, et de la façon la plus heureuse, par le traité de M. H. Lamb. La quatrième édition de cet Ouvrage classique vient de paraître; c'est un beau volume, qui contient sous une forme condensée l'exposé d'un très grand nombre de théories, et qui touche quelquefois aux limites actuelles de la Science. Aussi, l'analyse qui va suivre devra-t-elle se borner aux pages les plus importantes du Traité.

Pour la commodité de l'exposition, je conviendrai de diviser l'Hydrodynamique de M. Lamb en quatre parties successives. La première (Chap. I-III) renferme l'exposé des doctrines fondamentales. La seconde (Chap. IV-VII) traite du mouvement irrotationnel (à deux et trois dimensions), et des tourbillons. La troisième (Chap. VIII-X), de beaucoup la plus développée, a pour objet la théorie du déplacement des ondes. Enfin la dernière (Chap. XI et XII) roule sur la viscosité et sur les figures d'équilibre relatif des masses liquides tournantes.

Le premier Chapitre débute par une remarque significative, où se révèle le caractère propre de l'Ouvrage : faisons tourner autour de son axe, supposé vertical, et d'un mouvement uniforme, un vase de révolution, rempli d'eau ; nous constaterons qu'au bout d'un certain temps les molécules situées à la périphérie seront sensiblement immobiles par rapport à celles qui avoisinent l'axe. Dès lors, dans un liquide, les efforts internes ne sauraient être rigoureusement normaux. Néanmoins, l'Auteur nous prévient que l'influence de la composante tangentielle de l'effort sera négligée en première approximation, quitte à être étudiée plus tard, au Chapitre XI. Cette simplification admise, l'Auteur forme les équations d'Euler, la relation de continuité, l'expression des con-

ditions aux limites et celle de l'énergie; il dit un mot de l'emploi des axes mobiles et termine par l'exposé de la notation de Lagrange et de la transformation d'Euler.

Les premières conséquences des formules fondamentales sont développées dans le Chapitre II, qui commence par introduire la notion de potentiel des vitesses. Nous observerons à ce sujet que M. H. Lamb désigne ainsi (lorsqu'elle existe) la primitive *changée de signe* de la différentielle $u\,dx + v\,dy + w\,dz$; l'emploi de ce signe — remonte d'ailleurs à la seconde édition de l'Ouvrage. Viennent ensuite les notions de lignes de courant, de mouvement permanent; la démonstration du théorème de Torricelli et de l'existence d'une borne inférieure imposée aux vitesses. La détermination du champ d'applicabilité de la formule de Barré de Saint-Venant et de Wantzel a fait l'objet des recherches de Reynolds et Hugoniot; l'Auteur résume leurs travaux à ce sujet; puis il étudie, d'après Rankine, le mouvement d'une masse liquide, contenue dans un vase de révolution, et animée d'un mouvement de rotation autour de l'axe.

Enfin, l'exposé des théories fondamentales se termine par l'étude du mouvement irrotationnel, qui constitue la matière du Chapitre III. Signalons tout d'abord, à ce sujet, une notation propre à l'Auteur : il désigne par ξ, η, ζ les trois expressions, dont la première serait $\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$, et qu'on représente habituellement par 2ξ, 2η, 2ζ; cette modification a pour but de simplifier certaines formules, entre autres l'expression analytique du théorème de Stokes, que l'Auteur établit bientôt, après avoir défini le flux et la circulation. Il étudie ensuite les propriétés caractéristiques du potentiel des vitesses, regardé comme solution de l'équation de Laplace, démontre le théorème de Green, et examine les modifications à apporter aux théories précédentes, quand les espaces occupés par les liquides sont multiplement connexes : en particulier, le théorème de Green cesse alors d'être exact; il doit être remplacé par un nouvel énoncé dû à Kelvin. Enfin, le Chapitre se clôt par l'étude des sources et des doublets, et par leur comparaison avec les phénomènes de l'Électrodynamique.

Le Chapitre suivant, consacré aux mouvements parallèles à un plan fixe, nous fait pénétrer dans une partie nouvelle de l'Ouvrage,

d'allure plus spécialisée; il nous montre comment des doctrines analytiques, en apparence bien étrangères à notre sujet actuel, peuvent servir à résoudre des problèmes de nature très concrète. C'est ainsi qu'après avoir introduit, à la suite de Lagrange, la fonction de courant ψ associée au potentiel des vitesses φ, l'Auteur établit rapidement les propriétés fondamentales des fonctions analytiques $w = \varphi + i\psi$ de la variable $z = x + iy$; son exposition a d'ailleurs un caractère essentiellement pratique; elle consiste à partir de fonctions analytiques simples et à en chercher la signification hydrodynamique. Ainsi, prenant successivement $w = A z^n$, $\mu \log z$, $\mu \log \frac{z-a}{z+a}$, $C \log \operatorname{sh} \frac{\pi z}{a}$, l'Auteur étudie les différents systèmes orthogonaux auxquels conduisent ces fonctions; puis il aborde la relation inverse $z = f(w)$ et l'utilise pour résoudre des problèmes tels que les suivants : écoulement d'un liquide dans un canal limité par des parois minces et débouchant dans un espace libre (on a alors $z = w + e^w$); mouvement d'un fluide dans lequel on déplace un cylindre ou une plaque suivant une loi déterminée. Citons aussi le cas d'un vase tournant cylindrique dont la section droite est une ellipse ou un triangle équilatéral. Puis, s'inspirant des méthodes de représentation conforme dues à Schwarz et à Christoffel, M. Lamb traite de nouvelles questions, d'allure un peu plus compliquée, comme l'écoulement d'un liquide contenu dans un récipient, à travers une embouchure de Borda ou une ouverture rectiligne; il multiplie les figures pour donner au lecteur une idée précise des différentes transformations utilisées, et entre dans tous les détails d'application pratique qui relèvent de cette théorie : calcul du coefficient de contraction de la veine; calcul de la résistance supportée par une plaque ou un coin sur lequel vient buter le courant. Il termine par quelques remarques sur la production de discontinuités au sein d'un liquide, et sur l'extension de la théorie précédente au cas d'une couche liquide mince en mouvement.

Le Chapitre V se rapporte aux déplacements irrotationnels dans l'espace à trois dimensions. Dans ce cas, pour prêter à une discussion abordable, il faut que la configuration extérieure de la masse liquide puisse être représentée simplement dans un des systèmes classiques de coordonnées orthogonales : effectivement,

le Chapitre se divisera de lui-même en trois parties, suivant que les coordonnées seront sphériques, cylindriques ou elliptiques. L'Auteur s'attarde plus longuement sur le premier cas. Il développe d'abord une remarque de Maxwell d'après laquelle tout harmonique solide sphérique de degré n peut être engendré au moyen d'un système de $2^{|n|}$ sources, infiniment voisines de l'origine, ou infiniment éloignées, selon que n est négatif ou positif. Puis il définit ce qu'on doit entendre par harmonique zonal, tesséral ou sectoriel; et, après avoir rappelé la représentation analytique de ces fonctions, il les applique à différents problèmes, dont je citerai les suivants : mouvement d'une sphère solide dans un milieu liquide indéfini, ou dans un liquide contenu à l'intérieur d'une sphère; mouvement d'un système de deux sphères, parallèlement ou perpendiculairement à la ligne des centres; dans certains cas, il étudie d'après Stokes les lignes et les fonctions de courant.

Le cas des coordonnées cylindriques se rattache étroitement à l'étude des fonctions de Bessel; leur représentation analytique élucidée, M. Lamb les applique au déplacement d'un disque mince à travers un liquide. Puis, il généralise la théorie des harmoniques sphériques, pour l'étendre au cas du mouvement d'un ellipsoïde de révolution se déplaçant parallèlement à son axe dans un liquide indéfini. Si l'on se posait un problème analogue pour un ellipsoïde général, il faudrait introduire les coordonnées elliptiques et les fonctions de Lamé, dont l'Auteur rappelle brièvement les principales propriétés.

On aura pu remarquer que l'Auteur a déjà traité, à différentes reprises, des cas particuliers du problème du mouvement d'un solide au sein d'un liquide; plusieurs fois, il avait insisté sur cette conséquence remarquable que l'effet du liquide revient à augmenter l'inertie du solide. Ce même problème, M. H. Lamb le reprend dans toute sa généralité pour en faire l'objet du Chapitre VI; il suit alors l'exposition de Thomson et Tait et de Kelvin : son caractère distinctif consiste à regarder le solide et le liquide comme formant un seul système matériel; on évite ainsi le calcul laborieux des réactions mutuelles de ces deux milieux, et l'on n'a plus qu'à appliquer la méthode des équations de Lagrange. La principale difficulté dans la formation de ces équations provient

du calcul de la force vive : l'Auteur le traite en détail. Quant à l'intégration des équations, elle n'est possible que dans certains cas particuliers, où la symétrie des données fait apparaître des intégrales premières : tel est le cas d'un solide de révolution, qui tourne autour de son axe, lequel est assujetti à rester dans un plan donné, problème qui amena Kirchhoff à une élégante application des fonctions elliptiques.

La théorie précédente doit d'ailleurs être complétée dans le cas d'un solide percé de trous; et ses formules peuvent aussi être transcrites dans le langage des coordonnées curvilignes quelconques. L'Auteur se trouve ainsi conduit à faire une esquisse de la théorie des systèmes gyrostatiques et des coordonnées « cachées », théorie qui, en plusieurs circonstances, a permis de ramener l'étude des sytèmes continus à celle des systèmes possédant un nombre fini de coordonnées « palpables ».

La seconde Partie de l'Ouvrage se termine par la théorie des tourbillons, dont l'exposé remplit tout le Chapitre VII. M. H. Lamb commence par exposer les théorèmes généraux sur la circulation, les principaux résultats de Cauchy, Helmholtz, ainsi que les analogies de cette doctrine avec l'Électrodynamique. Puis il étudie les diverses propriétés d'un système de deux ou quatre tourbillons rectilignes, et d'une suite, simple ou double, de tourbillons égaux et équidistants. Après avoir discuté la stabilité d'un tel système, il passe aux tourbillons circulaires et analyse leurs influences mutuelles; puis il recherche sous quelles conditions le mouvement tourbillonnaire peut être permanent, et conclut par quelques mots sur la transformation de Clebsch.

La troisième des subdivisions que nous avons effectuées dans l'Ouvrage se rapporte, avons-nous dit, à la théorie générale de la propagation des mouvements ondulatoires. Cette partie comprend trois Chapitres distincts : si l'on néglige la compressibilité et la composante verticale de l'accélération, on est conduit à un ensemble de résultats, dont la plus brillante application a trait à la théorie des *marées* océaniques; elle remplit le Chapitre VIII. Cette théorie cesserait d'ailleurs d'être applicable, en toute rigueur, si l'on voulait étudier des phénomènes locaux : c'est ainsi que, dans une eau profonde, l'agitation des molécules liquides s'éteint progressivement à mesure que l'on s'éloigne de la surface libre; il y a

là tout un ensemble de phénomènes que M. H. Lamb groupe sous le vocable de mouvements par *ondes de surface*, et qu'il étudie dans le Chapitre IX. Enfin, si l'on veut tenir compte de la compressibilité, on est conduit à des problèmes du type de ceux de l'Acoustique; on a affaire alors aux *ondes d'expansion*, dont la théorie est exposée au Chapitre X.

Avec ses 110 pages, le Chapitre VIII constitue un véritable Traité de la théorie mathématique des marées. Comme tout traité sur un tel sujet, il débute par un résumé de la discussion des petites oscillations au moyen des équations de Lagrange; et il se divise, ensuite, en deux Sections, d'importance sensiblement égale, la première ignorant la rotation terrestre, dont l'influence fait précisément l'objet de la seconde.

Voici l'ordre adopté par M. Lamb dans la première Section : Étude des ondes à longue période dans un canal étroit (oscillations libres sous l'action de la pesanteur, ou forcées, sous l'influence d'une force perturbatrice périodique); cas d'un canal dirigé suivant un méridien, ou parallèlement à l'équateur; influence des variations de profondeur du canal; et, dans tout cet exposé, l'Auteur se sert fréquemment des résultats d'Airy. Puis, pour traiter le cas d'un bassin circulaire, il retrace rapidement la théorie des fonctions de Bessel de deuxième espèce; et, enfin, il applique la théorie des fonctions harmoniques sphériques à l'étude des marées à travers une couche sphérique recouvrant tout le globe.

La seconde Section que nous avons établie dans le Chapitre VIII débute par une étude de la stabilité de l'équilibre relatif d'un système animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe donné; à ce sujet, l'Auteur expose les propriétés classiques de l'équation $\Delta(\lambda^2) = 0$. Puis, après un problème préliminaire sur les bassins circulaires, il arrive à la théorie de Laplace, théorie qui repose sur la considération d'une équation différentielle linéaire du second ordre. Cette équation a fait l'objet d'importants travaux, dus notamment à Kelvin et à Darwin; les coefficients de certaines solutions de cette équation sont donnés par des relations aux différences finies, jouissant de propriétés remarquables. L'Auteur dit ensuite quelques mots du principe de la méthode de Hough; et, il termine par une application des considérations générales,

développées antérieurement, à la stabilité de la masse océanique. Le Chapitre est accompagné d'un appendice sur le calcul des forces pertubatrices luni-solaires.

L'objet du Chapitre IX a été indiqué plus haut; les problèmes qui s'y rattachent sont très nombreux; quelques-uns ont une grande importance pratique. Voici d'abord une première série d'études qui dérivent de la théorie des ondes stationnaires : la combinaison de ces ondes donne lieu à des ondes progressives dont la discussion, une fois achevée, permet à l'Auteur d'analyser les oscillations des liquides superposés; le calcul de l'énergie dans ce dernier problème conduit à un résultat curieux, qui permet d'expliquer les difficultés que rencontrent quelquefois les bateaux à l'approche de certains fjords de Norvège. Puis, l'Auteur étudie la stabilité du mouvement, d'après Rayleigh, et introduit la notion importante de groupe d'ondes. Nous arrivons alors à un problème classique, étudié par Cauchy et Poisson, et qui a pour objet la propagation des ondes produites en eau profonde par un ébranlement superficiel; de nombreuses figures viennent illustrer les développements analytiques, qui présentent plus d'une analogie avec les intégrales de la diffraction; la discussion est complétée par une interprétation physique des résultats de calcul, ainsi que par l'exposé d'une solution approchée du problème, due à Kelvin.

A ce problème se rattache celui qui consiste à évaluer l'effet sur un courant d'une pression arbitraire, mais permanente; un tel problème est indéterminé lorsqu'on écarte l'existence du frottement; on peut d'ailleurs lever l'indétermination, grâce à un artifice de Rayleigh. La méthode précédente s'applique du reste à d'autres questions, par exemple à la détermination de l'effet produit sur un courant par les inégalités du lit, ou par la présence d'un corps étranger, ou par un ébranlement d'origine variable.

Voici maintenant d'autres problèmes, où les ondes ont une amplitude finie : tel est le cas de l'onde trochoïdale de Gerstner et de l'onde solitaire. Dans le cas du mouvement permanent, ces problèmes pourraient être traités par une méthode analogue à celle des systèmes gyrostatiques et due à Helmholtz; mais, en réalité, l'Auteur ne l'applique que dans le cas des oscillations infiniment petites. Il retrouve ainsi des résultats obtenus à un autre point de vue, et dont il précise cette fois la signification pra-

tique (comme, par exemple, le calcul de la résistance éprouvée par un navire). Puis, il étudie les ondes stationnaires dans un bassin de dimensions limitées, les oscillations longitudinales et transversales d'un canal de section uniforme, et les oscillations d'un océan de profondeur constante sous l'action de la pesanteur.

Enfin M. H. Lamb clôt ce long Chapitre en recherchant dans quelle mesure les résultats généraux sont modifiés par l'influence de la *capillarité*. Le sujet prête à de beaux développements analytiques; entre autres problèmes abordés par l'Auteur, citons l'étude du sillage d'une ligne de pêcheur, la discussion des vibrations d'un jet cylindrique ou d'un globule sphérique.

Le Chapitre X, avons-nous dit, a trait à l'influence de la compresibilité sur les phénomènes de l'Hydrodynamique; en réalité, le Chapitre se rapporte exclusivement à la propagation d'un ébranlement dans un milieu gazeux, avec des variations relatives de pression peu importantes. Il s'agit là de problèmes classiques d'origine acoustique, et que je résumerai rapidement.

Voici d'abord la propagation du son par ondes planes, avec le calcul *a priori* de la vitesse du son dans les gaz; puis, la théorie, d'après Earnshaw et Riemann, des ondes d'amplitude finie, et l'exposé, d'après Rankine, des conditions que l'on doit réaliser pour obtenir un mouvement permanent. L'Auteur arrive ensuite à la propagation par ondes sphériques et reprend, à la suite de Helmholtz et Rayleigh, certains points de la théorie de l'équation

$$(\Delta_2 + k^2)\varphi = 0.$$

Cela fait, il étudie les mouvements ondulatoires produits par une sphère vibrante; il approfondit l'influence de l'air sur un pendule de forme sphérique et discute certains problèmes de dispersion et de diffraction des ondes par des écrans de formes bien déterminées. Puis il reprend les théories précédentes en supposant que les déplacements soient parallèles à un plan fixe; je citerai notamment le cas de la diffraction d'ondes planes par un écran percé d'une série d'ouvertures parallèles, problème qui admet une interprétation électrostatique. Enfin, envisageant plus spécialement l'atmosphère, l'Auteur approfondit l'influence de la pesanteur et des variations de température sur la propagation des ondes verticales, ainsi que les caractères généraux des marées

atmosphériques, théorie difficile, mais qui semble riche en conséquences fécondes.

Arrivons maintenant à la dernière partie de l'Ouvrage; elle est formée de deux Chapitres de longueurs fort inégales; le premier (Chap. XI) contient des développements étendus sur la théorie de la viscosité. Il débute par des remarques générales sur l'introduction du frottement dans les équations de l'Hydrodynamique: l'Auteur étudie notamment l'influence du frottement sur les oscillations forcées et sur les phases; il donne, en outre, une application intéressante de ces généralités au cas des marées équatoriales; et, c'est alors qu'il aborde la théorie de la viscosité proprement dite.

Son exposé commence par des considérations générales sur les équations indéfinies du problème, sur le calcul de la perte d'énergie et sur les expériences de Poiseuille. Puis, l'Auteur, envisageant plus spécialement les mouvements permanents, où l'on peut négliger l'effet de l'inertie, traite un certain nombre de questions où les surfaces frontières sont sphériques. Une formule due à Stokes permet alors d'évaluer la résistance créée par la viscosité; toutefois, en raison des hypothèses faites sur la petitesse des forces d'inertie, la formule cesse d'être exacte à très grande distance. Aussi l'Auteur expose-t-il à ce propos une théorie plus satisfaisante, développée dans un Mémoire assez récent d'Oseen; un peu plus loin, cette théorie lui permettra de résoudre un paradoxe signalé par Stokes à propos du mouvement uniforme d'un cylindre à travers un milieu indéfini visqueux.

Supposons maintenant que le mouvement ne soit plus permanent; il existera encore toute une catégorie de problèmes, qui se présentent fréquemment en pratique, et qu'on saura résoudre : à savoir, tous ceux où les oscillations sont d'amplitudes infiniment petites. L'Auteur en étudie successivement différents types : les uns ont trait à des frontières sphériques; d'autres, comme la discussion des mouvements ondulatoires produits par le vent, lui permettent de conclure à un accord très satisfaisant entre la théorie et l'expérience.

La fin du Chapitre contient d'abord diverses indications spéciales aux milieux gazeux : voici, par exemple, une étude des mouvements d'un pendule ou des vibrations d'une sphère, au sein d'un

tel milieu. Puis, M. H. Lamb aborde deux sujets, d'importance pratique considérable, mais qui ne paraissent pas avoir conquis de sitôt leurs droits de cité en Mathématiques : je veux parler de la théorie des mouvements turbulents $\left(\text{où } u\frac{\partial u}{\partial x} \text{ n'est plus négligeable}\right)$ et des lois de la résistance des fluides. Très bref sur ce dernier sujet, il s'attarde un peu plus sur le premier, qu'il traite à la manière de Rayleigh et Reynolds.

Le Chapitre XII est le dernier de l'Ouvrage ; il vise à donner un aperçu des travaux de Mac Laurin, Thomson et Tait, H. Poincaré et Darwin sur la théorie des figures d'équilibre d'une masse fluide, homogène, soumise à l'influence de la gravitation, et animée d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe donné. Tour à tour M. H. Lamb passe en revue les solutions obtenues par Mac Laurin, Jacobi, Laplace ; il dit aussi quelques mots du célèbre Mémoire de H. Poincaré sur la stabilité des formes d'équilibre ; puis il introduit l'hypothèse d'une forme extérieure variable, ce qui le conduit aux recherches de Dirichlet, Riemann et Dedekind. Il termine par quelques indications sur les recherches de H. Poincaré relatives à l'influence des phénomènes de précession.

L'analyse que l'on vient de faire ne peut donner qu'une idée très sommaire de la richesse et de la diversité des sujets abordés par M. H. Lamb. Observons, d'ailleurs, que, malgré cette abondance de documentation, son traité ne constitue nullement une Encyclopédie sur la matière ; il est même d'importantes questions qui, systématiquement, ont été laissées dans l'ombre : ainsi, on ne trouvera aucun aperçu sur l'utilisation des équations intégrales, ou sur l'emploi des méthodes d'approximations successives. Mais, si l'Auteur a voulu ignorer, de parti pris, toute la partie purement mathématique de sa science, du moins a-t-il donné toutes les références nécessaires pour remonter, de proche en proche, aux Mémoires originaux. Au point de vue bibliographique, l'Ouvrage est, de tous points, excellent ; ce sera un guide précieux pour l'étudiant qui voudra entreprendre des recherches d'Hydrodynamique ; plus d'une fois aussi, il y trouvera des indications très précises sur des problèmes qui n'ont pas encore été résolus, ou qui l'ont été de manière insuffisante. J'y vois une nouvelle

raison pour souhaiter à la quatrième édition de ce célèbre Ouvrage la plus grande diffusion, le meilleur succès, auprès du public français.

René Garnier.

MÉLANGES.

SUR LA NOTION GÉNÉRALE DE MOUVEMENT DES SYSTÈMES SOUMIS A DES LIAISONS D'ORDRE QUELCONQUE,

Par M. Étienne DELASSUS.

1. J'ai traité cette question dans plusieurs Notes présentées à l'Académie des Sciences ([1]) et dans deux Mémoires insérés aux *Annales de l'École Normale* ([2]), et j'ai enfin exposé ces recherches, en les résumant, dans mes *Leçons sur la dynamique des systèmes matériels*.

La notion de mouvement parfait n'existe que pour les systèmes à *liaison de première classe* et, par l'intermédiaire des réalisations parfaites ou à tendance parfaite, résulte, pour toute cette classe, de la notion de mouvement parfait pour les systèmes dont la liaison est une L_0 ou une L_1^1 d'après les notations que j'ai adoptées dans mes *Leçons* ou, comme on dit généralement, pour les systèmes holonomes ou non holonomes.

Mais cette notion, réduite aux L_0 et L_1^1, repose sur deux principes que j'ai admis comme théorèmes non encore démontrés mais démontrables parce que très vraisemblables, étant vérifiés dans des cas très généraux.

([1]) *C. R. Acad. Sc.*, 19 juin 1911, 2 octobre 1911, 16 octobre 1911, 15 avril 1912.

([2]) *Sur les liaisons et les mouvements des systèmes matériels* (*Annales de l'École Normale*, 1912); *Sur les mouvements des systèmes matériels dépendant d'un nombre fini de paramètres et soumis à des liaisons d'ordre quelconque* (*Annales de l'École Normale*, 1913).

Ces deux principes :

Toute liaison finie possède des réalisations directes par des liaisons finies ;

Toute liaison linéaire du premier ordre possède des réalisations directes et parfaites par des liaisons linéaires du premier ordre,

sont fondamentaux. S'ils ne sont pas généraux, c'est-à-dire s'ils ne s'appliquent pas à *toutes* les L_0 et les L_1^1, la notion de mouvement parfait ne sera pas établie d'une façon générale ou du moins sera bien peu précise, car il y aura des liaisons A pour lesquelles on ne saura pas l'établir et qui formeront un prolongement de la seconde classe ou bien une classe intermédiaire, mais toujours avec cette conséquence que la première classe, définie comme domaine assuré du mouvement parfait, sera délimitée par des frontières sur lesquelles nous n'aurons aucune indication.

En cherchant les démonstrations, je suis arrivé en premier lieu à une réduction consistant en ce que le second principe est une conséquence du premier, de sorte que, contrairement à ce qu'on était tenté de croire, toute la difficulté provient du premier principe. Abordant alors celui-ci je suis arrivé à me convaincre qu'il y a impossibilité de le démontrer dans le cas général, non pas impossibilité démontrée, mais impossibilité provenant de notre incapacité de représenter matériellement, dans notre espace qui n'a pas plus de trois dimensions, une fonction d'un nombre quelconque de variables définie arbitrairement sous forme analytique.

Nous montrerons que la lacune ainsi introduite dans la notion de mouvement parfait peut être aisément comblée, de sorte qu'au moyen du théorème ramenant le second principe au premier, la notion de mouvement parfait se trouvera rétablie pour toutes les liaisons de la première classe sans aucune exception et, cette fois, sans faire appel à aucun postulat ou à aucun théorème non démontré.

2. Pour ne pas avoir à faire des répétitions, remarquons que, dans les théorèmes relatifs à des possibilités de réalisations, on ne peut pas pratiquement reconnaître si une réalisation est parfaite ou non au moyen du critérium analytique constitué par

l'existence des *équations intermédiaires* parce que l'on aurait un trop grand nombre d'équations à considérer. Il vaut mieux, *puisque nous allons nous limiter aux liaisons* L_0 *et* L'_1, revenir aux déplacements virtuels et constater que les déplacements virtuels du système total sur la liaison réalisante fournissent sans exception tous les déplacements virtuels du système proposé.

Si l'on procède par *réalisations indirectes successives* terminées par une *réalisation directe*, on voit immédiatement que, si toutes ces réalisations partielles sont parfaites, la réalisation directe résultante est également parfaite et cela permet de grandes simplifications puisque toutes les réalisations partielles effectuées par introduction de liaisons finies sont certainement parfaites.

3. Proposons-nous de démontrer que si l'on admet la possibilité de la réalisation effective de toute liaison finie, il en résulte la possibilité de la réalisation effective de toute liaison linéaire du premier ordre.

La liaison totale se décompose en liaisons partielles qu'il s'agit de réaliser séparément. Par hypothèse nous savons réaliser celles qui sont finies et il nous suffit de montrer la possibilité de réalisation de la liaison exprimée par l'unique équation

$$A_1(q,t)\,q'_1 + \ldots + A_n(q,t)\,q'_n + A_{n+1} = 0$$

entre les paramètres q du système S.

Supposons d'abord que A_{n+1} soit identiquement nul. En reliant au système S, des points $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n$ par les liaisons finies, donc réalisables,

$$A_i \begin{cases} x_i = A_i(q,t), \\ y_i = 0, \\ z_i = 0; \end{cases} \qquad B_i \begin{cases} \xi_i = q_i, \\ \eta_i = 0, \\ \zeta_i = 0, \end{cases}$$

nous n'introduisons aucune nouvelle relation entre les q, de sorte que nous obtenons une réalisation indirecte et parfaite au moyen de la liaison

$$\Sigma x \xi' = 0$$

entre $2n$ points mobiles sur Ox.

Si A_{n+1} n'est pas nul, nous introduirons les deux points sup-

plémentaires

$$
A_{n+1}\begin{cases} x_{n+1} = A_{n+1}(q, t), \\ y_{n+1} = 0, \\ z_{n+1} = 0; \end{cases} \qquad B_{n+1}\begin{cases} \xi_{n+1} = t, \\ \eta_{n+1} = 0, \\ \zeta_{n+1} = 0, \end{cases}
$$

et nous serons ramenés à une liaison encore de même forme, mais entre $2n+2$ points mobiles sur Ox.

A chaque point B_i attachons le centre d'une roulette C_i de rayon unité, restant dans le plan xOz et roulant sur la droite

$$z = -1$$

de ce plan. C'est une liaison de roulement qui, en réalité, est une L_0, et si l'on appelle θ_i l'angle dont a tourné C_i à partir du contact à l'origine, on a

$$\theta_i = \xi_i.$$

Réalisons au point M_i mobile dans le plan xOz et soumis aux deux liaisons finies : la ligne OM_i est toujours parallèle au rayon θ_i marqué sur le disque C_i et la longueur OM_i est constamment égale à OA_i. Les coordonnées polaires de ce point seront constamment x_i et θ_i, de sorte que par des réalisatious finies nous sommes ramenés, en employant les notations ordinaires, à réaliser la liaison

$$\Sigma \rho\theta' = 0$$

entre un certain nombre de points mobiles dans le plan zOx.

Munissons OM_i, réalisé comme tige D_i, d'une roulette normale de rayon unité, dont le centre sera attaché en M_i et qui appuyée sur le plan fixe

$$z = -1$$

agira comme roulette planimétrique, c'est-à-dire pourra glisser sur Δ_i par suite du mouvement de M_i sur cette tige, mais ne pourra prendre aucun glissement dans le sens de son plan. Cette roulette Γ_i introduit une liaison qui est véritablement une L_1^1, mais on voit immédiatement qu'en combinant deux déplacements infiniment petits de cette roulette, l'un de translation dans le sens Δ_i et l'autre de rotation autour de Δ_i, on obtient n'importe quel déplacement de M_i, de sorte que la réalisation indirecte qu'elle procure est certainement parfaite. Cette roulette enregistre la composante normale à Δ_i du déplacement de M_i, de sorte que sa

vitesse de rotation ω_i est

$$\omega_i = \rho_i \theta'_i.$$

Si donc, sur le contour de chaque roulette Γ_i, nous marquons un point P_i et si nous appelons φ_i l'angle du rayon de ce point avec le plan des x, y nous sommes ramenés à la liaison

$$\Sigma \varphi'_i = 0$$

entre les points P et M et cette liaison du premier ordre se ramène à la liaison finie

$$\Sigma \varphi_i = \text{const.}$$

que, par hypothèse, nous savons réaliser. Nous avons ainsi, finalement, une réalisation parfaite de notre L_1^1.

4. Les liaisons peuvent toujours se transformer en liaisons entre un certain nombre de points du système ou, comme nous dirons, en *liaisons ponctuelles*. Si nous prenons les coordonnées de toutes les molécules du système, il est impossible que n quelconques, prises au hasard, soient des fonctions non distinctes des n paramètres q, puisque s'il en était ainsi, en prenant $n-1$ coordonnées de molécules convenablement choisies toutes les autres coordonnées de molécules s'exprimeraient au moyen d'elles et le système ne dépendrait véritablement que de $n-1$ paramètres.

On peut donc choisir n coordonnées de molécules au moyen desquelles les q pourront s'exprimer de sorte que toute liaison finie ou non pourra se mettre sous forme de relation analogue entre n coordonnées de certaines molécules.

Nous désignerons ces molécules, dont le nombre est égal ou inférieur à n, par P_1, P_2, ..., et celles de leurs coordonnées qui nous servent maintenant de paramètres par p_1, p_2, ..., p_n.

5. Parmi les liaisons finies nous allons considérer spécialement celles qui peuvent se mettre sous la forme de *liaison ponctuelle algébrique*.

Ces liaisons ont été déjà étudiées. Kempe, pour les liaisons algébriques planes, et M. Kœnigs [1], pour les liaisons algébriques

[1] *Voir* Koenigs, *Leçons de Cinématique*.

dans l'espace, ont montré la possibilité de leur réalisation effective au moyen de systèmes articulés. Leurs théorèmes, qu'il est bien facile d'étendre au cas des liaisons dépendant du temps, démontrent que notre premier principe s'applique à ces liaisons. On pourrait en rester là, mais on peut remarquer que, pour le but que nous poursuivons, la restriction d'utiliser uniquement des liaisons d'articulation est complètement inutile, ce qui permet d'obtenir la démonstration infiniment plus simple qui suit.

Une liaison finie ponctuelle et algébrique est de la forme

$$\Sigma A p_1 p_2 \ldots p_s = 0.$$

Si à chaque coefficient A nous faisons correspondre le point

$$x = A, \qquad y = 0, \qquad z = 0,$$

qui est ou bien fixe ou bien mobile par un mouvement d'horlogerie approprié suivant que A est constant ou fonction du temps, la liaison prend la forme

$$\Sigma p_1 p_2 \ldots = 0$$

entre les anciens points P et les nouveaux points que nous venons d'introduire.

Imaginons deux tiges concourantes réunies par une articulation normale percée d'un trou longitudinal dans lequel passe une autre tige Δ, nous réalisons ainsi un angle variable dont le sommet se déplace librement sur la troisième tige et dont le plan lui reste normal. Pour abréger, nous dirons que ce simple appareil est un compas mobile sur la tige Δ. Il va nous permettre de réaliser la liaison

$$p_1 = p_2$$

entre deux points.

Si p_1 et p_2 sont de même nature, par exemple les x des deux points, il suffira de faire passer par M_1 et M_2 les deux branches d'un compas mobile sur Ox.

Si p_1 et p_2 sont de natures différentes, par exemple la coordonnée x_1 de M_1 et la coordonnée y_2 de M_2, on considérera un compas mobile sur Ox avec une branche passant par M_1, puis un compas mobile sur Oy avec une branche passant par M_2. Enfin les deux autres branches seront assujetties à avoir toujours leur point

de rencontre sur la droite fixe

$$x - y = 0$$

du plan xOy.

Pour réaliser le produit $p_1 p_2 \ldots$, nous réaliserons matériellement la surface

$$\Sigma \qquad z = xy,$$

puis nous introduirons un point Q_2 satisfaisant aux deux liaisons

$$x_2 = p_1, \qquad y_2 = p_2,$$

que nous savons réaliser et nous l'obligerons à rester sur Σ, ce qui donnera pour lui

$$z_2 = x_2 y_2 = p_1 p_2;$$

on sera donc ramené au produit

$$z_2 p_3 \ldots$$

de même forme mais avec un facteur de moins. Par réductions successives, toujours au moyen de la même surface Σ, on arrivera à représenter chaque produit par le z d'un point, de sorte que la liaison à réaliser prendra la forme

$$\Sigma p = 0,$$

les p étant des coordonnées de points. Cette somme se réalisera à son tour comme le z d'un point en employant exactement le même procédé, mais au moyen de la surface matérielle

$$x - y + z$$

et avec un peu plus de simplicité, parce que les p sont ici tous des z. La liaison se trouvera réalisée en obligeant le point final à glisser dans le plan des x, y.

6. Nous dirons qu'une L_1^1 ponctuelle

$$A_1(p, t)p'_1 + \ldots + A_n(p, t)p'_n + A_{n+1}(p, t) = 0$$

est algébrique si les A sont des polynomes entiers aux variables p, les coefficients pouvant être des constantes ou des fonctions du temps.

Reprenons, pour cette liaison, la démonstration du n° 3. Les liaisons de définition des points A et B sont ici :

$$\mathrm{A}_i \left\{ \begin{array}{l} x_i = \mathrm{A}_i(p, t), \\ y_i = 0, \\ z_i = 0, \end{array} \right. \qquad \mathrm{B}_i \left\{ \begin{array}{l} \xi_i = p_i, \\ \eta_i = 0, \\ \zeta_i = 0 ; \end{array} \right.$$

elles sont ponctuelles et algébriques, ce qui n'a pas lieu dans le cas général. Si l'on examine la suite des autres réalisations, il est facile de constater qu'elles sont toutes ponctuelles algébriques sans même invoquer le cas particulier actuel. La dernière

$$\Sigma \varphi_i = \text{const.}$$

se met sous cette forme en l'écrivant

$$\cos(\Sigma \varphi_i) = \text{const.},$$

car elle devient une équation entière entre les sinus et cosinus des angles φ_i et s'exprime alors rationnellement au moyen des coordonnées des points P et M et de radicaux du second degré. On peut donc arriver à la mettre sous forme rationnelle entière.

Puisque les liaisons finies que nous employons sont ponctuelles et algébriques, nous savons les réaliser d'après ce qui a été dit au paragraphe précédent et il en résulte que nous savons réaliser effectivement et d'une façon parfaite n'importe quelle liaison ponctuelle linéaire du premier ordre et algébrique.

7. Il serait facile de montrer la possibilité de la réalisation de catégories très nombreuses de liaisons L_0 transcendantes, mais, comme d'après ce qui a été dit au début, nous ne pouvons assurément pas réaliser toutes les L_0 et, par suite, toutes les L_1^1, il est inutile pour nous de nous engager dans cette voie.

Nous allons procéder par réalisations approchées.

Considérons une liaison L_0 ponctuelle non algébrique ou algébrique, mais dont les équations ne sont pas mises sous forme rationnelle entière. Elle est définie par le système

$$(\mathrm{L}_0) \qquad \left\{ \begin{array}{l} f_1(p_1, p_2, \ldots, t) = 0, \\ f_2(p_1, p_2, \ldots, t) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array} \right.$$

et comme, par hypothèse, on n'est pas à l'instant initial en une position singulière de la liaison, les fonctions f sont développables en séries de Taylor suivant les puissances de $p - p^0$, les coefficients étant des fonctions de t régulières pour $t = 0$.

Désignant par

$$\varphi^m(p - p^0, t)$$

le développement d'une fonction f limité aux termes d'ordre m, nous considérerons la liaison

$$(L_0^m) \qquad \begin{cases} \varphi_1^m(p - p^0, t) = 0, \\ \varphi_2^m(p - p^0, t) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

qui est algébrique et nous considérerons la suite illimitée de liaisons

$$L_0^1, \quad L_0^2, \quad L_0^3, \quad \dots, \quad L_0^m, \quad \dots.$$

La liaison L_0^m, étant algébrique, est réalisable quelle que soit la valeur de m. Si l'on représente L_0^m et L_0 par des multiplicités dans un espace à n dimensions on peut dire que L_0^m présente au point $p_1^0, p_2^0, \dots$ un contact d'ordre m avec L_0, de sorte que si nous considérons un domaine limité assez petit et entourant ce point initial, la liaison L_0^m, dans l'étendue de ce domaine, différera de L_0 d'autant moins que m sera plus grand et tendra vers L_0 quand m tendra vers l'infini.

Nous avons donc formé une suite de liaisons algébriques approchées de L_0 et tendant vers L_0 et nous remarquerons que, si un système de valeurs initiales p^0, p'^0 est compatible avec la liaison L_0, il est forcément compatible avec toutes les liaisons algébriques approchées par suite de leur contact, d'ordre au moins égal à l'unité, avec L_0.

8. Nous pouvons d'une façon analogue définir les réalisations algébriques approchées d'une L_1^1 non algébrique ou algébrique, mais non mise sous la forme normale considérée au n° 6.

Si dans une équation

$$f(p, t) = 0,$$

nous limitons le développement aux termes d'ordre m fournissant

l'équation approchée

$$\varphi^m(p - p^0, t) = 0,$$

et si nous prenons la dérivée

$$\frac{d}{dt}\varphi^m(p - p^0, t) = 0,$$

nous obtenons une équation qui est l'équation dérivée

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_1} p'_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial p_n} p'_n + \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

dans laquelle les coefficients des p' sont remplacés par leurs développements limités aux termes d'ordre $m - 1$ et le terme indépendant par son développement limité aux termes d'ordre m.

Étant donnée une liaison L_1^1, nous réduirons à l'ordre m toutes ses équations finies et, dans ses équations du premier ordre, à l'ordre $m - 1$ les coefficients des p' et à l'ordre m les termes indépendants. En opérant de cette façon nous obtiendrons des équations finies et des équations linéaires du premier ordre telles que les dérivées des équations finies se retrouvent certainement parmi les équations du premier ordre, donc une liaison algébrique encore sous forme canonique et qui, lorsque m croîtra indéfiniment, tendra, dans le domaine des p^0, vers L_1^1; nous la désignerons par L_1^{1m} et nous remarquerons encore qu'un système de valeurs initiales p^0, p'^0 compatible avec L_1^1 est certainement compatible avec tous les $L_1^{\prime m}$.

9. Pour ne pas faire en double le même raisonnement, désignons par L la liaison pouvant être une L_0 ou une L_1^1 et par L^m sa liaison algébrique approchée d'ordre m.

Puisque le système initial p^0, p'^0 donné, compatible avec L, est compatible avec n'importe quelle liaison L^m, nous pouvons, pour chaque valeur de m, considérer le mouvement parfait $\mathfrak{M}^m$ du système matériel sur la liaison L^m en partant des conditions initiales p^0, p'^0.

Cette considération est légitime puisque les L^m, étant des liaisons ponctuelles algébriques, possèdent sûrement des réalisations parfaites, donc font partie du domaine du mouvement parfait.

Nous aurons ainsi une suite illimitée de mouvements parfaits

$$\mathfrak{M}^1, \quad \mathfrak{M}^2, \quad \mathfrak{M}^3, \quad \ldots, \quad \mathfrak{M}^m, \quad \ldots.$$

et, suivant un raisonnement constamment utilisé, on montrera que ces mouvements tendent vers un mouvement limite, en montrant que les équations qui déterminent $\mathfrak{M}^m$ tendent vers des équations limites bien déterminées quand m croît indéfiniment.

Les équations du mouvement $\mathfrak{M}^m$ sont formées au moyen de la force vive et du travail virtuel qui sont indépendants de m, et des équations de la liaison L^m par application du principe de Dalembert qui, comme nous le savons, constitue la règle des mouvements parfaits des systèmes à réalisations directes parfaites. Puisque les équations L^m tendent à la limite vers les équations L, les équations tendent vers celles que donnerait le principe de Dalembert appliqué à la force vive, au travail virtuel et aux équations de la liaison limite L, de sorte que :

Les mouvements parfaits sur les liaisons algébriques approchées d'une liaison L *finie ou linéaire du premier ordre tendent vers un mouvement limite* $\mathfrak{M}$ *fourni par l'application du principe de Dalembert au système et à sa liaison* L.

Considérons alors une L_0 ou L_1^1 algébrique mais non mise sous forme rationnelle entière.

Sous la forme normale elle donne la notion de mouvement parfait; sous une forme autre elle donne naissance à des réalisations algébriques approchées sous forme normale conduisant au mouvement limite $\mathfrak{M}$. Ces deux mouvements sont donnés par l'application du même principe de Dalembert à la liaison sous ses deux formes et il est bien visible que ces deux systèmes d'équations se ramènent l'un à l'autre par un simple changement de multiplicateurs de Lagrange et fournissent, en conséquence, les mêmes fonctions q de t. De là résulte que le mouvement $\mathfrak{M}$ n'est autre que le mouvement parfait.

Pour les systèmes à liaisons ponctuelles L_0 *ou* L_1^1 *algébriques, le mouvement limite des mouvements parfaits sur les liaisons algébriques approchées coïncide toujours avec le mouvement parfait défini au moyen des réalisations parfaites.*

Les mouvements $\mathfrak{M}$ constituent donc un moyen de trouver les mouvements parfaits quand ceux-ci existent ou, plus exactement, dans les cas où l'on a la notion de mouvement parfait par existence de réalisations parfaites.

Ce moyen pourra donc servir de définition naturelle du mouvement parfait quand il n'y aura plus de réalisations parfaites.

Et nous remarquerons que nous n'avons pas à nous occuper de savoir si la liaison considérée possède ou non des réalisations directes parfaites. Si elle n'en possède pas, la nouvelle définition du mouvement parfait s'applique naturellement et, si elle en possède, on n'arrive à aucune contradiction puisque le mouvement parfait qui serait défini par ces réalisations parfaites serait donné par le principe de Dalembert, donc par les mêmes équations que le mouvement $\mathfrak{M}$, et, par conséquent, coïnciderait avec lui.

Nous obtenons donc la *notion mécanique* de mouvement parfait pour toutes les L_0 et les L_1^1 sans aucune exception et nous constatons que ce mouvement parfait satisfait toujours au principe de Dalembert.

10. Puisque toute L_1 non linéaire admet des réalisations à tendance parfaite par des L_1^1 et que la notion de mouvement parfait existe pour toutes les L_1^1 il en résulte que nous avons la notion mécanique de mouvement parfait pour toutes les L_1.

Puisque toute L_2^1 admet soit des réalisations parfaites, soit des réalisations à tendance parfaite par des L_1 et que nous avons la notion de mouvement parfait pour toutes les L_1, il en résulte la notion mécanique de mouvement parfait pour toutes les L_2^1.

Finalement nous voyons que, *sans faire appel au moindre postulat*, nous nous sommes élevés progressivement à la *notion mécanique de mouvement parfait pour tout système soumis à une liaison de première classe* sans qu'il y ait jamais contradiction lorsque, par suite de la nature de la liaison, cette notion peut se présenter sous diverses formes. Enfin, ce mouvement dont nous avons la notion mécanique est toujours fourni analytiquement par le principe de Dalembert appliqué aux équations du second ordre de la liaison.

Sous une forme plus condensée nous pourrons dire :

Le domaine du mouvement parfait est constitué par la première classe de liaisons.

La règle du mouvement parfait est le principe de Dalembert appliqué, sous l'une quelconque de ses diverses formes, aux équations du second ordre de la liaison.

UN THÉORÈME SUR LES ENSEMBLES FERMÉS;

PAR M. W. SIERPINSKI.

Le but de cette Note est de démontrer un théorème sur les ensembles fermés de points dans l'espace à m dimensions qui peut être regardé comme une généralisation d'un théorème bien connu de M. G. Cantor (Durchschnittssatz), fondamental dans la théorie des ensembles de points.

THÉORÈME. — *Pour que les ensembles bornés et fermés* P, *formant un ensemble* E, *admettent au moins un point commun, il faut et il suffit qu'un nombre fini quelconque des ensembles* P, *appartenant à* E, *admette au moins un point commun.*

Démonstration. — Que notre condition est nécessaire, il est bien évident; nous démontrerons donc seulement qu'elle est suffisante. Nous donnerons la démonstration pour l'espace à deux dimensions; pour l'espace à m dimensions la démonstration serait analogue.

Soit donc E un ensemble donné des ensembles bornés [1] et fermés P, et supposons que tout nombre fini des ensembles P, appartenant à E, admet au moins un point commun. Les ensembles P étant bornés, il existe évidemment un carré K qui contient (au sens large) tous les points d'un au moins des ensembles P, par

[1] Il suffirait d'admettre qu'un au moins des ensembles P est borné.

exemple de l'ensemble P_0. (Soit, par exemple, K le plus petit carré aux côtés entiers, ayant pour centre l'origine de coordonnées et contenant tous les points d'un au moins des ensembles P.) Je dis que tout nombre fini des ensembles P, appartenant à E, admet au moins un point commun dans le carré D.

Soit, en effet, $P_1, P_2, \ldots, P_n$ un nombre fini quelconque des ensembles faisant partie de E. D'après notre hypothèse, les ensembles $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ admettent au moins un point commun p; appartenant à P_0, et, P_0 étant contenu dans K, le point p est contenu dans K; les ensembles $P_1, P_2, \ldots, P_n$ admettent donc un point commun dans le carré K. C. Q. F. D.

Divisons maintenant le carré K en quatre carrés: Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 (Q_1 et Q_2 étant les deux qui sont plus haut, Q_1 gauche, Q_2 droit, et Q_3 et Q_4 les deux qui sont plus bas, Q_3 gauche, Q_4 droit). Je dis qu'un au moins de ces quatre carrés jouit de cette propriété que tout nombre fini des ensembles P, appartenant à E, admet au moins un point commun dans ce carré.

Supposons, en effet, qu'aucun des carrés Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 ne jouit de cette propriété. Il existe donc : 1° des ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_k$, appartenant à E, qui n'ont aucun point commun dans le carré Q_1; 2° des ensembles $B_1, B_2, \ldots, B_l$, appartenant à E, qui n'ont aucun point commun dans le carré Q_2; 3° des ensembles $C_1, C_2, \ldots, C_m$, appartenant à E, qui n'ont aucun point commun dans le carré Q_3, et, enfin, 4° des ensembles $D_1, D_2, \ldots, D_n$, appartenant à E, qui n'ont aucun point commun dans le carré Q_4. Il s'ensuit immédiatement que les $k+l+m+n$ ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_k$; $B_1, B_2, \ldots, B_l$; $C_1, C_2, \ldots, C_m$; $D_1, D_2, \ldots, D_n$, appartenent à E, n'ont aucun point commun dans le carré K (puisqu'un tel point appartiendrait à un au moins des carrés Q_1, Q_2, Q_3, Q_4), contre la propriété du carré K.

Nous avons donc démontré qu'un au moins des carrés Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 est tel que tout nombre fini des ensembles P, appartenant à E, admet au moins un point commun dans ce carré; désignons par K_1 le premier de ces quatre carrés jouissant de cette propriété.

Sur le carré K_1 nous pouvons répéter le même raisonnement que nous avons fait sur le carré K, ce qui donnera un nouveau carré K_2, et ainsi de suite. Nous aurons ainsi une suite infinie bien déter-

minée de carrés $K_1, K_2, K_3, \ldots$ tendant vers un point limite p (qui sera point commun unique de tous les carrés K_n).

Il suit de la définition des carrés K_n que, pour tout indice n donné, tout ensemble P de E possède au moins un point commun avec le carré K_n; il en résulte immédiatement que p est point d'accumulation de tout ensemble P de E; donc, ces ensembles étant fermés, p est point de tout ensemble P de E.

Le point p est donc point commun à tous les ensembles P appartenant à E. Notre condition est donc suffisante.

Nous avons donc démontré notre théorème.

Comme une conséquence immédiate de notre théorème, nous obtenons le théorème suivant, qui est encore plus général que le théorème (Durchschnittssatz) de M. Cantor :

Corollaire. — *Si* E *est un ensemble des ensembles bornés et fermés* P, *tel que, de deux ensembles* P_1 *et* P_2 *de* E, *l'un soit toujours un sous-ensemble de l'autre, il existe un point au moins commun à tous les ensembles* P *de* E.

En effet, les conditions de notre théorème sont alors satisfaites, car, d'après l'hypothèse de notre corollaire, pour tout nombre fini des ensembles $P_1, P_2, \ldots, P_n$ de E, l'un de ces ensembles est évidemment sous-ensemble de tous les $n-1$ autres, et un quelconque de ses points est commun à tous les n ensembles considérés.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Whittaker (E. T.). — *A Treatise on the analytical Dynamics of particles and rigid bodies; with an introduction to the problem of three bodies.* Second edition (First edition, 1904). 1 vol. in-8 jésus, XII-432 pages. Cambridge, at the University Press, 1917. Price : 15 shellings.

Flamard (Ernest). — *Etude sur les méthodes nouvelles de la Statique des constructions.* Livre I : Recherche des déformations élastiques dans les systèmes à liaisons statiques ou surabondantes. Livre II : Application au calcul des fermes de charpente à lignes de soutien intérieures et extérieures. 1 vol. gr. in-8, V-114 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1914. Prix : 5 fr.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

DARBOUX (GASTON). — PRINCIPES DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE. (Cours de Géométrie de la Faculté des Sciences.) 1 vol. gr. in-8 (23-17), IV-519 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1917.

Cet Ouvrage est la dernière production de l'Auteur. M. Darboux a donné le bon à tirer de la Préface, quelques jours seulement avant d'entrer à la maison de santé où, hélas, il devait succomber.

Cet Ouvrage est aussi le développement du dernier cours professé à la Sorbonne par M. Darboux pendant le second semestre de l'année scolaire 1915-1916.

Ce Livre est, à un certain point de vue, une nouvelle édition, considérablement augmentée, de son Ouvrage *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces*, qui parut en 1872 et fut, à juste titre, très remarqué.

M. Darboux, qui est le véritable créateur de la Géométrie infinitésimale, aimait aussi passionnément la Géométrie algébrique. Il débuta dans cette science, d'une façon magistrale, par sa belle théorie des cyclides. Depuis, il ne négligea jamais cette branche de la science; il y revint à plusieurs reprises à la fin de sa carrière; et lorsque, vers la fin de 1915, il m'indiqua le sujet et le plan de son prochain cours, il ajouta : « Vous voyez, l'*on revient toujours à ses premières amours.* »

J'eus la curiosité de suivre ce cours et j'en fus bien récompensé. Il était intéressant au suprême degré et même quelquefois passionnant. Depuis j'ai lu et relu cet Ouvrage pour la correction des épreuves et pour la rédaction de cette analyse; j'y ai retrouvé le même intérêt qu'autrefois, à un degré moindre peut-être, car un livre, même bien rédigé (et c'est le cas), ne peut pas donner cette sensation vivante du cours.

Pour avoir une idée nette de cet Ouvrage, il importe de savoir dans quel esprit il a été conçu. M. Darboux était un inventeur prodigieux, mais il aimait aussi à revenir en arrière, contempler un ensemble de résultats et les grouper dans un ordre méthodique,

à en faire une véritable synthèse. Cet Ouvrage est donc en somme la résultante des efforts qu'a faits Darboux pour grouper logiquement les principales théories de la Géométrie algébrique moderne et les asseoir sur une base solide. C'est que dans le développement d'une science il y a, en général, deux tendances : l'une de création, l'autre de construction. Par la tournure de son esprit, M. Darboux était capable de réussir aussi bien dans l'une que dans l'autre. Une pareille construction logique est non seulement intéressante en ce sens qu'elle permet de bâtir l'édifice avec les matériaux épars amassés par divers savants, mais elle est quelquefois nécessaire parce que les créateurs vont de l'avant, sans s'astreindre toujours à une rigueur absolue. J'ai encore connu autrefois de bons esprits qui ne voulaient pas admettre les raisonnements géométriques basés sur la considération des points circulaires à l'infini, du cercle imaginaire à l'infini, etc. Je ne crois pas qu'à l'heure actuelle il existe un seul mathématicien qui doute de la rigueur absolue de pareils raisonnements. S'il y en a, je recommande à ceux-là la lecture de l'Ouvrage de M. Darboux; ils verront que ces notions reposent sur la plus solide de toutes les bases : sur l'*Algèbre*.

L'Ouvrage est divisé en cinq Livres ; nous résumerons successivement les résultats de chacun d'eux.

Livre I. — *Rapport anharmonique.*

Dans un Chapitre d'introduction, où l'on trouvera des considérations d'une haute portée philosophique sur le rôle des nombres négatifs et des nombres imaginaires tant en Algèbre qu'en Analyse, l'Auteur explique comment on a été amené à introduire l'infini et l'imaginaire dans la Géométrie moderne. C'est que, dit-il : « Le caractère propre des méthodes de l'Analyse et de la Géométrie modernes consiste dans l'emploi d'un petit nombre de principes généraux, indépendants de la situation respective des parties ou des valeurs relatives des différents symboles, et les conséquences sont d'autant plus étendues que les principes eux-mêmes ont plus de généralité. »

C'est *Desargues* qui, le premier, a introduit les points à l'infini. Au point de vue analytique, ces points s'introduisent par l'emploi des coordonnées homogènes.

Poncelet a, le premier, introduit les points imaginaires dans les démonstrations géométriques. Il invoquait le fameux *Principe de continuité*, qui peut s'énoncer ainsi : « Toutes les fois que la démonstration d'une propriété a été obtenue en supposant réelles certaines parties de la figure qui interviennent dans la démonstration, la proposition subsiste quand ces parties disparaissent ou deviennent imaginaires, quoique la démonstration ne subsiste plus. »

M. Darboux montre que ce principe revient à la proposition d'algèbre suivante : « Si un ou plusieurs polynomes sont nuls pour toutes les valeurs réelles des variables, ils sont identiquement nuls et par conséquent ils s'annulent quand les variables sont imaginaires. »

Dans cet Ouvrage, le point imaginaire à distance finie ou infinie est défini d'une façon purement analytique.

Les coordonnées tétraédriques sont définies comme des fonctions linéaires distinctes des coordonnées cartésiennes homogènes; il en résulte que le tétraèdre fondamental possède la plus grande généralité possible; il peut avoir des sommets imaginaires, à l'infini, etc.

L'introduction des coordonnées tétraédriques conduit tout naturellement à la transformation homographique. A propos de cette transformation, l'Auteur démontre le théorème suivant :

Toute transformation ponctuelle dans laquelle chaque plan a pour homologue un plan est une transformation homographique.

Le rapport anharmonique de quatre points en ligne droite, de quatre plans d'un faisceau ou de quatre droites concourantes dans un plan est défini à l'aide des paramètres qui définissent les coordonnées de chacun des éléments. On remarquera ici que l'Auteur évite avec soin la définition élémentaire du rapport anharmonique de quatre points en ligne droite. C'est qu'en effet la définition élémentaire ne donnerait rien quand la droite qui porte les quatre points est isotrope, et cependant le rapport anharmonique existe toujours.

Revenant aux coordonnées tétraédriques, l'Auteur montre que le système est défini quand on connaît le tétraèdre fondamental et

le point dont les coordonnées sont toutes égales. Le rapport de deux coordonnées d'un point quelconque est égal au rapport anharmonique d'un certain faisceau de quatre plans.

Poncelet avait découvert une transformation ponctuelle qui est un cas particulier de l'homographie, c'est l'*homologie*. Dans le cas du plan, deux figures homologiques peuvent être considérées comme la perspective de deux figures homothétiques. Poncelet croyait qu'une homographie plane peut être obtenue en faisant successivement un déplacement et une homologie. La proposition de Poncelet est en défaut lorsque l'homographie conserve la droite de l'infini. Voici le résultat établi par M. Darboux :

Toute transformation homographique dans laquelle la droite de l'infini ne se correspond pas à elle-même peut être ramenée de deux manières différentes à un déplacement, suivi ou précédé d'une homologie.

Dans l'espace, on voit tout de suite que l'homographie la plus générale ne peut pas être obtenue en combinant un déplacement et une homologie.

Après l'homographie vient naturellement l'étude du principe de dualité de Chasles, et comme conséquence l'introduction des coordonnées tangentielles. L'Auteur montre que ces coordonnées peuvent être définies à l'aide de rapports anharmoniques.

Poncelet, qui fut le grand initiateur, avait découvert une transformation qui est un cas particulier de la transformation dualistique : c'est la transformation par *polaires réciproques*. Il était intéressant de savoir si la transformation corrélative peut donner des figures plus générales que la transformation par polaires réciproques. L'Auteur a résolu complètement la question et il a montré qu'en général toute transformation dualistique peut être obtenue en combinant une transformation par polaires réciproques et un déplacement. Il n'y a qu'un seul cas d'exception, c'est lorsque, à tout point à l'infini de la seconde figure, correspond dans la première un plan qui passe par un point déterminé rejeté à l'infini.

Ce Livre se termine par un Chapitre consacré aux coniques et aux divisions homographiques. L'Auteur montre d'abord que les coniques sont des courbes unicursales et il en déduit d'une façon très simple les propriétés élémentaires des systèmes de coniques.

Je signalerai, dans cet ordre d'idées, une démonstration tout à fait élégante du théorème de Pascal. Il utilise une proposition élégante et trop peu connue due à Paul Serret. Si x_i, y_i, z_i sont les coordonnées homogènes de six points d'une conique, on peut attribuer à chaque point un coefficient λ_i tel que, si $\varphi(x, y, z)$ est un polynome homogène, du second degré, quelconque, on ait

$$\sum_1^6 \lambda_i \varphi(x_i, y_i, z_i) = 0.$$

M. Darboux, après avoir donné une démonstration très simple de ce résultat, en déduit de nombreuses conséquences.

Livre II. — *Définitions métriques.*

Les notions fondamentales d'angles et de distance en Géométrie plane sont définies analytiquement en supposant le plan rapporté à des axes rectangulaires, en introduisant les coordonnées homogènes, et en appliquant à tous les éléments réels ou imaginaires les formules bien connues pour les éléments réels. Cette façon de procéder est parfaitement logique puisque les formules en question sont des invariants absolus quand on fait un changement d'axes. Les points circulaires à l'infini I et J, les droites isotropes s'introduisent ainsi d'une façon toute naturelle. La distance de deux points distincts est indéterminée dans les deux cas suivants : 1° les deux points sont à l'infini ; 2° l'un des deux points est le point I ou le point J. La distance de deux points est nulle s'ils sont situés à distance finie sur une même droite isotrope. Une discussion analogue peut être faite pour l'angle de deux droites et pour la distance d'un point à une droite.

L'angle de deux droites est aussi défini, en se plaçant à un point de vue indiqué par Laguerre. L'angle de deux droites D, D' qui se rencontrent en O est donné par la formule

$$(D, D') = \frac{1}{2i} \log R(D'_1, D, OI, OJ),$$

$R(D'_1, D, OI, OJ)$ désignant le rapport anharmonique du faisceau de droites D', D, OI, OJ. Cette définition de l'angle va jouer un rôle important dans la suite de ce Traité.

Les notions d'angles et de longueurs étant définies dans tous les cas, l'Auteur montre qu'on peut appliquer les formules de la Trigonométrie rectiligne aux triangles ayant des sommets imaginaires. La démonstration se fait d'une façon simple, en prenant pour intermédiaire un triangle ayant un côté isotrope.

Pour l'étude de certaines courbes planes, M. Darboux a employé en 1869 un système de coordonnées qui est le suivant : Si x et y sont les coordonnées rectangulaires d'un point, il prend pour nouvelles coordonnées

$$u = x + iy, \qquad v = x - iy.$$

Il a indiqué déjà, dans son Ouvrage *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces*, les propriétés de ce système. Elles sont développées de nouveau dans ce Traité. Il introduit ainsi une notion très importante, celle de couples de points conjugués. Si A et B sont deux points quelconques du plan, on mène par A et B les droites isotropes qui passent par ces points. Les quatre droites ainsi menées forment un quadrilatère complet dont A et B sont deux sommets opposés; I et J forment un autre couple de sommets opposés; il reste un troisième couple A′B′; A′B′ est dit *conjugué à* AB. Il est clair qu'il y a réciprocité entre les couples AB, A′B′. La propriété caractéristique de ces segments associés est la suivante :

Si M *est un point quelconque du plan :*

1° *Les bissectrices des angles* AMB *et* A′MB′ *sont les mêmes;*

2° *Les produits* MA × MB *et* MA′ × MB′ *sont égaux, au signe près;*

3° *Le rapport* $\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}}$ *est égal, au signe près, à* e^{iV}, V *étant l'angle* A′MB′.

Ces théorèmes établissent une relation entre les deux propriétés suivantes du cercle : 1° le cercle est le lieu des points d'où l'on voit un segment de droite sous un angle constant; 2° le cercle est le lieu des points dont le rapport des distances à deux points fixes est constant.

Ces propriétés d'un cercle peuvent être réalisées d'une infinité de manières.

L'Auteur généralise ces propriétés en considérant les courbes qui possèdent l'une des deux propriétés suivantes :

1° La courbe est le lieu des points M tel que le produit des distances de M à n pôles fixes $A_1, A_2, \ldots, A_n$ est dans un rapport constant avec le produit des distances de M à n pôles fixes $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

2° La courbe est le lieu des points M d'où l'on voit des segments donnés sous des angles dont la somme est constante.

Viennent ensuite des propriétés de courbes analogues aux coniques. La propriété bien connue de la parabole est généralisée par le théorème suivant :

Étant donnée une courbe de $n^{\text{ième}}$ classe admettant la droite de l'infini pour tangente multiple d'ordre $n-1$, il y a une relation linéaire entre les segments interceptés par une tangente variable sur n tangentes fixes quelconques, ces segments étant comptés à partir de points fixes pris sur ces dernières tangentes.

L'Auteur étudie ensuite les courbes de $n^{\text{ième}}$ classe qui ont une tangente multiple d'ordre $n-2$.

La définition des éléments métriques dans l'espace se fait en suivant une marche analogue à celle qui a été employée pour le plan. L'étude de la distance de deux points conduit à la définition des droites isotropes et du cercle imaginaire à l'infini. Il y a toutefois un élément nouveau qui s'introduit, c'est la notion de *plan isotrope*.

Un plan isotrope est tangent au cercle imaginaire à l'infini.

La relation entre les distances de points situés dans un plan isotrope est la même que celle qui existe entre les distances de points situés sur une droite.

La Géométrie métrique sur la sphère repose sur ce fait, c'est que toute quadrique peut être représentée sur le plan d'une façon birationnelle ; il suffit pour cela d'introduire les paramètres qui définissent les génératrices de chaque système de la quadrique. Le rapport anharmonique de quatre génératrices d'un

même système est égal au rapport anharmonique des quatre points où elles coupent une section plane quelconque de la quadrique. Dans le cas de la sphère, on peut choisir les paramètres de telle sorte que tout déplacement soit équivalent à une même substitution linéaire effectuée sur ces paramètres.

La Géométrie métrique sur la sphère se présente d'une façon beaucoup plus uniforme que dans le plan parce que tous les éléments métriques peuvent s'exprimer à l'aide de rapports anharmoniques.

La théorie des segments associés dans le plan s'étend à la Géométrie sur la sphère. Prenons sur la sphère deux points A et B; adjoignons à ces points les points a et b qui leur sont diamétralement opposés; par ces quatre points passent huit génératrices de la sphère; ces huit génératrices se coupent deux à deux en douze points en dehors de ceux qui sont situés sur le cercle à l'infini. Ces douze points se partagent en deux systèmes de trois couples de deux points.

Sans insister davantage sur la répartition des points qui appartiennent à chacun des systèmes, je me borne à dire que les trois couples qui appartiennent à un même système forment ce que M. Darboux appelle des *segments associés sur la sphère*. Les propriétés de ces segments associés sont étudiées complètement. Elles ont permis à l'Auteur de démontrer que les formules de la Trigonométrie sphérique sont applicables aux triangles ayant des sommets imaginaires. Elles lui ont permis, en outre, d'étendre à la sphère des propriétés établies pour des courbes planes particulières. Il montre, en particulier, que le théorème de Lexell est sur la sphère l'analogue du théorème du segment capable d'un angle donné en Géométrie plane.

Livre III. — *Les théorèmes de Poncelet.*

Dans ce Livre, l'Auteur emploie le système de coordonnées suivantes. On se donne une conique fixe K, à chaque point de cette conique correspond un nombre, la valeur du paramètre quand la conique est mise sous forme unicursale. Soit alors M un point quelconque du plan, on prend pour coordonnées du point M les deux valeurs du paramètre des points de contact des tangentes

menées de M à la conique; soient ρ et ρ_1 les valeurs de ces paramètres.

Toute relation de forme involutive entre ρ et ρ_1 représente une droite et réciproquement.

Toute relation homographique entre ρ et ρ_1 représente une conique doublement tangente à la conique K.

Enfin une conique quelconque est représentée par une équation symétrique en ρ et ρ_1 du second degré par rapport à chacune des variables.

Ce système permet d'étudier facilement les courbes qui passent par les points de rencontre de groupes de tangentes d'une conique. A cet égard je signale le théorème suivant :

Si une courbe d'ordre $n-1$ contient tous les points d'intersection de n tangentes à une conique, elle contient aussi les points d'intersection d'une infinité d'autres systèmes de n tangentes à la conique.

Pour $n=3$, ce théorème donne un cas particulier d'un théorème de Poncelet : *S'il existe un triangle inscrit dans une conique* C *et circonscrit à une conique* K, *il en existe une infinité.*

On en déduit aussi le théorème de Poncelet pour le polygone d'un nombre quelconque de côtés. Considérons alors un polygone de n côtés inscrit dans une conique C et circonscrit à K. On pourra trouver une courbe de degré $n-1$ passant par les points de rencontre des côtés pris deux à deux et contenant la conique C. Cette courbe d'ordre $n-1$ comprend la conique C et une courbe d'ordre $n-3$. Cette dernière se décompose en $\frac{n-3}{2}$ coniques si n est impair; en $\frac{n-4}{2}$ coniques et une droite si n est pair.

L'Auteur étudie ensuite les lignes brisées inscrites dans une conique C et circonscrites à K. Si l'on déplace cette ligne brisée, on a le théorème suivant :

Lorsqu'une ligne brisée se meut en restant inscrite dans (C) *et circonscrite à* (K), *le point de rencontre de deux côtés de cette ligne dont les rangs diffèrent d'un nombre constant se*

trouvent sur une conique (C′) *qui appartient au faisceau tangentiel formé par* (C) *et* (K).

Poncelet a donné un théorème plus général; c'est le suivant :

Quand un polygone se meut en demeurant circonscrit à une conique (K) *de telle manière que tous ses sommets moins un décrivent des coniques* (K_1), (K_2), ..., (K_{n-1}) *appartenant avec* K *à un même faisceau tangentiel, le sommet resté libre décrit une conique de faisceau.*

La démonstration donnée par l'Auteur est tout à fait élégante. Il le démontre d'abord dans le cas d'un triangle. Pour cela, il fait une transformation homographique qui transforme les trois coniques du faisceau tangentiel en coniques homofocales. Il ne reste plus qu'à invoquer les propriétés élémentaires des coniques homofocales pour arriver au résultat. Le théorème étant établi dans le cas d'un triangle, on passe facilement au cas général.

Il est clair que ce théorème peut être transformé par polaires réciproques. On obtient ainsi, en particulier, des polygones inscrits dans un cercle (C) et dont les côtés enveloppent des cercles faisant partie avec C d'un même faisceau ponctuel.

Ce Livre se termine par l'étude du polygone, d'un nombre de côtés donné, inscrit à une ellipse et ayant un périmètre maximum. Les côtés de ce polygone doivent être tangents à une ellipse homofocale à la première.

Livre IV. — *La Géométrie cayleyenne.*

Dans cette géométrie on prend comme base une quadrique fixe, qu'on appelle la *quadrique fondamentale* ou l'*absolu*.

Si M et M′ sont deux points quelconques, A et B les points où la droite MM′ rencontre l'absolu, la distance MM′ est

$$\frac{1}{C}\operatorname{Log} R(M', M, A, B).$$

Si μ et μ' sont deux plans quelconques, α et β les plans tangents à l'absolu menés par leur droite commune, l'angle des deux plans

est

$$\frac{1}{C'}\operatorname{Log} R(\mu', \mu, \alpha, \beta).$$

Enfin, si d et d' sont deux droites qui se coupent, a et b les tangentes menées par leur point commun à la conique, intersection du plan des deux droites avec l'absolu, l'angle formé par ces deux droites est

$$\frac{1}{C'}(\operatorname{Log} R(d', d, a, b),$$

C et C′ étant des constantes fixées une fois pour toutes.

La distance de deux points est infinie si l'un d'eux est situé sur l'absolu; elle sera nulle si la droite qui joint les deux points est tangente à l'absolu; enfin, elle sera indéterminée si l'un des deux points est sur l'absolu et l'autre sur une tangente en ce point à la quadrique fondamentale. On discute de même l'angle de deux plans ou l'angle de deux droites.

Une droite est perpendiculaire à un plan quand elle passe par le pôle du plan. Il en résulte que deux plans distincts ont une perpendiculaire commune, la droite, qui joint leurs pôles.

Deux droites d et d_1 qui ne se coupent pas ont en général deux perpendiculaires communes : ce sont les droites qui rencontrent d et d_1 et leurs polaires réciproques δ et δ_1 par rapport à l'absolu. Ce résultat montre tout de suite dans quels cas deux droites ont une infinité de perpendiculaires communes.

Si l'on se place au point de vue réel et si l'on veut conserver les propriétés fondamentales de notre espace ordinaire (réalité de la distance de deux points réels voisins, de l'angle de deux droites réelles qui se coupent, etc.), on ne peut faire que deux hypothèses sur le choix de l'absolu : 1° l'absolu est une quadrique imaginaire, la géométrie s'étend à tous les points de l'espace : c'est la Géométrie de Riemann; 2° l'absolu est une quadrique convexe, la géométrie est applicable à tous les points situés à l'intérieur de la quadrique, points qui forment ce qu'on appelle l'*espace accessible;* cette géométrie est la *Géométrie non euclidienne*.

L'Auteur étudie ensuite les déplacements cayleyens, c'est-à-dire les déformations continues qui conservent les propriétés métriques. De telles transformations doivent conserver l'absolu. On

est donc amené à chercher les transformations homographiques qui transforment une quadrique en elle-même. On arrive au résultat suivant :

Pour obtenir toutes les transformations homographiques continues de l'absolu en lui-même, il faut soumettre les paramètres des deux familles de génératrices rectilignes à deux substitutions linéaires quelconques.

On voit alors qu'en dehors de la transformation identique deux cas peuvent se présenter : 1° l'un des systèmes de génératrices reste fixe; 2° aucun des systèmes de génératrices ne reste fixe.

Dans le premier cas, deux génératrices du second système restent fixes. Ce déplacement ne peut être réel que si l'absolu est une quadrique imaginaire; les deux génératrices du second système qui restent fixes étant imaginaires conjuguées. Ce déplacement est caractérisé de la façon suivante :

La droite qui joint un point à sa nouvelle position a une longueur constante et rencontre deux génératrices imaginaires conjuguées fixes de l'absolu.

Dans le deuxième cas il existe deux droites D et Δ polaires réciproques l'une par rapport à l'absolu, qui glissent sur elles-mêmes, et ces droites sont réelles si le déplacement est réel. Ce sont les *axes du déplacement*. La grandeur du glissement sur les droites D et Δ n'est pas forcément la même. Cette propriété suffit pour définir le déplacement puisqu'elle permet de construire l'homologue d'un point quelconque de la première figure.

Dans le cas où les glissements sur D et Δ sont tous deux nuls, on a un déplacement très simple appelé *retournement*. Il est défini par la construction suivante :

A chaque point P *on fait correspondre le point* P′ *situé sur la droite issue de* P, *rencontrant* D *et* Δ, *et conjugué harmonique de* P *par rapport aux deux points de rencontre avec* D *et* Δ.

On voit que cette opération répétée deux fois reproduit la figure primitive. On a un déplacement qui est l'analogue d'une symétrie dans la Géométrie ordinaire.

Ce Livre se termine par l'étude de la Trigonométrie cayleyenne. Dans le plan, entre les angles et les côtés d'un triangle, il y a trois relations ; ces relations sont les mêmes que dans les triangles sphériques de la Géométrie ordinaire, le rayon de la sphère étant réel dans le cas de la Géométrie non euclidienne : une imaginaire pure dans le cas de la Géométrie de Riemann. Il en résulte que dans le premier cas la somme des angles d'un triangle plan est plus grande que deux droits, qu'elle est plus petite dans le second cas.

Au contraire, les relations entre les six éléments d'un trièdre sont les mêmes que dans la Géométrie ordinaire.

Livre V. — *De l'inversion.*

L'inversion est un cas particulier de l'inversion *quadrique* de Hirst. On prend comme base une quadrique et un point fixe O ; soit M un point quelconque, la droite OM coupe la quadrique en deux points A et B. On fait correspondre au point M son conjugué harmonique M' par rapport à AB. Si la quadrique est une sphère et si le point O est placé au centre, on obtient la transformation par inversion. La sphère est appelée la *sphère principale* de l'inversion.

Au pôle O correspondent tous les points à l'infini. A un point a situé sur une droite isotrope Oa correspond un point a' situé sur le cercle de l'infini; mais à ce point a' correspondent tous les points de la droite Oa'.

A une droite isotrope correspondent deux droites isotropes dont l'une passe par le pôle. A un plan isotrope correspond un cône isotrope. A une développable isotrope correspond une développable isotrope.

On sait qu'on appelle *focales* d'une surface les lignes doubles de la développable isotrope circonscrite à la surface et au cercle de l'infini. L'inversion, conservant les développables isotropes, conservera les focales.

L'Auteur étudie la composition des inversions. Il arrive au résultat suivant :

Une suite quelconque d'inversions peut se ramener à une

homothétie, précédée ou suivie d'un déplacement, ou bien à une inversion, précédée ou suivie d'un déplacement.

A l'inversion correspond un système de coordonnées que l'Auteur a appelées *pentasphériques*. On prend comme base cinq sphères S_k orthogonales deux à deux, soit R_k le rayon de S_k. Si M est un point quelconque, S_k la puissance de M par rapport à S_k, les coordonnées pentasphériques sont

$$x_k = \lambda \frac{S_k}{R_k},$$

λ étant un facteur de proportionnalité; la somme des carrés des cinq coordonnées d'un point est nulle.

Une substitution orthogonale effectuée sur les cinq coordonnées d'un point M peut s'interpréter de deux manières : 1° les nouvelles valeurs des coordonnées sont les coordonnées du point M quand on change les sphères fondamentales S_k; 2° elles représentent par rapport au même système S_k les coordonnées du point M′ déduit de M par une inversion.

Les coordonnées de tous les points à l'infini, sauf ceux qui sont situés sur le cercle imaginaire à l'infini, sont les mêmes. Au contraire, les coordonnées d'un point situé sur ce cercle sont indéterminées. Ces propriétés sont en corrélation avec les propriétés de l'inversion.

L'Auteur définit ensuite les coordonnées d'une sphère. Il applique ces coordonnées à la solution du problème élémentaire suivant :

Trouver une sphère coupant quatre sphères données sous des angles donnés.

L'Ouvrage se termine par une étude sur les cyclides, surfaces découvertes par l'Auteur, et sur lesquelles il a fait de si belles recherches. Les cyclides générales ont pour équation, en coordonnées rectangulaires,

$$\varphi_0(x^2+y^2+z^2)^2+2\varphi_1(x^2+y^2+z^2)+\varphi_2=0,$$

φ_0, φ_1, φ_2 désignant des fonctions de x, y, z de degré égal à leur indice. Ces surfaces ont été appelées *cyclides* parce qu'elles con-

tiennent comme cas très particulier la cyclide de Dupin, qui a toutes ses lignes de courbure circulaires.

Si φ_0 n'est pas nul, la surface est du quatrième degré; elle admet le cercle imaginaire comme ligne double. Toute surface du quatrième ordre qui a une conique double peut se transformer en une cyclide par une homographie. Si φ_0 est nul, la surface est du troisième degré ; elle contient le cercle imaginaire à l'infini. Toute surface du troisième degré peut, par une homographie, se transformer en cette cyclide particulière. Il suffit de remarquer que toute surface du troisième degré contient vingt-sept séries de coniques.

Une cyclide qui admet un point double à distance finie est l'inverse d'une quadrique ou la podaire d'une autre quadrique.

L'intersection d'une cyclide avec une sphère est située sur une quadrique. C'est une *biquadratique*. Si cette biquadratique a deux points doubles non situés sur une droite isotrope, elle se décompose en deux cercles. Réciproquement, toute sphère qui contient un cercle de la cyclide la coupe suivant un second cercle. On obtient donc les sections circulaires d'une cyclide en cherchant les sphères qui la coupent suivant deux cercles. On trouve cinq séries de sphères possédant cette propriété.

Les sphères d'une série sont orthogonales à une sphère fixe; le lieu de leur centre est une quadrique.

On reconnaît les surfaces *anallagmatiques* de Moutard. Ce sont des surfaces enveloppées par des sphères orthogonales à une sphère fixe appelée *sphère directrice;* le lieu des centres des sphères est la *déférente*. Les anallagmatiques se conservent dans une inversion qui a pour sphère principale la sphère directrice.

Pour les cyclides, on a le résultat suivant :

La cyclide peut, de cinq manières différentes, être considérée comme l'enveloppe d'une sphère dont le centre décrit une quadrique (Q_k) *et qui reste orthogonale à une sphère* (S_k). *La sphère variable touche la cyclide en deux points et la coupe suivant deux cercles. Les axes de ces cercles sont des génératrices de* Q_k. *Les sphères* S_k *sont deux à deux orthogonales; les quadriques* Q_k *sont homofocales. Le tétraèdre conjugué commun à* S_k *et à* Q_k *est formé par les centres des sphères directrices autres que* S_k.

En coordonnées pentasphériques, l'équation d'une cyclide est homogène et du second degré. On peut toujours, sauf dans le cas où la cyclide est l'inverse d'une quadrique, ramener cette équation à une forme où il n'y a plus de termes rectangles. Les sphères principales S_k de la cyclide sont aussi mises en évidence et l'on peut ainsi étudier très simplement les diverses propriétés de la surface.

En coordonnées pentasphériques, l'équation

$$\sum \frac{x_i^2}{x_i - \lambda} = 0$$

représente une famille de cyclides; cette équation, à cause de la relation identique qui existe entre les coordonnées, est du troisième degré. Par un point quelconque de l'espace passent trois de ces surfaces. L'Auteur montre que ces trois surfaces sont orthogonales. On obtient ainsi un système triple formé de cyclides qui généralise le système formé par des quadriques homofocales.

Le dernier Chapitre de l'Ouvrage est consacré à l'étude d'une transformation qui a été indiquée par l'Auteur en 1865. Dans cette transformation on prend pour base une sphère (S); soient M un point de l'espace, (C) le cercle suivant lequel la sphère (S) est coupée par le plan polaire de M; on fait correspondre au point M les deux pôles m et m' du cercle (C). A un point M du premier espace correspondent deux points m et m' du second; à un point m du second ne correspond qu'un seul point M du premier. Les coordonnées de M sont des fonctions rationnelles des coordonnées de m, mais l'inverse n'est pas vrai. La transformation n'est pas *birationnelle*. Si on la fait précéder d'une homographie, on obtient la transformation ponctuelle la plus générale qui à tout plan fait correspondre une sphère.

A une quadrique ne passant pas par le centre de S correspond une cyclide du quatrième ordre; si la quadrique passe par le centre de S, son homologue est une cyclide du troisième ordre.

Enfin elle fait correspondre à l'angle cayleyen de deux courbes du premier espace, évalué en prenant S comme absolu, un angle euclidien égal des courbes qui leur correspondent dans le second espace.

On voit tout l'intérêt que présente cet Ouvrage. Le meilleur éloge que je puisse en faire c'est de dire que cette dernière œuvre du maître est digne d'être placée au même rang que ses remarquables Traités de Géométrie infinitésimale.

C. GUICHARD.

MÉLANGES.

SUR QUELQUES FORMULES DE L'INTERPOLATION GÉNÉRALISÉE

PAR M. NICOLAS KRYLOFF,
Professeur à l'École supérieure des Mines de Petrograd.

Les recherches concernant la convergence des formules de l'interpolation trigonométrique peuvent être basées sur l'étude préalable des quelques sommes qui, par l'analogie avec les intégrales *singulières* de la théorie des séries trigonométriques, peuvent être aussi nommées les sommes *singulières;* il semble naturel d'essayer d'étendre l'analogie en considérant les sommes, correspondant aux intégrales singulières, rencontrées dans les diverses méthodes de la *sommation* des séries trigonométriques.

Les sommes pareilles, rencontrées premièrement dans les recherches (¹) de M. Jackson, correspondent à la notion de l'interpolation *généralisée* en ce sens que les formules ainsi construites se déterminent en effet par un nombre fini de valeurs $f(x_i)$ de la fonction $f(x)$, qu'il s'agit de représenter, quoique la formule elle-même puisse être de degré supérieur (²) à celui de la somme singulière bien connue (formule d'interpolation analogue à l'intégrale de Dirichlet)

$$S_n[f(x)] = \frac{1}{2n+1}\sum f(x_i)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-x_i)}{\sin\frac{1}{2}(x-x_i)};$$

(¹) *Transactions of the American math. Society*, 1915.

(²) Comme cela a lieu dans la formule donnée par M. Jackson.

la propriété interpolatoire de la somme ci-dessus écrite

$$S_n[f(x_i)] = f(x_i)$$

peut aussi manquer à la formule d'interpolation généralisée.

I. L'objet de cet article sera premièrement l'étude d'une formule de l'interpolation généralisée, analogue à l'intégrale singulière de M. de la Vallée Poussin, rencontrée dans sa méthode de la sommation des séries trigonométriques

$$(1) \qquad V_m(x) = h_m \sum_1^{2m} f(x_i) \left[\cos\left(\frac{x - x_i}{2}\right)\right]^{2m},$$

où

$$(2) \qquad \frac{1}{h_m} = \sum_1^{2m} \left[\cos\frac{x - x_i}{2}\right]^{2m},$$

$$x_{i+1} - x_i = \frac{\pi}{m} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, 2m - 1).$$

Lemme. — *h_m dépend seulement de m* (pas de x).

En effet,

$$(3) \quad \cos^{2m}\left(\frac{x - x_i}{2}\right) = l_m \left[\frac{1}{2} + \frac{m}{m+1}\cos(x - x_i) + \frac{m(m-1)}{(m+1)(m+2)}\cos 2(x - x_i) + \ldots\right]$$

$$l_m = \frac{2(2m!)}{2^{2m}[m!]^2},$$

donc

$$(3') \quad \frac{1}{h_m} = \sum_1^{2m} \alpha_{m,0} + \alpha_{m,1}\cos(x - x_i) + \ldots + \alpha_{m,m}\cos m(x - x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{2m} \sum_{k=0}^{m} \alpha_{m,k}(\cos kx_i \cos kx + \sin kx_i \sin kx);$$

or les points x_i se trouvent à égale distance l'un de l'autre et k, étant $\leqq m$, n'est pas divisible par $2m$; par conséquent

$$\sum_{i=1}^{2m} \cos kx_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{2m} \sin kx_i = 0;$$

donc $\frac{1}{h_m}$ ne dépend que de m. C. Q. F. D.

THÉORÈME. — *Pour toute fonction continue $f(x)$*

$$\lim_{m=\infty} V_m(x) = f(x),$$

la convergence ayant lieu uniformément.

En effet, la fonction $f(x)$ étant continue, pour tout ε arbitrairement petit, il existe un nombre positif δ, tel que

$$|f(x'') - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |x'' - x'| < \delta;$$

soit x une valeur particulière, alors en divisant la somme de la partie droite de la formule

$$(4) \qquad V_m(x) - f(x) = \sum_1^{2m} h_m [f(x_i) - f(x)] \left[\cos\frac{x - x_i}{2}\right]^{2m}$$

en deux parties : $\sum_{(1)}$, où $|x_i - x| < \delta$ et $\sum_{(2)}$, où $|x_i - x| > \delta$, on obtient pour la première l'inégalité évidente

$$(5) \quad \sum_{(1)} < \frac{\varepsilon h_m}{2} \sum_{(1)} \left[\cos\frac{x - x_i}{2}\right]^{2m} < \frac{\varepsilon h_m}{2} \sum_1^{2m} \left[\cos\frac{x - x_i}{2}\right]^{2m} < \varepsilon,$$

pour la somme restante $\sum_{(2)}$

$$\cos\frac{x - x_i}{2} < \cos\frac{\delta}{2},$$

car ici $|x - x_i| > \delta$ et les nombres x_i peuvent être évidemment remplacés par les nombres congrus à eux suivant le module 2π, de sorte qu'aucune des différences ne soit plus grande que π; par conséquent, si M représente le maximum de $|f(x)|$, on a

$$(6) \qquad \sum_{(2)} < 2 M h_m 2m . \cos^{2m}\frac{\delta}{2};$$

des formules (3) et (3') on obtient immédiatement

$$\frac{1}{h_m} = 2m . \alpha_{m,0} = 2m \frac{l_m}{2},$$

d'où en utilisant l'expression asymptotique de I_m, égale à $\frac{2}{\sqrt{\pi m}}$ en vertu de la formule de Stirling, on aura l'égalité asymptotique suivante :

$$\frac{1}{h_m} = c\sqrt{m}.$$

où c est une certaine constante, de sorte que la partie droite de la formule (6) peut être représentée asymptotiquement sous la forme

$$c_1\sqrt{m}\cos^{2m}\frac{\delta}{2} \quad (c_1 = \text{const.}),$$

c'est-à-dire peut être rendue $< \frac{\varepsilon}{2}$ pour une valeur déterminée de δ, pourvu que m soit assez grand; en prenant donc δ assez petit, pour que $\sum\limits_{(1)} < \frac{\varepsilon}{2}$, on prend ensuite m assez grand pour que $\sum\limits_{(2)} < \frac{\varepsilon}{2}$, d'où l'on tire que

$$|V_m(x) - f(x)| < \varepsilon. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

2. Il semble à présent tout naturel de poser la question à propos du degré d'approximation de la formule (4) dans le cas où $f(x)$ vérifie certaines conditions restrictives, par exemple, la condition bien connue de Lipschitz.

En posant dans la formule (4)

$$\frac{x_i - x}{2} = u_i,$$

on aura évidemment

$$|V_m(x) - f(x)|$$
$$= \left|\sum_1^{2m} h_m[f(x+2u_i) - f(x)]\cos^{2m} u_i\right| \leq 2\lambda h_m \sum_1^{2m} |u_i| \cos^{2m} u_i.$$

où λ représente le coefficient de la condition de Lipschitz, de sorte que

$$|f(x'') - f(x')| \leq \lambda |x'' - x'|.$$

Disposons à présent les $|u_i|$ dans l'ordre de leur grandeur; soient v_0 la plus petite de ces quantités, v_1 la suivante, etc.; en vertu de la périodicité de $f(x)$, on peut évidemment toujours supposer que

tous les u_i se trouvent dans l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ et que, par conséquent,

$$\frac{i\pi}{4m} < v_i < \frac{(i+1)\pi}{4m},$$

puisque toutes les valeurs de v_i sont enfermées dans l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, où, remarquons-le en passant,

$$\cos^{2n} u < e^{-nu^2};$$

par conséquent,

$$\begin{aligned}
&2\lambda h_m \sum_{1}^{2m} |u_i| \cos^{2m} u_i \\
&= 2\lambda h_m \frac{4m}{\pi} \sum_{1}^{2m} |u_i| \cos^{2m} u_i \frac{\pi}{4m} \\
&< \frac{2\lambda h_m 4m}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u \cos^{2m} u \, du < k\sqrt{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u e^{-mu^2} du,
\end{aligned}$$

où $k = \text{const.}$; par le changement des variables on obtient

$$|V_m(x) - f(x)| < \frac{k\sqrt{m}}{m} \int_0^{\sqrt{m}\frac{\pi}{2}} v e^{-v^2} dv < \frac{k}{\sqrt{m}} \cdot \int_0^{\infty} v e^{-v^2} dv,$$

c'est-à-dire que l'ordre cherché de l'approximation sera $\frac{1}{\sqrt{m}}$ et, quoique le résultat obtenu soit moins exact que celui de M. Jackson, néanmoins il présente, il semble, un intérêt, car vu l'importance de la méthode de sommation de M. de la Vallée Poussin, il est nécessaire de considérer la formule d'interpolation généralisée, correspondant à l'intégrale singulière de M. de la Vallée Poussin.

3. La question ci-dessus traitée, à propos de l'ordre d'approximation, peut être évidemment posée à propos des autres formules d'interpolation généralisée; ainsi considérons avant tout la formule suivante :

$$\sigma_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \frac{\sin^2 \frac{n}{2}(x - x_i)}{n^2 \sin^2 \frac{(x - x_i)}{2}},$$

généralisant l'intégrale bien connue de M. Fejér dans la théorie de sommation des séries trigonométriques par les moyens arithmétiques.

Cette formule, donnée par M. Jackson ([1]), converge pour toute fonction continue pour $\lim n = \infty$, et représente évidemment la somme trigonométrique de l'ordre $(n-1)$, vérifiant les conditions interpolatoires

$$\tau_n(x_j) = f(x_j) \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

étant par conséquent dans un certain sens la formule d'interpolation généralisée ([2]).

En partant de la relation bien connue, et du reste presque évidente,

$$1 = \sum_1 \frac{\sin^2 \frac{n}{2}(x - x_i)}{n^2 \sin^2 \frac{(x - x_i)}{2}}$$

déjà utilisée par M. Jackson dans ses recherches ci-dessus mentionnées, on obtient

$$\tau_n(x) - f(x) = \frac{1}{n^2} \sum_1^n [f(x_i) - f(x)] \left[\frac{\sin \frac{n}{2}(x - x_i)}{\sin \frac{(x - x_i)}{2}} \right]^2,$$

d'où, en posant

$$x_i - x = 2u_i,$$

on a

$$|\tau_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{n^2} \sum_1^n [f(x + 2u_i) - f(x)] \frac{\sin^2 nu_i}{\sin^2 u_i} \right| \leq 2\lambda \sum_1^n |u_i| \frac{\sin^2 nu_i}{n^2 \sin^2 u_i}.$$

En représentant par $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, \ldots$ les quantités $|u_i|$ disposées dans l'ordre de leurs grandeurs, on remarque, comme auparavant, que

$$(\alpha) \qquad \frac{i\pi}{2n} \leq v_i \leq \frac{(i+1)\pi}{2n} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1);$$

([1]) *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1913.

([2]) Plus tard, M. S. Bernstein a démontré (*Bull. de la Soc. math. de Kharkoff*), que cette formule serait une véritable formule interpolatoire, si l'on introduisait les conditions complémentaires $\tau'_n(x_j) = 0$.

par conséquent,

$$\left[\frac{\sin n v_k}{n \sin v_k}\right]^2 = \left[\frac{\sin n v_k}{n v_k}\,\frac{v_k}{\sin v_k}\right]^2 \leqq 1 \qquad (k = 0, 1),$$

car $\frac{\sin v}{v}$ décroît dans l'intervalle $(0, \pi)$; pour $k \geqq 2$ il suffit de se rappeler la relation évidente

$$\sin v \geqq \frac{2v}{\pi},$$

ayant lieu dans l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, d'où

$$n \sin v_k \geqq n \sin\frac{k\pi}{2n} \geqq k,$$

par conséquent,

$$\left[\frac{\sin n v_k}{n \sin v_k}\right]^2 \leqq \frac{1}{k^2},$$

donc

$$\sum_{0}^{n-1} v_i \left[\frac{\sin n v_i}{n \sin v_i}\right]^2 \leqq v_0 + v_1 + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{v_i}{i^2},$$

où

$$v_0 + v_1 \leqq \frac{3\pi}{2n};$$

$$\sum_{i=2}^{n-1} v_i \frac{1}{i^2} \leqq \sum_{i=2}^{n-1} \frac{(i+1)\pi}{2n}\,\frac{1}{i^2}$$
$$= \frac{\pi}{2n}\left[\sum \frac{1}{i^2} + \sum \frac{1}{i}\right] < \frac{\pi}{2n}\left[\int_2^{\infty} \frac{du}{u^2} + \int_2^{n} \frac{du}{u}\right],$$

d'où il suit immédiatement que la différence en question $[\tau_n(x) - f(x)]$ sera de l'ordre de $\frac{\log n}{n}$.

4. Quand la fonction périodique $f(x)$ vérifie la condition de Lipschitz sur l'intervalle δ au milieu de laquelle se trouve le point considéré x, on n'a qu'à représenter la différence $[\tau_n(x) - f(x)]$ sous la forme

$$\sum_{1}^{n} [f(x + 2u_i) - f(x)]\,\frac{\sin^2 n u_i}{n^2 \sin^2 u_i}$$
$$= \sum_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} [f(x + 2u_i) - f(x)]\,\frac{\sin^2 n u_i}{n^2 \sin^2 u_i} = \sum_{(1)} + \sum_{(2)},$$

où, pour la somme $\sum\limits_{(1)}$,

$$|2u_i| < \frac{\delta}{2}$$

et, par conséquent, en vertu de la condition de Lipschitz,

$$\sum_{(1)} \leq 2\lambda \sum_{(1)} |u_i| \frac{\sin^2 nu_i}{n^2 \sin^2 u_i} < 2\lambda \sum_{0}^{\frac{\pi}{2}} v_i \frac{\sin^2 nv_i}{n^2 \sin^2 v_i};$$

donc, d'après le résultat du paragraphe précédent,

$$\sum_{1} < \frac{\lambda \mathrm{A} \log n}{n},$$

où A = const. et λ = le coefficient de la condition de Lipschitz; pour la somme $\sum\limits_{(2)}$ on a

$$\sum_{(2)} \leq \omega \sum_{(2)} \frac{\sin^2 nu_i}{n \sin^2 u_i},$$

où par ω on a représenté l'oscillation de la fonction dans tout intervalle.

En passant aux quantités v_i, on se trouve dans l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, où, comme il est connu,

$$\sin u \geq \frac{2u}{\pi};$$

en utilisant par conséquent l'inégalité (α), on a

$$\sum_{(2)} < \omega \sum_{(2)} \frac{\sin^2 nv_i}{n^2 \sin^2 v_i} < \omega \sum \frac{\sin^2 nv_i}{n^2\, 4 v_i^2} \pi^2$$
$$\leq \omega \sum_{(2)} \frac{\sin^2 nv_i}{i^2} < \omega \sum_{(2)} \frac{1}{i^2} < \omega \int_0^\infty \frac{dx}{x^2},$$

et la limite inférieure de l'intégrale se déduit de la relation

$$2v_i = \frac{i\pi}{n} = \frac{\delta}{2},$$

d'où

$$i = \frac{n\delta}{2\pi};$$

par conséquent,

$$\sum_{(2)} < \frac{2\pi\omega}{n\delta};$$

donc

$$|\tau_n(x) - f(x)| < \frac{\lambda A \log n}{n} + \frac{2\omega\pi}{n\delta},$$

ce que donne l'ordre cherché de l'approximation.

Le même raisonnement, appliqué à la formule de M. Jackson [1], donne

$$\tau_n(x) - f(x) = H_m \sum_{1}^{2m-1} [f(x+2u_i) - f(x)] \frac{\sin^4 m u_i}{m^4 \sin^4 u_i} = H_m \left[\sum_{(1)} + \sum_{(2)} \right],$$

où la première somme s'étend à toutes les valeurs de l'indice i, telles que

$$|2u_i| < \frac{\delta}{2};$$

donc, pour $f(x)$ vérifiant la même condition que dans le cas précédent, on a

$$\sum_{(1)} \le H_m 2\lambda \sum_{(1)} |u_i| \left[\frac{\sin m u_i}{m \sin u_i} \right]^4 < H_m 2\lambda \sum_{0}^{\frac{\pi}{2}} v_i \frac{\sin^4 m v_i}{m^4 \sin^4 v_i},$$

où

$$(\beta) \qquad \frac{i\pi}{4m} \le v_i \le \frac{(i+1)\pi}{4m};$$

or, d'après les recherches de Jackson, on a

$$\sum_{(1)} < \frac{23\pi\lambda}{3m}$$

et pour la seconde somme on aura, d'une manière analogue à celle du cas précédent,

$$\sum_{(2)} \le H_m \omega \sum_{(2)} \frac{\sin^4 m u_i}{m^4 \sin^4 u_i},$$

où comme auparavant ω représente l'oscillation de la fonction sur tout l'intervalle.

---

(1) *Ibid.*, p. 456.

En passant aux quantités v_i, on sera dans l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; en utilisant (3) et l'inégalité $H_m < \frac{3}{4}$, établie par M. Jackson, on aura

$$\sum_{(2)} < H_m \omega \sum_{(2)} \left[\frac{\sin^4 m v_i}{m^4 \sin^4 v_i}\right]$$

$$< \frac{3\omega}{4} \sum_{(2)} \frac{\sin^4 m v_i}{m^4 v_i^4} \frac{\pi^4}{16} < 12\,\omega \sum_{(2)} \frac{\sin^4 m v_i}{i^4} < 12\,\omega \sum_{(2)} \frac{1}{i^4} < 12\,\omega \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4},$$

où la limite inférieure se déduit de la relation

$$v_i = \frac{i\pi}{2m} = \frac{\delta}{2},$$

d'où

$$i = \frac{m\delta}{\pi};$$

par conséquent

$$\sum_{(2)} < \frac{4\,\omega\,\pi^3}{m^3\,\delta^3};$$

donc

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \frac{23\,\pi\lambda}{3m} + \frac{4\,\omega\,\pi^3}{m^3\,\delta^3},$$

ce que donne l'ordre cherché de l'approximation.

Il va sans dire que ces raisonnements peuvent être étendus pour la formule d'interpolation généralisée, étudiée aux paragraphes 1 et 2.

5. L'étude détaillée des diverses formules de l'interpolation généralisée présente un intérêt tout particulier déjà seulement par son rapport à la question de la représentation approchée des fonctions, et permet par conséquent inversement de traiter la question de la convergence des formules interpolatoires elles-mêmes.

En effet, soit $\sum_{(m)} [f(x)]$ une formule d'interpolation généralisée avec le reste $|R_m(x)| < \varepsilon$, de sorte que

$$f(x) = \sum_{(\xi)} [f(x)] + R_m,$$

en représentant alors par $S_n[f(x)]$ la formule ordinaire de

l'interpolation trigonométrique

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{1}^{2n+1} f(x_i)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-x_i)}{\sin\frac{1}{2}(x-x_i)},$$

dont la convergence pour $\lim n = \infty$ est à démontrer, on aura évidemment

$$(\gamma)\quad |f(x)-S_n[f(x)]| = \left|\sum_m[f(x)]+R_m-S_n\left\{\sum_m[f(x)]\right\}-S_n[R_m(x)]\right|,$$

en remarquant que $\sum_m[f(x)]$ est une somme trigonométrique d'ordre m (dans les formules d'interpolation généralisée, étudiées aux paragraphes précédents) où $2m-2$ (dans la formule de M. Jackson, § 4), on s'assure, en prenant dans le premier cas $n=m$ et dans le second $n=2m-2$, que

$$(\varepsilon)\quad \sum_m[f(x)] = S_n\left[\sum_m[f(x)]\right],$$

d'après l'unicité de la somme trigonométrique d'ordre n, prenant les valeurs déterminées aux $(2n+1)$ points x_i, où

$$x_{i+1}-x_i = \frac{2\pi}{2n+1}\qquad (i=1, 2, \ldots, 2n).$$

De la relation (γ) on tire, en utilisant l'inégalité pour $R_m(x)$, que le reste de la formule d'interpolation en question sera moindre que

$$\varepsilon(1+5\log n).$$

car, d'après les recherches de M. Jackson [1],

$$(\delta)\quad \frac{1}{2n+1}\sum_{1}^{2n+1}\left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-x_i)}{\sin\frac{1}{2}(x-x_i)}\right| < 5\log n\qquad (n>2).$$

---

[1] Dans un travail sur la convergence des quadratures trigonométriques, qui est en train de paraître, nous avons démontré qu'en utilisant une telle formule (par exemple celle de M. Jackson du paragraphe 3) où ε est de l'ordre $\frac{1}{n}$, on peut se passer de (δ) en employant seulement l'inégalité de Cauchy.

En employant les mêmes raisonnements et en dénotant seulement par $S_n[f(x)]$ la somme des n premiers termes de la série de Fourier de la fonction $f(x)$, on aura évidemment satisfait la relation (γ_1) et, par conséquent le module du reste de la série de Fourier sera moindre que

$$\varepsilon(1 + A \log n),$$

où $A = \text{const.}$ puisque, comme il est bien connu et du reste facile à démontrer, l'expression

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-y)\right|}{\left|\sin\frac{1}{2}(x-y)\right|}\,dx$$

sera de l'ordre $\log n$; de cette façon (au point de vue didactique ceci présente des avantages), non seulement on peut démontrer la convergence de la série de Fourier pour les fonctions soumises à certaines conditions restrictives (par exemple la condition de Lipschitz), mais aussi obtenir l'ordre de la petitesse du reste.

Pour conclure, remarquons que les formules d'interpolation généralisée ne se bornent pas évidemment au cas de l'interpolation trigonométrique et peuvent aussi avoir lieu dans le cas de l'interpolation parabolique; c'est ce que nous nous proposons d'indiquer ultérieurement.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

OCAGNE (Maurice d'). — *Cours de Géométrie pure et appliquée de l'École polytechnique.* Transformations géométriques. Perspective. Géométrie infinitésimale. Géométrie réglée. Géométrie cinématique. 1 vol. in-8 (25-16), XII-375 pages avec 135 figures. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1917. Prix : 16fr.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

JOUKOWSKI (N.). — Aérodynamique. *Cours professé à l'Ecole impériale technique de Moscou.* Traduit du russe par S. Drzewiecki. 1 vol. gr. in-8, XVIII-230 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1916.

En ces temps où l'Aérotechnique pratique a su réaliser des progrès si rapides et si profonds, il est tout à fait intéressant de signaler l'apparition d'un Ouvrage destiné à donner des bases véritablement scientifiques à la théorie aérodynamique, dont à vrai dire les éléments, même fondamentaux, étaient naguère à peu près inexistants, ou remplacés par un empirisme à peine appuyé sur l'expérience. Si, du point de vue expérimental, l'aviation a profité récemment des travaux importants effectués dans les laboratoires spéciaux, tels que les Instituts aérotechniques de Saint-Cyr ou de Koutchino, il n'existait guère encore de travail d'ensemble présentant au public scientifique les bases mathématiques de la théorie, groupant et généralisant les faits déjà connus, déterminant par des méthodes de calcul appropriées les applications possibles des lois établies, rendant ainsi abordable l'amélioration des résultats de la pratique par des moyens que suggérera le calcul même.

C'est ce but que s'est proposé M. N. Joukowski en écrivant ce volume d'Aérodynamique que la librairie Gauthier-Villars vient de présenter au public français, dans une traduction fort claire de M. S. Drzewiecki, lequel a illustré l'Ouvrage d'une très attachante préface. L'auteur et le traducteur sont bien connus des chercheurs français : les travaux hydrodynamiques de M. Joukowski ont depuis longtemps mis en évidence le savant professeur de Mécanique rationnelle de l'Université de Moscou, récemment appelé à la chaire d'Aérodynamique de l'Ecole technique de Moscou. Et l'on connaît les belles études dues à M. S. Drzewiecki sur la théorie des hélices.

Le livre actuel est la reproduction, à peu de chose près, du cours professé à l'Institut technique de Moscou. La première partie est destinée à initier le lecteur aux principaux résultats de l'Hydrodynamique. Dans la plupart des conditions d'expériences usuelles, l'air peut en effet être considéré à peu près comme un

fluide incompressible, et les équations générales à écrire sont les mêmes pour l'air que pour l'eau. Après l'établissement des équations générales, nous trouvons la démonstration des théorèmes qui jouent dans cette théorie le rôle des théorèmes concernant les quantités de mouvement, et du théorème des forces vives, quand on les applique à un filet fluide (théorèmes d'Euler et de Bernoulli). Puis vient le théorème, beaucoup moins précis, de Borda, provenant du transport d'un théorème de Carnot, dans le cas d'un mouvement de choc de fluides.

Ces préliminaires établis, l'auteur étudie les anciennes explications données de la résistance qu'éprouve un solide à son mouvement (en régime uniforme) dans un fluide. Après les théories de Saint-Venant et de Poncelet, basées sur le théorème de Carnot, nous trouvons un exposé des expériences et des résultats de Dubuat et Duchemin. Il nous faut ici signaler un remarquable paragraphe qui élucide d'une manière définitive le fameux paradoxe de Dubuat. On sait en quoi consiste ce paradoxe : la résistance éprouvée par un solide immergé dans un courant fluide est supérieure, d'après des expériences maintes fois répétées, à la résistance qu'éprouverait le même solide qui se déplacerait, avec la même vitesse relative, dans le même fluide supposé au repos; le rapport des deux résistances, pour le cas d'une plaque plane, est environ 1,3. Ce fait d'expérience, qui a fait couler tant d'encre, s'explique par la nécessité d'enfermer le fluide dans des limites déterminées; il disparaîtrait, comme l'exige le principe du mouvement relatif, si l'on pouvait opérer avec un fluide réellement illimité dans tous les sens. Pour le cas d'un solide mobile dans le fluide au repos, le mouvement qui s'établit n'est pas tourbillonnaire, tandis que, lorsque le fluide s'écoule autour du solide immobile, le frottement du fluide contre les parois du récipient (généralement en forme de canal) qui le contient entraîne la formation de tourbillons qui se propagent dans toute la masse et changent profondément le caractère du mouvement. Cette explication, considérée jusqu'ici comme vraisemblable, a été confirmée par l'auteur au moyen d'un dispositif simple et ingénieux, qui fait apparaître ou disparaitre le paradoxe par une modification convenable des conditions d'écoulement du fluide, en permettant ou non la formation des tourbillons aux parois.

Le Chapitre suivant développe la théorie de Rankine, qui considère comme source principale de la résistance le frottement du fluide contre les parois du solide; ce frottement dépend, en chaque point de la surface, de la vitesse qu'y possède le fluide; il faut donc connaître cette vitesse. On suppose essentiellement que l'écoulement se fasse sans tourbillons, ce qui est sensiblement exact à une certaine distance du solide, et que cet écoulement ait lieu le long de la surface, sans solution de continuité, ni choc des filets fluides. Il est nécessaire pour cela que la forme de la surface soit rationnelle, c'est-à-dire telle qu'elle puisse être contournée effectivement par le fluide sans qu'il tende à se produire de cavitations ou de décollements d'avec la paroi. Par exemple si l'on envisage le mouvement déterminé par le potentiel des vitesses

$$\Phi = -V_0 x - V_0 \frac{a^3}{2r^3} \qquad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2),$$

il est bien connu que ce potentiel convient théoriquement au mouvement d'un fluide animé d'une vitesse V_0 à l'infini dans le sens des x négatifs, et contournant une sphère de rayon a. Les vitesses en deux points de la paroi, situés sur une même parallèle à Ox, sont égales en grandeur, et la pression totale exercée sur la sphère est nulle. C'est là un cas particulier du paradoxe de d'Alembert, auquel les belles études de M. U. Cisotti (*Atti Ist. Veneto*, 1903-1904, p. 423; 1905-1906, p. 1291; 1909-1910, p. 427; 1911-1912, p. 167; *Annali mat. pura applic.*, 1912, p. 83) ont récemment donné la forme la plus générale et définitive. Mais il est manifeste que le mouvement ci-dessus est pratiquement essentiellement instable; la vitesse V à la surface de la sphère est en effet comprise entre o et $\frac{3}{2} V_0$; la pression est égale à

$$p_0 + \frac{\rho}{2}(V_0^2 - V^2),$$

p_0 étant la pression à l'infini, et ρ la densité. Pour qu'il n'y ait pas tendance à cavitation, il faudrait que V ne dépasse nulle part V_0, sans quoi la pression tendrait à devenir négative, à moins qu'on n'exerce une forte surpression dans le fluide. D'où l'instabilité : les filets fluides se détachent de la paroi de la sphère avant de l'avoir contournée entièrement; en quel point précisément commence ce détachement, la question est encore controversée.

Selon les principes de Rankine, on peut trouver de bonnes formes de carènes, en vue de la construction des dirigeables ou des coques de navires, en utilisant des potentiels de la forme

$$\Phi = -V_0 x - \sum_i \frac{n_i}{r_i},$$

r_i étant la distance du point M à un point fixe A_i de l'axe des x, et les constantes n_i satisfaisant à la relation $\Sigma n_i = 0$. Parmi les lignes de courant tracées dans un plan méridien passant par Ox, il s'en trouve une qui aura deux points critiques; on peut admettre comme section du dirigeable la courbe formée par la ligne de courant qui aboutit à ces deux points critiques. On obtient aussi de bonnes formes au moyen de la fonction

$$\Phi = -V_0 x - \sum_i \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{n_i}{r_i}\right).$$

On admet que, pour des formes telles que les filets fluides ne décollent pas, la résistance à l'avancement est due au frottement, et qu'elle est égale, pour chaque élément de surface, à un certain coefficient spécifique de frottement, multiplié par l'élément de surface et par le carré de la vitesse. On trouve ainsi une résistance $R = \chi \overline{F} V_0^2$, où $\overline{F}$ porte le nom de *surface réduite ;* c'est la surface plane dont la résistance serait égale à celle du modèle étudié.

Dans les Chapitres suivants nous trouvons un exposé succinct et fort clair de la théorie classique des mouvements tourbillonnaires, théorèmes de Helmholtz, circulation, théorème de Stokes, théorème de Thomson sur la dérivée de la circulation le long d'un contour ouvert (à signaler une nouvelle et remarquable démonstration géométrique de ce dernier théorème). Suivent quelques développements sur les fluides visqueux; après avoir établi les équations générales et remarqué qu'en cas d'existence d'un potentiel des vitesses, ces équations coïncident avec celles des fluides parfaits, on montre comment les conditions aux parois différencient cependant les deux sortes de mouvements. Sur les conditions aux limites bien des opinions se sont fait jour jusqu'ici, et à ce sujet nous devons rappeler les savantes recherches de P. Duhem (*Recherches sur l'Hydrodynamique*, 1re Partie; Gauthier-Villars,

1904) où le lecteur trouvera un historique et un exposé critique des difficultés correspondantes. Ordinairement on admet, soit l'hypothèse de Navier (le fluide glisse tangentiellement à la paroi, avec frottement au contact), soit l'hypothèse de Coulomb (le fluide adhère à la paroi baignée). M. Joukowski propose de considérer la vitesse comme nulle à la paroi, et augmentant très rapidement jusqu'à devenir égale à celle que fournirait la théorie en supposant l'existence d'un potentiel des vitesses; il y aurait donc, autour d'un solide immergé, une couche fluide tourbillonnaire, dont l'épaisseur h serait fonction de la vitesse du courant; si la vitesse est petite, l'épaisseur est assez considérable (10^{mm} pour une vitesse de 1^{m} par seconde), tandis qu'elle est faible là où la vitesse est grande ($0^{mm},33$ pour une vitesse de 30^{m} par seconde). Cette hypothèse, sans rigueur absolue, semble en pratique suffisamment justifiée pour les applications. A ce propos on ne saurait trop conseiller au lecteur de relire les considérations de M. M. Brillouin sur les conditions à la paroi (*Leçons sur la Viscosité*, t. I, p. 43; Gauthier-Villars, 1907).

Avec le Chapitre VI nous abordons une catégorie de sujets beaucoup plus neufs. On considère surtout les mouvements à deux dimensions, ce qui revient à faire la théorie du mouvement d'un cylindre indéfini dans un fluide. Le fluide parfait, en cas de potentiel, donne alors naissance à toute une théorie où les deux fonctions, potentiel φ et fonction de courant ψ, jouent le rôle de fonctions conjuguées; $F = \varphi + i\psi$ devient une fonction analytique de la variable complexe $z = x + iy$. Des exemples simples appropriés donnent autour d'un cylindre circulaire un mouvement continu à potentiel uniforme (la pression totale sur le cylindre est alors nulle, paradoxe de d'Alembert) et un mouvement continu à potentiel multiforme : il y a autour du cylindre une circulation non nulle, et la résistance éprouvée par le cylindre est proportionnelle à cette circulation, et perpendiculaire à la direction du courant à l'infini. Ces préliminaires amènent M. Joukowski à la démonstration d'un théorème général très important, dont il est l'auteur, et qui s'énonce ainsi :

Lorsqu'un courant, dont la vitesse à l'infini est V_0, *s'écoule le long d'un contour, et que la circulation le long de ce con-*

tour est égale à I, *la résultante des pressions sur le contour est égale au produit du vecteur représentant la vitesse du courant à l'infini, par la circulation et par la densité du fluide. La direction de la force s'obtient en faisant tourner de* 90° *le vecteur* V_0 *dans le sens inverse de celui de la circulation.*

Les principes de la représentation conforme permettent alors facilement de passer du cas d'un solide cylindrique de révolution au cas d'un cylindre de forme différente, ou même réduit à une plaque plane. Si, en effet, dans la fonction $F(z)$ nous faisons le changement de variable

$$z = G(\zeta), \qquad \zeta = \xi + i\eta;$$

si nous choisissons G de façon que la correspondance des deux courants dans les plans z et ζ soit univoque, et de façon qu'on ait à l'infini

$$z = \lambda\zeta \qquad (\lambda \text{ constant}),$$

on montre facilement que les vitesses à l'infini dans les deux plans z et ζ font un angle déterminé et sont dans le rapport $|\lambda|$, et que dans les deux courants la valeur de la circulation autour des contours immergés est la même. Des transformations simples, telles que

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{1}{2}\left(z + \frac{a^2}{z}\right) \\ \zeta &= \frac{g}{a} z \frac{z+e}{z+g} \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} a,\ e,\ g \text{ réels} > 0 \\ e > g,\ a^2 = eg \end{pmatrix}$$

(cette dernière due à S. A. Tchapliguine), permettent d'étudier des obstacles en forme de plaques planes ou pisciformes dans le premier cas, concaves (en arcs de cercles) dans le second cas. On détermine facilement les dimensions et la résistance des solides correspondants ainsi que le moment résultant des pressions exercées sur la paroi, au moyen d'un nouveau théorème dû à l'auteur. Le cas d'un cylindre, dont la section est un profil limité par deux arcs de cercle sécants, a été étudié par M. Joukowski [*Sur les plans sustentateurs du type Antoinette* (*Bulletin de la Soc. impér. des Naturalistes de Moscou*, 1913)], et par W. M. Kutta (*Sitzungsberichte der königl. Bayerlische Akademie*, 1910).

L'auteur expose en détail des expériences précises faites dans

le tunnel plat du laboratoire de Moscou, pour la vérification des résultats ci-dessus, ainsi que pour la détermination de la résistance à l'avancement; le lecteur trouvera au Chapitre VII de nombreux diagrammes d'expériences relatives aux sortes d'ailes d'aéroplanes les plus connues, ainsi que d'intéressantes comparaisons avec les résultats de M. G. Eiffel (*cf.* G. Eiffel, *La résistance de l'air et l'Aviation*. Paris, 1910).

Le théorème fondamental de M. Joukowski appelle quelques remarques. Il est fort probable que la théorie à laquelle il sert de base élucide en effet une grande partie de la question, de même que la théorie du mouvement discontinu élucide en partie l'existence de la résistance directe éprouvée par un obstacle immergé. Mais il subsiste certaines difficultés de principe. Tout d'abord l'existence d'une circulation non nulle le long de la paroi de l'obstacle exposé à un courant (cette circulation provenant de la présence du solide) implique une profonde modification de l'état du fluide *même à l'infini*, puisque la circulation devra posséder la même valeur le long d'un contour fermé aussi éloigné que l'on voudra de l'obstacle; cette difficulté est du même ordre que celle qui se présente pour le mouvement avec sillage, ce sillage s'élargissant jusqu'à l'infini. Mais dans les deux cas on peut faire observer que toute modification née au voisinage du solide doit faire sentir son effet instantanément à toute distance, en vertu de l'hypothèse de l'incompressibilité. Une autre difficulté est la suivante : le point de départ des applications est constitué par l'exemple du cylindre circulaire, on l'a obtenu par la superposition des deux potentiels

$$\varphi_1 = -V_0 x \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \qquad [r^2 = x^2 + y^2]$$

et

$$\varphi_2 = -\frac{k}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}.$$

En posant

$$z = x + iy = re^{i\theta},$$

on en tire facilement, pour le carré de la vitesse en un point,

$$V^2 = \frac{k^2}{\pi^2 r^2} - \frac{2kV_0}{\pi r} \sin\theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) + V_0^2 \left[\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)^2 - \frac{4a^2}{r^2} \cos^2\theta\right].$$

Cette vitesse atteint sa plus grande valeur sur le cylindre lui-même,

de rayon a, et son maximum est

$$2V_0 + \frac{|k|}{\pi a}.$$

Or la pression est égale à

$$p_0 + \frac{\rho}{2}(V_0^2 - V^2);$$

donc, à moins d'une surpression considérable, il y aura toute une région dans le fluide où la pression sera négative, d'où tendance à cavitation et instabilité nécessaire; au reste, si l'on veut que le courant heurtant l'obstacle ait des chances de faire naître une circulation non nulle, de façon à mettre dans les conditions l'application du théorème, il faut réaliser à l'infini pour le courant une vitesse V_0 qui soit notable, la pression p_0 à l'infini a donc toutes chances d'être petite, et par suite le régime étudié ne pourra pas s'établir sans modifications.

Ce n'est pas, loin de là, qu'il faille méconnaître la très grande importance du théorème qui nous occupe; les applications déjà obtenues en sont des plus intéressantes, et toutes ne sont du reste pas signalées dans le Volume actuel. En partant de ce théorème, nous voulons signaler que M. Joukowski a donné récemment une explication très ingénieuse des phénomènes d'autorotation observés par exemple dans le mouvement des girouettes : lorsqu'une girouette rectangulaire dont l'axe de rotation coïncide avec un axe de symétrie (et est vertical) se trouve exposée à un courant d'air, elle prend une position perpendiculaire au vent et s'y trouve en équilibre stable; mais dès qu'on lui imprime un mouvement rotatoire, elle se met à tourner avec énergie dans la direction de l'impulsion donnée (cf. *Bulletin de l'Institut aérotechnique de Koutchino*, fascicule I, p. 51; *voir* aussi au fascicule III du même *Bulletin*, un article de M. D. Riabouchinski sur la même question).

Les développements qu'on trouvera au Chapitre VIII de l'Ouvrage nous fournissent une bien intéressante théorie de la résistance à l'avancement des corps cylindriques, expliquée par la résolution de la surface de glissement envisagée par Helmholtz, Levi-Cività, Brillouin et leurs élèves, en une double série de tourbillons rectilignes parallèles au cylindre, et qui s'en détachent

alternativement à des intervalles égaux. Si u et w désignent respectivement la vitesse de translation commune à ces tourbillons et la vitesse du cylindre lui-même, on voit facilement que la quantité de mouvement communiquée par le cylindre pendant une seconde, aux tourbillons qui se forment derrière lui, est

$$R = I\rho h \frac{w - u}{l}.$$

Dans cette formule, ρ est la densité, I désigne la valeur absolue commune de l'intensité des tourbillons, h est la distance mutuelle des deux files de tourbillons et l est la distance de deux tourbillons consécutifs d'une même file. Cette quantité de mouvement est d'autre part égale à la résistance à l'avancement du cylindre, rapportée à l'unité de longueur de celui-ci. On peut admettre approximativement qu'on a

$$I = wl.$$

D'autre part, on montre (*voir* plus loin une remarque sur ce point) que la configuration tourbillonnaire est stable seulement si l'on a la relation

$$\operatorname{ch} \frac{\pi h}{l} = \sqrt{3}.$$

et la vitesse u des tourbillons est alors

$$u = \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{I}{l}.$$

On en conclut

$$R = 0{,}596\, \rho h w^2.$$

Tel est l'essentiel de cette théorie, très brillamment exposée par M. Joukowski, qui en est partiellement l'auteur. Mais on ne peut manquer d'être surpris de voir attribuer l'idée première de cette méthode à MM. Prandtl et Karman [Prandtl, *Abriss der Lehre von der Flüssigkeits und Gasbewegung*, Jena, 1913; Karman, *Ueber den Mechanismus des Widerstandes den ein bewegter Körper in einer Flüssigkeit erfährt* (*Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 1911, fasc. 5, p. 509)]. L'idée première de cette méthode a été suggérée par M. M. Brillouin [*Leçons sur la Viscosité* (*Ann. de Phys. et de Chimie*, 8e série, t. XXIII, 1907, p. 148)], et tout ce qu'il y

a d'essentiel dans l'expérimentation et les résultats est dû à M. H. Bénard (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 148, 1908, p. 839 et 970) qu'on aimerait à voir citer dans ce Chapitre. Une partie de la question que M. H. Bénard n'a pas abordée est l'étude mathématique de la stabilité; c'est aussi, physiquement, la partie la plus douteuse pour l'application. Si attachante et élégante que soit la théorie mathématique en question, elle fait appel à la considération de deux files parallèles de tourbillons, indéfinies des deux côtés; jusqu'à quel point la présence du cylindre remplace-t-elle l'infinité de tourbillons situés en avant du corps, et qui n'existent pas dans l'expérience? Jusqu'à quel point la présence du cylindre modifie-t-elle en plus ou en moins la stabilité des tourbillons de l'arrière? Ce point appellerait de nouvelles recherches. Il faut noter que la valeur théorique proposée par MM. Karman et Joukowski pour le rapport $\frac{h}{l}$ est $0,36\ldots \left(= \frac{1}{\pi}\operatorname{arg.ch}\sqrt{3}\right)$ les valeurs expérimentales trouvées par M. Joukowski sont $0,320\ldots$; $0,361\ldots$; $0,363\ldots$; $0,366\ldots$ (*cf.* p. 204). Mais cette valeur théorique $\frac{1}{\pi}\operatorname{arg.ch}\sqrt{3}$ correspond au cas où l'on suppose tous les centres des tourbillons, moins un, immobiles les uns par rapport aux autres, et l'on trouve cette valeur en recherchant à quelle condition ce tourbillon mobile sera stable. Or il n'y a pas de raison de faire jouer à un des tourbillons un rôle spécial, et si l'on suppose, ce qui est plus vraisemblable, tous les tourbillons libres de se mouvoir les uns par rapport aux autres à partir de la configuration initiale régulière, on trouve que la stabilité est assurée quand le rapport $\frac{h}{l}$ prend la valeur

$$0,283\ldots = \frac{1}{\pi}\operatorname{arg.ch}\sqrt{2} \quad (^1).$$

Il est assez vraisemblable que le chiffre réel doit tomber entre les deux valeurs extrêmes $0,283\ldots$ et $0,36\ldots$; mais pour le préciser il faudrait mieux connaître la modification plus ou moins grande

(1) *Cf.* KARMAN et RUBACH, *Physikalische Zeitschrift*, 1912, p. 49. La valeur de u est alors $u = \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot \frac{I}{l}$.

qu'apporte au phénomène l'absence, dans la réalité, des tourbillons placés à l'avant du corps; ces tourbillons hypothétiques, qui interviennent dans la formation de l'équation de stabilité, doivent-ils être considérés commes fixes ou susceptibles de déplacements virtuels?

L'Ouvrage se termine par quelques pages fort claires sur la théorie de la similitude et les applications qu'il faut en faire pour les essais à effectuer sur des modèles réduits.

Ce que nous avons dit suffit à montrer l'importance et l'intérêt du livre de M. Joukowski. Les lecteurs français y trouveront d'une part des développements sur des matières déjà connues, mais présentés sous une forme toujours attrayante et souvent nouvelle, et d'autre part des recherches récentes d'un puissant intérêt. On ne saurait trop recommander ce livre à tous ceux qui désirent acquérir, sur ces questions si actuelles, des idées précises. Grâce au mérite d'une exposition claire et judicieuse, ils sont assurés d'obtenir, avec un minimum de peine, des connaissances fondamentales, dans une région qui appelle tant de belles recherches.

H. Villat.

MÉLANGES.

SUR LES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE LA MÉCANIQUE ANALYTIQUE;

Par M. H. Vergne.

I. — Changements canoniques de variables. Transformation d'un système canonique en un autre.

1. Considérons un système de $2n$ équations *canoniques*

$$(I)\qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

définissant les $2n$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n$, en fonction du temps t. La fonction caractéristique $F(x_1, x_2, \ldots, x_n;$

$y_1, y_2, \ldots, y_n$) sera supposée, tout d'abord, ne pas dépendre explicitement de t. Pour abréger, nous écrirons souvent $F(x_i; y_i)$.

Soit $S(x_1, x_2, \ldots, x_n; \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ une fonction *arbitraire* dépendant de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et de n autres lettres $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$. Si l'on pose

$$(1) \qquad y_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}, \qquad \xi_i = \frac{\partial S}{\partial \eta_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

on aura $2n$ équations (1) permettant d'exprimer $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots, y_n$ en fonction de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$; $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ (ou inversement), ce qui définit un changement de variables, que je désignerai par la notation $(x, y) \to (\xi, \eta)$.

Puisque l'expression

$$\sum_i y_i\, dx_i - \sum_i \eta_i\, d\xi_i = d\left(S - \sum_i \xi_i \eta_i\right)$$

est une *différentielle exacte*, ce changement de variables est *canonique* [1], c'est-à-dire qu'il n'altère pas la forme canonique des équations (I) qui se transforment en

$$(\text{II}) \qquad \frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_i}, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où j'ai désigné par $\Phi(\xi_i; \eta_i)$ ce que devient la fonction $F(x_i; y_i)$ quand on l'a exprimée au moyen des nouvelles variables ξ_i, η_i.

Ce théorème fondamental sert de base à tout ce qui va suivre.

2. Prenons, par exemple, pour $S(x_i; \eta_i)$, la fonction suivante :

$$S = \eta_1 q_1 + \eta_2 q_2 + \ldots + \eta_n q_n,$$

linéaire par rapport aux η, les q étant des fonctions quelconques distinctes des x. Les formules (1), devenues

$$(1)' \qquad y_i = \eta_1 \frac{\partial q_1}{\partial x_i} + \eta_2 \frac{\partial q_2}{\partial x_i} + \ldots + \eta_n \frac{\partial q_n}{\partial x_i},$$

$$(1)'' \qquad \xi_i = q_i,$$

nous définissent un changement canonique de variables

[1] H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I, Chap. I; — *Leçons de Mécanique céleste*, t. I, Chap. I.

$(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$, pour lequel les ξ sont des fonctions *arbitraires* des x, les η étant donnés par les n équations *linéaires* (1)$'$.

Dans le cas de la Dynamique, les x_i représentent les coordonnées de $\frac{n}{3}$ points matériels, les y_i les composantes de leurs quantités de mouvement, F l'énergie totale. Les équations (I) sont les équations du mouvement.

Le changement de variables défini par les formules (1)$'$ et (1)$''$ n'est autre alors que le changement classique de Poisson-Hamilton pour le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées curvilignes. Les équations (II) sont les équations du mouvement mises sous la forme canonique même de Hamilton.

3. Envisageons maintenant, *a priori*, deux systèmes canoniques quelconques (I) et (II) ayant le même nombre de variables, et proposons-nous de chercher un changement de variables $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$ qui les transforme l'un dans l'autre.

Considérons l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$F\left(x_i ; \frac{\partial S}{\partial x_i}\right) = \Phi\left(\frac{\partial S}{\partial \eta_i} ; \eta_i\right), \tag{2}$$

et supposons qu'on ait su en trouver *une intégrale particulière quelconque* $S(x_1, x_2, \ldots, x_n ; \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$. Les $2n$ équations (1) définissent un changement canonique de variables transformant la fonction $F(x_i; y_i)$ en la fonction $\Phi(\xi_i; \eta_i)$; et par suite *transformant le système* (I) *dans le système* (II) [1].

Bien entendu, il faudra, pour que le procédé réussisse, que les formules (1) puissent être résolues, soit par rapport aux (x_i, y_i), soit par rapport aux (ξ_i, η_i), ce qui exige chaque fois qu'un certain déterminant fonctionnel ne soit pas nul.

4. Ainsi, la transformation des systèmes canoniques (I) et (II)

---

[1] P. Appell et H. Vergne, *C. R. Acad. Sc.*, Note du 16 juin 1913. — H. Vergne, *Sur une correspondance entre les mouvements de deux systèmes mécaniques holonomes conservatifs* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, décembre 1913). — On peut encore donner au changement canonique de variables transformant le système (I) dans le système (II) toute une série d'autres formes, en remplaçant l'équation aux dérivées partielles (2) par une autre. Ces autres formes ne nous seront pas utiles ici.

l'un dans l'autre se ramène à la connaissance d'une intégrale particulière quelconque $S(x_i; \eta_i)$ de l'équation aux dérivées partielles (2).

Supposons que, par un procédé quelconque, on ait obtenu une telle intégrale. Supposons aussi que la fonction $\Phi(\xi_i; \eta_i)$ soit de telle nature qu'on ait su intégrer les équations (II); alors les ξ_i, η_i seront des fonctions connues de t et de $2n$ constantes d'intégration $C_1, C_2, \ldots, C_{2n}$. Ce qui précède montre qu'*on saura écrire aussi immédiatement les intégrales des équations* (I) : elles seront données par les formules (1).

Le cas où la fonction $\Phi(\xi_i; \eta_i)$ se réduirait simplement à η_1 redonne, comme cas particulier, un théorème bien connu dû à Jacobi : *Si l'on possède de l'équation aux dérivées partielles*

$$F\left(x_i; \frac{\partial S}{\partial x_i}\right) = \eta_1$$

une intégrale complète $S(x_1, x_2, \ldots, x_n; \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$, *contenant, outre* η_1, $n-1$ *autres constantes* $\eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_n$, *dont aucune n'est additive, on sait écrire immédiatement les intégrales générales des équations canoniques* (I).

Aussi donnerons-nous, dans la suite, à l'équation aux dérivées partielles (2) le nom d'*équation de Jacobi*.

5. Dans tout ce qui précède, les fonctions caractéristiques $F(x_i; y_i)$, $\Phi(\xi_i; \eta_i)$ ont été supposées ne pas dépendre explicitement du temps. Nous allons examiner maintenant le cas où elles en dépendent.

Reprenons donc les équations (I), en supposant que la lettre t figure explicitement dans $F(x_i; y_i; t)$. Un procédé très simple et bien connu permet de ramener ce cas au précédent [1] : nous allons faire jouer à t le rôle d'un x, et introduire une variable auxiliaire u, qui jouera le rôle d'un y. Pour cela, envisageons la fonction caractéristique suivante :

$$F(x_i; y_i; t) + u.$$

---

[1] H. Poincaré, *Leçons de Mécanique céleste*, t. I, Chap. I.

Les équations canoniques qui lui correspondent sont

$$\frac{dx_i}{\dfrac{\partial F}{\partial y_i}} = \frac{dy_i}{-\dfrac{\partial F}{\partial x_i}} = \frac{dt}{1} = \frac{du}{-\dfrac{\partial F}{\partial t}};$$

les n premières, qui ne contiennent pas la lettre u, ne sont autres que les équations (I); la dernière sert simplement à définir la variable auxiliaire u.

De même, si nous envisageons la fonction caractéristique

$$\Phi(\xi_i; \eta_i; \tau) + \upsilon$$

et si nous convenons de faire jouer à τ le rôle d'un ξ, et à υ le rôle d'un η, les équations canoniques correspondantes seront

$$\frac{d\xi_i}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial \eta_i}} = \frac{d\eta_i}{-\dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_i}} = \frac{d\tau}{1} = \frac{d\upsilon}{-\dfrac{\partial \Phi}{\partial \tau}};$$

les n premières, qui ne contiennent pas la lettre υ, ne sont autres que les équations (II) (où nous désignons momentanément le temps par la lettre τ pour la symétrie des notations); la dernière sert simplement à définir la variable auxiliaire υ.

6. Cette remarque faite, nous revenons à nos deux systèmes canoniques (I) et (II), où les fonctions $F(x_i; y_i; t)$ et $\Phi(\xi_i; \eta_i; \tau)$ sont supposées dépendre explicitement du temps, et nous cherchons un changement de variables qui les transforme l'un dans l'autre.

Introduisant les deux variables auxiliaires u et υ, et considérant les deux fonctions caractéristiques

$$F(x_i; y_i; t) + u \quad \text{et} \quad \Phi(\xi_i; \eta_i; \tau) + \upsilon,$$

l'application de la méthode du n° 3 conduit à l'équation de Jacobi suivante :

$$F\left(x_i; \frac{\partial S}{\partial x_i}; t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = \Phi\left(\frac{\partial S}{\partial \eta_i}; \eta_i; \frac{\partial S}{\partial \upsilon}\right) + \upsilon.$$

Si, de cette équation, on a su trouver une intégrale particulière quelconque

$$S(x_1, x_2, \ldots, x_n; \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n; t; \upsilon),$$

on transformera les systèmes (I) et (II) l'un dans l'autre au moyen

du changement de variables $(x, y, t, u) \rightarrow (\xi, \eta, \tau, \upsilon)$ défini par les formules

(1) $$y_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}, \qquad \xi_i = \frac{\partial S}{\partial \eta_i},$$

(3) $$u = \frac{\partial S}{\partial t}, \qquad \tau = \frac{\partial S}{\partial \upsilon}.$$

Cette intégrale particulière $S(x; \eta_i; t; \upsilon)$, nous la choisirons de la forme suivante :

$$S(x_i; \eta_i; t; \upsilon) = t\upsilon + S_1(x_i; \eta_i; t),$$

la fonction S_1 ne dépendant pas de υ.

L'équation de Jacobi qui définit S_1 devient alors

$$F\left(x_i; \frac{\partial S_1}{\partial x_i}; t\right) + \frac{\partial S_1}{\partial t} = \Phi\left(\frac{\partial S_1}{\partial \eta_i}; \eta_i; t\right).$$

La variable parasite υ *a disparu.* Et les formules de transformation (1), (3) sont devenues :

(1)^{bis} $$y_i = \frac{\partial S_1}{\partial x_i}, \qquad \xi_i = \frac{\partial S_1}{\partial \eta_i},$$

(3)^{bis} $$u - \upsilon = \frac{\partial S_1}{\partial t}, \qquad \tau = t.$$

La dernière nous apprend que *le temps reste le même* pour les deux systèmes. L'avant-dernière est la seule qui contienne les deux variables parasites u et υ : elle les relie, et l'on peut la laisser complètement de côté, ces deux variables ne jouant qu'un rôle auxiliaire. Enfin les équations (1)^{bis} définissent un changement canonique de variables $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$ *qui dépend du temps :* elles nous indiquent que l'expression

$$\sum_i y_i\, dx_i + \sum_i \xi_i\, d\eta_i = dS_1$$

ainsi que l'expression

$$\sum_i y_i\, dx_i - \sum_i \eta_i\, d\xi_i = d\left(S_1 - \sum_i \xi_i \eta_i\right)$$

sont des différentielles exactes *lorsqu'on regarde la lettre t comme un paramètre constant.*

Bref, pour énoncer le théorème dans sa généralité, nous dirons que, si l'on considère les deux systèmes quelconques d'équations canoniques (I) et (II), dans lesquels les fonctions caractéristiques $F(x_i; y_i; t)$, $\Phi(\xi_i; \eta_i; t)$ peuvent dépendre explicitement du temps ([1]), l'équation aux dérivées partielles de Jacobi associée à la transformation de ces deux systèmes l'un dans l'autre est (en effaçant l'indice 1 de la lettre S devenu inutile)

$$(4) \qquad \frac{\partial S}{\partial t} + F\left(x_i; \frac{\partial S}{\partial x_i}; t\right) = \Phi\left(\frac{\partial S}{\partial \eta_i}; \eta_i; t\right).$$

Si l'on possède de cette équation une intégrale particulière quelconque $S(x_i; \eta_i; t)$ on passera du système (I) au système (II) par le changement canonique de variables $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$ défini par les formules

$$(1) \qquad y_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}, \qquad \xi_i = \frac{\partial S}{\partial \eta_i}.$$

II. — Application à deux systèmes canoniques voisins. Cas de la Mécanique céleste.

7. J'appliquerai les considérations précédentes à la transformation l'un dans l'autre de deux systèmes d'équations canoniques voisins l'un de l'autre.

Changeant un peu les notations, je considère un premier système de $2n$ équations canoniques

$$(A) \qquad \frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \eta_i}, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \xi_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

définissant le mouvement d'un système mécanique. La fonction caractéristique $F(\xi_i; \eta_i; t)$ peut dépendre explicitement du temps t.

Je suppose qu'on ait su intégrer complètement ce système : alors les ξ_i, η_i seront des fonctions connues du temps t et de $2n$ constantes d'intégration $C_1, C_2, \ldots, C_{2n}$.

([1]) Puisque le temps $t = \tau$ est le même pour les deux systèmes, il n'y a plus lieu dorénavant de le désigner par deux lettres différentes.

Je suppose maintenant, ainsi qu'il arrive en Mécanique céleste, que l'on ait à étudier un second mouvement *voisin* du premier, et soient

$$\text{(B)} \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i} + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial y_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} - \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

les équations canoniques qui définissent ce nouveau mouvement, $F(x_i; y_i; t)$ étant la *même* fonction caractéristique (où les lettres x_i, y_i remplacent simplement les lettres ξ_i, η_i), et $\varepsilon f(x_i; y_i; t)$ désignant une petite *fonction perturbatrice*.

Nous nous proposons de transformer le système (B) dans le système (A) par la méthode du n° 6. L'équation de Jacobi (4) associée à cette transformation est

$$\frac{\partial S}{\partial t} + F\left(x_i; \frac{\partial S}{\partial x_i}; t\right) + \varepsilon f\left(x_i; \frac{\partial S}{\partial x_i}; t\right) = F\left(\frac{\partial S}{\partial \eta_i}; \eta_i; t\right).$$

Nous chercherons à y satisfaire en posant

$$S(x_i; \eta_i; t) = (x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + \ldots + x_n\eta_n) + \sigma(x_i; \eta_i; t),$$

ce qui réduira les formules de transformation (1) à

$$(5) \qquad y_i = \eta_i + \frac{\partial \sigma}{\partial x_i}, \qquad \xi_i = x_i + \frac{\partial \sigma}{\partial \eta_i}.$$

Et alors il viendra, pour déterminer la fonction σ, la nouvelle équation de Jacobi

$$(6) \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial t} + F\left(x_i; \eta_i + \frac{\partial \sigma}{\partial x_i}; t\right) + \varepsilon f\left(x_i; \eta_i + \frac{\partial \sigma}{\partial x_i}; t\right)$$
$$= F\left(x_i + \frac{\partial \sigma}{\partial \eta_i}; \eta_i; t\right).$$

Puisque le paramètre ε est supposé très petit (de l'ordre des masses perturbatrices), il est naturel de développer σ suivant les puissances de ce paramètre

$$\sigma = \sigma_0 + \varepsilon \sigma_1 + \varepsilon^2 \sigma_2 + \ldots,$$

et de déterminer de proche en proche $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots$, en identifiant, dans l'équation (6), les coefficients des diverses puissances de ε.

Tout d'abord, pour $\varepsilon = 0$, nous pouvons prendre $\sigma_0 = 0$, ce qui

réduit la fonction S à

$$S = x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + \ldots + x_n\eta_n,$$

et les formules de transformation (1) ou (5) à

$$y_i = \eta_i, \qquad \xi_i = x_i.$$

C'est tout simplement la transformation identique qui transforme le système (A) en lui-même.

Pour calculer σ_1, nous considérerons, dans (6), le coefficient de la première puissance de ε, ce qui nous donne l'équation

$$\frac{\partial\sigma_1}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial F}{\partial\eta_i}\frac{\partial\sigma_1}{\partial x_i} - \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial\sigma_1}{\partial\eta_i} = -f(x_i; \eta_i; t),$$

que nous écrirons ainsi

$$(6)^{bis} \qquad \frac{\partial\sigma_1}{\partial t} - (\sigma_1, F) = -f,$$

la notation

$$(\sigma_1, F) = \sum_i \left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial\eta_i} - \frac{\partial\sigma_1}{\partial\eta_i}\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)$$

désignant, suivant l'usage, la *parenthèse de Poisson* relative aux deux fonctions σ_1 et F.

σ_1 désignant une intégrale de cette équation, les formules de transformation (5), limitées aux termes en ε, deviennent

$$(5)^{bis} \qquad y_i = \eta_i + \varepsilon\frac{\partial\sigma_1}{\partial x_i}, \qquad \xi_i = x_i + \varepsilon\frac{\partial\sigma_1}{\partial\eta_i}.$$

Pour pousser l'approximation plus loin, nous remarquerons que l'équation qui donne σ_2 (équation qui s'obtient en identifiant, dans (6), le coefficient de ε^2) est de la forme

$$(6)^{ter} \qquad \frac{\partial\sigma_2}{\partial t} - (\sigma_2, F) = \ldots,$$

le second membre étant une fonction *connue* de $(x_i; \eta_i; t)$ puisque c'est une expression où figure σ_1 qui a été calculé par l'approximation précédente.

D'une façon générale il est facile de voir que l'équation qui

donne σ_k est de la forme

$$(6\ quater) \qquad \frac{\partial \sigma_k}{\partial t} + (\sigma_k, F) = \ldots,$$

le second membre étant une fonction *connue* de $(x_i; y_i; t)$ puisque c'est une expression où ne figurent que $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{k-1}$, qui ont été calculés par les approximations précédentes.

Bref, chaque approximation nous amène à chercher une intégrale particulière σ_k d'une équation de la forme

$$\frac{\partial \sigma_k}{\partial t} + (\sigma_k, F) = \text{fonction connue de } (x_i; y_i; t).$$

Je vais montrer qu'*une telle intégration n'exige chaque fois qu'une seule quadrature*, si, comme nous l'avons supposé, on a su résoudre complètement le système d'équations (A) [1].

8. Il suffira de démontrer la chose pour la première de ces équations, la même méthode s'appliquant à toutes les autres. Nous allons même démontrer le théorème un peu plus général que voici :

Si l'on a intégré complètement le système

$$(A)' \qquad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_m}{X_m} = dt,$$

où les X sont des fonctions données des x et de t, il suffira d'une seule quadrature pour intégrer l'équation aux dérivées partielles

$$(a) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} + X_1 \frac{\partial \sigma}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \sigma}{\partial x_2} + \ldots + X_m \frac{\partial \sigma}{\partial x_m} = -f(x_1, x_2, \ldots, x_m, t),$$

où le second membre est une fonction quelconque [2].

---

[1] Nous pouvons remarquer que ces équations (A) définissent les *caractéristiques* de l'équation aux dérivées partielles sans second membre

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + (\sigma, F) = 0,$$

et que résoudre cette équation sans second membre ou résoudre les équations (A) sont deux problèmes équivalents.

[2] Nous pouvons encore remarquer que les équations (A)′ définissent les

Soient en effet

$$(7) \qquad x_i = \varphi_i(t, C_1, C_2, \ldots, C_m) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

les intégrales générales des équations (A)', les C désignant m constantes d'intégration. Ces m formules (7) peuvent être considérées comme définissant un changement de variables permettant de passer des m lettres x_i aux m lettres C (ce changement de variables dépendant explicitement du paramètre t).

Exprimons alors la fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_m, t)$ au moyen des nouvelles variables C : Elle devient une fonction $f(C_1, C_2, \ldots, C_m, t)$ de ces nouvelles variables et du temps t.

Si nous posons

$$(8) \qquad \sigma = -\int_{t_0}^{t} f(C_1, C_2, \ldots, C_m, t)\,dt,$$

quadrature où les lettres C sont traitées comme des constantes, nous avons là une fonction $\sigma(C_1, C_2, \ldots, C_m, t)$ qu'on peut exprimer au moyen des formules (7) en fonction des variables x_i et t. Cette fonction $\sigma(x_i, t)$ satisfait identiquement à l'équation (a). Il est très facile de le vérifier par le calcul ; on peut aussi remarquer sur la formule (8) que $-f$ est la dérivée de σ par rapport à t lorsque les C ne varient pas, c'est-à-dire lorsque les x_i vérifient les équations (A)'; or le premier membre de (a) désigne précisément la même dérivée.

9. Revenons maintenant au problème que nous avions en vue : la transformation du système canonique (B) dans le système canonique (A); toute la question est de déterminer la fonction $\sigma(x_i; \eta_i; t)$, puisqu'il suffit, après cela, d'écrire les formules (5).

Nous venons de voir que, développant cette fonction σ suivant les puissances du coefficient perturbateur ε, le calcul des termes du premier ordre en ε exige *une* quadrature, celui des termes en ε^2 en exige une seconde ; et d'une façon générale *le calcul des termes en ε^p exige p quadratures successives.*

---

caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles (a) *sans second membre*, et que la résolution de cette équation sans second membre et celle du système (A') sont deux problèmes équivalents.

La série σ ainsi obtenue converge lorsque ε est suffisamment petit; l'équation (6), en effet, admet une intégrale fonction holomorphe de ε autour de $\varepsilon = 0$ [1]. Nous verrons un peu plus loin que cette série converge encore *même lorsque* ε *est grand*, pourvu qu'alors $(t - t_0)$ soit suffisamment petit. Si bien que les formules (5) donneront encore la solution du problème troublé, même par une grande fonction perturbatrice, mais pour les petites valeurs du temps seulement.

10. Nous allons, pour l'instant, nous attacher à étudier de plus près la première approximation, celle qui tient compte des termes en ε et néglige ε^2 et les puissances supérieures.

Pour le mouvement non troublé [équations (A)], les variables ξ_i, η_i sont par hypothèse des fonctions connues du temps t et de $2n$ constantes d'intégration $C_1, C_2, \ldots, C_{2n}$.

Pour le mouvement troublé [équations (B)], nous poserons

$$x_i = \xi_i + \delta\xi_i, \qquad y_i = \eta_i + \delta\eta_i.$$

Alors, les formules de $(5)^{bis}$ nous donneront pour valeurs des *perturbations* $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$ les formules

$$\delta\xi_i = -\varepsilon\frac{\partial\sigma_1}{\partial\eta_i}, \qquad \delta\eta_i = \varepsilon\frac{\partial\sigma_1}{\partial x_i}.$$

Comme ces quantités sont de l'ordre de ε, nous avons le droit, négligeant ε^2, de remplacer dans $\sigma_1(x_i; \eta_i; t)$ les quantités x_i par leurs valeurs non troublées ξ_i; et le calcul de la fonction $\sigma_1(\xi_i; \eta_i; t)$ s'effectue, comme il a été dit au n° 8, par la quadrature

(9) $$\sigma_1 = -\int_{t_0}^{t} f(C_1, C_2, \ldots, C_{2n}, t)\,dt,$$

où les lettres C sont traitées comme des constantes, et où je désigne par $f(C_1, C_2, \ldots, C_{2n}, t)$ ce que devient la fonction $f(\xi_i; \eta_i; t)$ quand on y a remplacé les ξ_i, η_i par leurs valeurs en fonction de t et des constantes d'intégration C.

En résumé, *il suffit d'exprimer la fonction perturbatrice f*

---

(1) Nous admettons, pour ne pas compliquer, que toutes les données sont analytiques.

en fonction des constantes d'intégration C *du mouvement non troublé; de calculer la fonction* σ_1 *par la quadrature* (9); *d'exprimer cette fonction* σ_1 *au moyen des variables* ξ_i, η_i, *pour en déduire immédiatement, au moyen des formules*

$$(10) \qquad \delta\xi_i = -\varepsilon\frac{\partial\sigma_1}{\partial\eta_i}, \qquad \delta\eta_i = \varepsilon\frac{\partial\sigma_1}{\partial\xi_i},$$

les valeurs explicites des perturbations $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$ *du mouvement troublé à partir d'une époque quelconque* t_0 (les quantités $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$ s'annulent, en effet, comme σ_1, pour $t = t_0$).

Ce théorème est d'ailleurs très aisé à démontrer directement. Il suffit de vérifier que si, dans les équations (B), on remplace x_i par $\xi_i - \varepsilon\frac{\partial\sigma_1}{\partial\eta_i}$ et y_i par $\eta_i + \varepsilon\frac{\partial\sigma_1}{\partial\xi_i}$, on obtient des identités (en négligeant ε^2), en vertu des équations (A) et $(6)^{bis}$: la première équation (B), par exemple, devient identique à l'équation $(6)^{bis}$ différentiée par rapport à η_i [1].

11. Une remarque s'impose ici. Dans la quadrature (9) nous avons pris comme limite inférieure d'intégration l'époque t_0 à partir de laquelle nous voulons calculer les perturbations. En d'autres termes, les formules (10) donnent les perturbations des éléments du mouvement troublé, à partir des éléments du mouvement non troublé auquel il est *osculateur* à l'instant t_0.

Mais nous aurions pu prendre comme limite inférieure d'intégration un autre instant quelconque t'. Plus généralement nous aurions pu prendre, au lieu de σ_1, une autre intégrale particulière quelconque σ'_1 de l'équation $(6)^{bis}$, et en déduire d'autres valeurs

$$\delta'\xi_i = -\varepsilon\frac{\partial\sigma'_1}{\partial\eta_i}, \qquad \delta'\eta_i = \varepsilon\frac{\partial\sigma'_1}{\partial\xi_i}$$

pour les perturbations. A quoi cela aurait-il correspondu?

La fonction $\sigma''_1 = \sigma'_1 - \sigma_1$ satisfait à l'équation

$$\frac{\partial\sigma''_1}{\partial t} - (\sigma''_1, F) = 0.$$

---

(1) H. Vergne, *Sur une méthode de Calcul des perturbations d'un mouvement connu* (*C. R. Acad. Sc.*, 10 novembre 1916).

qui n'est autre que l'équation (6)^{bis} sans second membre. Cela prouve que

$$\sigma''_1 = \text{const.}$$

est une intégrale première du mouvement non troublé (A), et que les différences

$$\delta''\eta_i = \delta'\xi_i - \delta\xi_i = -\varepsilon\frac{\partial\sigma''_1}{\partial\eta_i},$$

$$\delta''\xi_i = \delta'\eta_i - \delta\eta_i = \quad \varepsilon\frac{\partial\sigma''_1}{\partial\eta_i}$$

sont des perturbations qui correspondent à une fonction perturbatrice identiquement nulle ; autrement dit que $\xi_i + \delta''\xi_i$, $\eta_i + \delta''\eta_i$ sont un système de solutions des équations (A) infiniment voisin du système ξ_i, η_i [1].

On voit donc que les véritables perturbations (celles dues à la fonction perturbatrice εf) sont bien données par les formules (10) et que $\delta''\xi_i$, $\delta''\eta_i$ correspondent seulement à un changement infiniment petit des conditions initiales pour le mouvement non troublé.

Nous pouvons encore faire une dernière remarque, évidente d'ailleurs. Si la fonction perturbatrice f se compose d'une somme de plusieurs termes, la fonction σ_1 correspondante se composera d'un nombre égal de termes. Il en sera de même pour $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$. On peut donc étudier séparément l'effet perturbateur de chaque terme de la fonction perturbatrice.

(*A suivre.*)

---

(1) C'est là un théorème bien connu qui s'énonce ainsi : Si $\sigma''_1 = \text{const.}$, est une intégrale première des équations (A), les quantités

$$\delta'\xi_i = -\varepsilon\frac{\partial\sigma''_1}{\partial\eta_i}, \qquad \delta'\eta_i = \varepsilon\frac{\partial\sigma''_1}{\partial\xi_i}$$

constituent un système de solutions des *équations aux variations* du système (A). (H. POINCARÉ, *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I, p. 162. — P. APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. II, p. 457.)

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

OCAGNE (MAURICE D'). COURS DE GÉOMÉTRIE PURE ET APPLIQUÉE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE. Tome I : *Transformations géométriques. Perspective. Géométrie infinitésimale. Géométrie réglée. Géométrie cinématique.* 1 vol. in-8 (25-16) de XII-375 pages avec 155 figures; Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1917.

M. d'Ocagne vient de publier le Tome premier du *Cours de Géométrie* qu'il professe à l'École Polytechnique : ce volume, si on laisse de côté les pages qui ont trait à la perspective, est consacré à la théorie pure ; un second volume contiendra les applications.

Le mot de Géométrie a pris de nos jours une extension considérable : on parle de la Géométrie d'Euclide, de la Géométrie analytique de Descartes, de la Géométrie projective de Poncelet, de la Géométrie différentielle que Darboux a exposée dans les quatre volumes de sa Théorie des Surfaces; il y a une Géométrie du mouvement; il y a une Géométrie algébrique, auxquelles d'autres encore pourraient être ajoutées, puisqu'il existe même une Géométrie des Nombres.

Toutes ces Sciences ont pour objet commun l'étude des *êtres géométriques;* mais les unes, dans leur développement, s'appuient ouvertement et sans cesse sur l'Analyse, dont souvent elles invoquent les résultats les plus élevés; les autres, employant le langage et le raisonnement géométriques, diffèrent entre elles par leur point de départ : c'est ainsi que, dans les travaux récents de l'École italienne sur les courbes et les surfaces algébriques, on ne voit apparaître, pour ainsi dire, aucune ligne de calcul mathématique ; les déductions y sont exclusivement synthétiques ; mais, à la base, on trouve les propriétés les plus profondes des intégrales abéliennes ou des intégrales de M. Picard.

On peut caractériser le Livre de M. d'Ocagne en disant qu'il est une application du calcul infinitésimal élémentaire, mais avec un mode de *raisonnement purement géométrique*, et un souci constant de la *réalité géométrique :* j'entends par là que les courbes et les surfaces y sont traitées, non comme des êtres de raison, à

propos desquels on développe une suite rigoureuse de déductions abstraites, mais comme des êtres que l'œil doit voir, en même temps que l'intelligence les étudie.

Nous suivrons, pour analyser le livre, l'ordre même des Chapitres et des divisions.

I. *Transformations géométriques.* — En quarante pages, l'auteur résume, avec méthode et clarté, les principes essentiels de la théorie des transformations. Il insiste, naturellement, sur l'*homographie générale* et ses cas particuliers, dans le plan et dans l'espace; il s'étend également sur l'*inversion*, dont l'importance grandit sans cesse et qu'on rencontre aujourd'hui dans les questions les plus diverses, de la Physique à l'Arithmétique supérieure. Il n'oublie pas les *transformations dualistiques* et donne enfin des notions intéressantes sur les *groupes de transformations*, en étudiant, en particulier, le *groupe des inversions*.

Aucune théorie générale, et la même observation porte sur tout le livre, n'est exposée sans que M. d'Ocagne ne l'éclaire par des exemples et des applications qui en soulignent l'importance ou l'utilité.

II. *Perspective.* — Il est d'abord question de la *perspective conique*, avec l'exposé de la méthode usuelle, des *Constructions directes*, *des Problèmes d'ombres* : partout l'auteur, loin de se borner à des recettes techniques, fait intervenir la Géométrie en utilisant les propriétés des figures à représenter; on peut citer, à ce point de vue, la manière élégante et personnelle dont il obtient le contour apparent d'une sphère.

Le Problème de la *restitution perspective* est traité en quelques pages, qui exposent, sans aucun oubli essentiel, tous les procédés employés aujourd'hui dans la pratique; on sait l'importance que ceux-ci ont acquise récemment, puisqu'ils permettent d'établir le plan rigoureux d'une région d'après des photographies prises en aéronef.

La fin du Chapitre concerne les *perspectives cavalière et isométrique*.

III. *Géométrie infinitésimale.* — Ce Chapitre est le plus

étendu, le plus important du livre. M. d'Ocagne y établit celles des propriétés des courbes et des surfaces où interviennent les infiniment petits des deux premiers ordres; mais, surtout, il y fait connaître la *méthode géométrique infinitésimale* et met en évidence l'extrême variété de ses applications.

Tout repose sur trois formules fondamentales (variation de grandeur d'un arc, d'un segment, d'un angle) établies avec une rigoureuse simplicité; les applications, choisies avec adresse, développées avec élégance, rendent singulièrement attrayante la lecture de cette partie du volume.

A côté des résultats classiques qui concernent les *courbes planes* et les *courbes gauches*, courbure, développées, développantes, indicatrice sphérique, torsion, formules de Frenet; à côté de l'étude générale des *surfaces développables*, de la surface polaire et de la rectifiante d'une courbe gauche, nous signalerons particulièrement les pages consacrées à la *Théorie des surfaces*.

On y remarquera une excellente démonstration du Théorème de Malus sur les rayons réfractés et une démonstration, également excellente, de celui de Dupin sur les *lignes de courbure* dans un système triple orthogonal : celle-ci repose sur la notion de *torsion géodésique*, due à Joseph Bertrand.

Il faut signaler aussi les paragraphes qui concernent les *lignes géodésiques* et que couronne la théorie des *géodésiques de l'ellipsoïde*, avec leur détermination simple et élégante et le tracé si remarquable des lignes de courbure, considérées comme des ellipses géodésiques.

Vient enfin l'étude spéciale des *surfaces gauches*, suivie d'applications à un conoïde droit et au *cylindroïde de Plücker*.

L'art de la composition ne saurait être trop loué dans toute cette partie du livre : l'auteur était lié par un programme imposé, plus soucieux de résultats que d'ordre logique; il s'agissait donc pour lui de mettre debout une théorie cohérente qui pût servir d'ossature au Chapitre, et à laquelle pussent se rattacher naturellement les applications, partie essentielle du programme prescrit : il y a réussi avec un extrême bonheur et l'unité du Chapitre est complète.

IV. *Géométrie réglée.* — Il s'agit de la théorie géométrique

des *complexes* et des *congruences linéaires* : on sait que le complexe linéaire joue un rôle important en Mécanique et en Statique graphique : M. d'Ocagne étudie ses *propriétés* principales, son *mode de génération*, la *polarité* qui s'y lie, toutes notions importantes et utiles, qui ne figurent guère dans les livres d'enseignement français, soit d'Analyse, soit de Géométrie.

V. *Géométrie cinématique*. — C'est la théorie géométrique du mouvement, dans le plan et dans l'espace.

Dans le plan, l'auteur parle du centre instantané, détermine le mouvement le plus général par le roulement d'une courbe sur une autre, et en déduit des constructions géométriques pour les centres de courbure de certaines lignes définies par le mouvement lui-même ; il applique ces résultats aux épicycloïdes.

Dans l'espace, après le mouvement autour d'un point fixe, on étudie le mouvement le plus général, d'abord avec *un* degré de liberté, en faisant intervenir la théorie du complexe linéaire, puis avec *deux* degrés : c'est l'occasion, en particulier, d'exposer le théorème de *Schönemann-Mannheim*, avec ses principales conséquences, et aussi une très belle proposition de *Ribaucour*, sur un cas singulier de mouvement à deux paramètres.

Chaque théorie est, comme d'ordinaire, suivie d'exemples et d'applications ; des applications plus étendues terminent le Chapitre. Elles se rapportent aux *hélicoïdes*, aux *surfaces apsidales* et à la *surface de l'onde*, dont les propriétés utilisées en Physique sont établies avec beaucoup d'élégance.

VI. Dans un *Appendice* du plus haut intérêt, sont traitées diverses questions de complément ; signalons principalement les suivantes :

1° *Transformations birationnelles et quadratiques* dans le plan ;

2° *Représentation des surfaces sur le plan ;* cas des quadriques et des cubiques ; les 27 droites de la surface cubique ;

3° *Théorie des adjointes infinitésimales* et applications ;

4° *Attraction newtonienne d'une couche ellipsoïdale*.

En résumé, le Livre de M. d'Ocagne renferme, dans un petit

nombre de pages, des théories importantes que tous les étudiants en mathématiques, tous les ingénieurs, doivent posséder et savoir utiliser. Ils en retireront un double profit.

En premier lieu, ils y apprendront, sous un guide habile, le maniement des principales *méthodes gométriques :*

La *méthode de tranformation*, d'abord, qui ramène, automatiquement pour ainsi dire, une proposition à une autre déjà connue ou plus facile à établir.

La *méthode infinitésimale*, ensuite, dans laquelle, en faisant subir à certains éléments d'une figure des *variations* infiniment petites, on évalue les variations des autres éléments, pour remonter ensuite des différentielles aux fonctions elles-mêmes.

La *méthode cinématique*, enfin : on y imprime à la figure, dans le plan ou dans l'espace, un *déplacement*, auquel on applique les théorèmes généraux sur le mouvement, ce qui permet souvent de découvrir des propriétés de la figure elle-même.

En second lieu, le lecteur trouvera, dans le Livre de M. d'Ocagne, avec un grand nombre d'exemples poussés jusqu'au bout, des notions intéressantes qu'il chercherait souvent en vain dans les Ouvrages didactiques et qu'il ne rencontrerait que dans les Traités spéciaux ou dans les Mémoires originaux. A ce point de vue, on peut citer particulièrement l'*homologie axiale* de l'espace, le *groupe des inversions*, les *pinceaux* de droites, la *torsion géodésique*, la *géométrie des géodésiques*, sur une surface quelconque et sur l'ellipsoïde; les *complexes et congruences linéaires;* la *représentation sur le plan* des surfaces cubiques, et ces paragraphes ne sont pas moins utiles à l'analyste qu'au géomètre.

L'excellent choix, l'élégante exposition des questions traitées ne pourront que développer, chez les jeunes gens, l'esprit géométrique, tandis que le soin constant qu'a l'auteur, de rattacher toute théorie particulière à une théorie plus générale, développera leur curiosité. Ils auront à apprendre, même dans les paragraphes où M. d'Ocagne démontre géométriquement des résultats qu'ils connaissent par l'Analyse : qu'on jette seulement les yeux, pour s'en convaincre, sur les démonstrations des théorèmes de Malus et Dupin, sur celles qui concernent les géodésiques ou les courbes gauches en général.

La tâche de l'étudiant enfin sera facilitée par une rédaction nette, méthodique et, j'insiste là-dessus, toujours concise : les mathématiciens qui ont eu à écrire une démonstration géométrique savent combien il est difficile de s'y arrêter au point précis où l'évidence apparaît, et au delà duquel toute explication devient superflue et rebute le lecteur ; or, ce point précis, une longue habitude de l'enseignement de la Géométrie a appris à M. d'Ocagne à le discerner exactement, et c'est un des mérites de son Livre que tant de concision, toujours unie à tant de clarté.

Souhaitons que la lecture d'un Ouvrage aussi riche d'idées, aussi clair, aussi attrayant, puisse réveiller dans la patrie de Poncelet, de Charles et de Darboux, le goût des méthodes géométriques. G. HUMBERT.

MÉLANGES.

SUR LES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE LA MÉCANIQUE ANALYTIQUE;

PAR M. H. VERGNE

(*suite et fin*).

III. — LE PROBLÈME INVERSE DE LA MÉCANIQUE CÉLESTE.

12. La méthode qui vient d'être exposée pour le calcul des perturbations ne diffère pas essentiellement de la méthode classique de la *variation des constantes*. Seulement, ici, au lieu de calcules les variations des constantes d'intégration C, nous calculons directement les variations des *variables* ξ_i, η_i elles-mêmes, au moyen des formules (10), que je récris

$$(10) \qquad \delta\xi_1 = -\varepsilon\frac{\partial\sigma_1}{\partial\eta_i}, \qquad \delta\eta_i = \varepsilon\frac{\partial\sigma_1}{\partial\xi_i}.$$

La fonction $\sigma_1(\xi_i; \eta_i; t)$ satisfait, rappelons-le, à l'équation $(6)^{bis}$

que je récris également

$$(6)^{bis} \qquad \frac{\partial\sigma_1}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial\xi_i}\frac{\partial F}{\partial\eta_i} - \frac{\partial\sigma_1}{\partial\eta_i}\frac{\partial F}{\partial\xi_i}\right) = -f(\xi_i;\,\eta_i;\,t).$$

Ces formules ne sont pas seulement très simples au point de vue formel, mais elles paraissent aussi susceptibles d'être utilisées effectivement en Mécanique céleste. Elles donnent la solution générale de ce problème : *Connaissant la fonction perturbatrice qui trouble un mouvement connu, en déduire les perturbations.* Appliquées au problème des trois corps, ou à l'étude du mouvement d'une planète autour de son centre de gravité, elles conduiraient sans doute aux mêmes calculs, ou à peu près, que les méthodes usuelles.

Mais, en outre, ces mêmes formules permettent aussi d'aborder assez simplement le *problème inverse*, que nous allons étudier dans ce paragraphe : *Ayant observé les perturbations d'un mouvement connu, en déduire la fonction perturbatrice qui les produit* (problème de Le Verrier).

13. Nous examinerons successivement plusieurs cas :

Premier cas. — Ni la fonction caractéristique $F(\xi_i;\,\eta_i)$ du mouvement non troublé, ni la fonction perturbatrice $f(\xi_i;\,\eta_i)$ ne dépendent explicitement du temps.

Il se trouve qu'alors la fonction $\sigma_1(\xi_i;\,\eta_i;\,t)$, intégrale de $(6)^{bis}$, est telle que $\frac{\partial\sigma_1}{\partial t}$ est une intégrale première du mouvement non troublé; en effet $(6)^{bis}$ différentiée par rapport à t nous donne l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial t},\, F\right) = 0,$$

qui prouve que $\frac{\partial\sigma_1}{\partial t}$ reste constant dans le mouvement non troublé; par suite, dans le mouvement troublé, sa variation est de l'ordre de ε, c'est-à-dire très petite. L'équation $(6)^{bis}$ s'écrit donc

$$-f = \sum_i \left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial\xi_i}\frac{\partial F}{\partial\eta_i} - \frac{\partial\sigma_1}{\partial\eta_i}\frac{\partial F}{\partial\xi_i}\right) + \text{const.},$$

ou encore, en tenant compte de (10) et de (A),

$$(11)\qquad -\varepsilon f = \sum_i \left(\delta\eta_i \frac{d\xi_i}{dt} - \delta\xi_i \frac{d\eta_i}{dt}\right) + \text{const.}$$

Ainsi, à une constante additive près, la quantité

$$(12)\qquad \sum_i \left(\delta\eta_i \frac{d\xi_i}{dt} - \delta\xi_i \frac{d\eta_i}{dt}\right),$$

qui est fournie par l'observation, donne à chaque instant la valeur numérique de la fonction perturbatrice [1].

Je suppose, par exemple, que le mouvement étudié soit celui d'une planète P, attirée par un centre *fixe* (Soleil); le mouvement non troublé est képlérien. L'observation y décèle des perturbations $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$, et l'on admet que ces perturbations sont dues à la présence d'une masse perturbatrice m, que l'on suppose *fixe* elle aussi (afin que f, comme F, ne dépende pas explicitement du temps). L'expression (12) fournira à chaque instant la valeur du potentiel perturbateur $\varepsilon f = \frac{m}{r}$, où r désigne la distance mP. On pourra donc déterminer l'emplacement de l'astre perturbateur, et sa masse m.

Deuxième cas. — La fonction caractéristique $F(\xi_i; \eta_i)$ du mouvement non troublé ne dépend pas explicitement du temps, mais la fonction perturbatrice $f(\xi_i; \eta_i; t)$ en dépend.

Alors, $\frac{\partial\sigma_1}{\partial t}$ n'est plus, comme tout à l'heure, une intégrale pre-

---

[1] Cette formule (11) est d'ailleurs évidente. Il suffit, en effet, d'écrire l'intégrale des forces vives

$$F(\xi_i; \eta_i) = \text{const.}$$

pour le mouvement non troublé, et aussi

$$F(\xi_i + \delta\xi_i; \eta_i + \delta\eta_i) + \varepsilon f(\xi_i + \delta\xi_i; \eta_i + \delta\eta_i) = \text{const.}$$

pour le mouvement troublé. Retranchant membre à membre ces deux équations des forces vives, il vient en négligeant ε^2 :

$$\sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial \xi_i}\delta\xi_i + \frac{\partial F}{\partial \eta_i}\delta\eta_i\right) + \varepsilon f(\xi_i; \eta_i) = \text{const.},$$

équation identique à (11), d'après les équations (A) elles-mêmes.

mière du mouvement non troublé; mais, en différentiant toujours $(6)^{bis}$ par rapport à t, nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial t}, F\right) = -\frac{\partial f}{\partial t},$$

ce qui nous montre que, dans le mouvement non troublé, la *dérivée totale* de $\frac{\partial\sigma_1}{\partial t}$ est égale à $-\frac{\partial f}{\partial t}$, par suite que la variation de $\frac{\partial\sigma_1}{\partial t}$ entre deux époques t_0 et t est égale à $-\int_{t_0}^{t}\frac{\partial f}{\partial t}\,dt$ (¹); cette variation est la même, à des termes près de l'ordre de ε, dans le mouvement troublé.

L'équation (11) se trouve alors remplacée par la suivante :

$$(13) \qquad -\varepsilon f + \varepsilon\int_{t_0}^{t}\frac{\partial f}{\partial t}\,dt = \sum_i\left(\delta\eta_i\frac{d\xi_i}{dt} - \delta\xi_i\frac{d\eta_i}{dt}\right) + \text{const.},$$

où le Σ du second membre est toujours donné par l'observation. Ce n'est donc plus la valeur numérique de la fonction perturbatrice f elle-même que fournit l'observation, mais celle de $f - \int\frac{\partial f}{\partial t}\,dt$ (²).

Je suppose, par exemple, que le mouvement étudié soit celui d'une planète P (Uranus ou Neptune) attirée par un centre *fixe* (Soleil). Le mouvement non troublé est képlérien, et ce mouvement képlérien est caractérisé par six variables canoniques ξ_1, ξ_2,

---

(¹) Il est bien entendu que, dans l'expression $\frac{\partial f}{\partial t}$ placée sous le signe $\int_{t_0}^{t}$, on remplacera les ξ_i, η_i par leurs valeurs en fonction du temps t (valeurs non troublées). On peut être surpris à première vue de nous voir différentier l'équation $(6)^{bis}$ pour l'intégrer ensuite. Mais on remarquera que la différentiation $\frac{\partial}{\partial t}$ est faite partiellement par rapport à la lettre t, en laissant les ξ_i, η_i fixes, tandis que l'intégration est faite totalement en faisant varier aussi les ξ_i, η_i.

(²) Il n'est d'ailleurs pas étonnant que l'observation des perturbations ne nous fournisse pas la valeur même de f. En effet, ces perturbations ne dépendent que des valeurs des dérivées $\frac{\partial f}{\partial\xi_i}$, $\frac{\partial f}{\partial\eta_i}$, qui figurent dans les équations canoniques troublées (B), et pas du tout de la valeur de la dérivée $\frac{\partial f}{\partial t}$, qui ne figure nulle part.

ξ_3, η_1, η_2, η_3. L'observation y décèle des perturbations $\delta\xi_1, \ldots, \delta\eta_3$, et l'on admet que ces perturbations sont dues à l'action d'une masse perturbatrice inconnue m (planète transneptunienne) que l'on suppose décrire, elle aussi, autour du Soleil fixe, une orbite keplérienne dont les six éléments $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ sont à déterminer (rien n'exige que ces six éléments $\alpha_1, \ldots, \beta_3$ soient canoniques; pour simplifier nous les supposerons constants dans le mouvement képlérien).

On commencera par exprimer la fonction perturbatrice $\frac{m}{r}$ en fonction de $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$, ce que l'on sait faire, soit

$$\frac{m}{r} = mf(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3; t);$$

on prendra sa dérivée partielle $m\frac{\partial f}{\partial t}$ en regardant $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ comme des constantes; puis on calculera $m\int\frac{\partial f}{\partial t}\,dt$ en regardant maintenant $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ comme les fonctions du temps que donne le mouvement képlérien. En procédant ainsi, l'expression

$$-mf - m\int\frac{\partial f}{\partial t}\,dt$$

devient une fonction de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ et de t, que l'on sait exprimer, soit $m\psi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, t)$.

Alors l'équation (13) s'écrit

$$m\psi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, t) = \sum_i \left(\delta\eta_i\frac{d\xi_i}{dt} - \delta\xi_i\frac{d\eta_i}{dt}\right) + \text{const.},$$

où la somme Σ du second membre est fournie à chaque instant par les observations. Comme il y a sept inconnues $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, m$, et en outre la constante du second membre qui en constitue une huitième, il faudra (théoriquement) observer les perturbations à huit époques différentes pour déterminer les six éléments $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$, de l'orbite képlérienne de la planète troublante, et sa masse m. Rien n'empêchera, bien entendu, de se servir d'un plus grand nombre d'observations, qui fourniront des équations surabondantes que l'on traitera par la méthode des moindres carrés.

Troisième cas. — La fonction caractéristique $F(\xi_i; \eta_i; t)$ du problème non troublé et la fonction perturbatrice $f(\xi_i; \eta_i; t)$ dépendent toutes deux explicitement du temps.

Le mouvement non troublé serait par exemple celui d'une petite planète soumise à l'attraction centrale d'un Soleil fixe et aussi à l'attraction d'une grosse planète (Jupiter) décrivant autour du Soleil fixe une circonférence (problème restreint de H. Poincaré). Et les perturbations seraient dues à l'action d'une autre planète (telle que Mars ou Saturne, si ces planètes étaient à découvrir).

Comme autre exemple, on peut prendre pour mouvement non troublé le mouvement de la Lune autour de la Terre en tenant compte de l'action du Soleil, autour duquel on supposerait que la Terre décrit une circonférence (problème restreint). Et l'on essaierait d'expliquer les écarts entre la théorie et les observations par les perturbations dues à un astre inconnu (masse intra-mercurielle de M. de Saint-Blancat).

Dans ce cas, nous aurons, toujours en différentiant l'équation $(6)^{bis}$ par rapport à la lettre t :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial t}, F\right) = -\frac{\partial f}{\partial t} - \left(\sigma_1, \frac{\partial F}{\partial t}\right),$$

ce qui montre que la *dérivée totale* de $\frac{\partial \sigma_1}{\partial t}$ est égale comme tout à l'heure à $-\frac{\partial f}{\partial t}$ diminuée du terme

$$\left(\sigma_1, \frac{\partial F}{\partial t}\right) = \sum_i \delta\eta_i \frac{\partial^2 F}{\partial t\, \partial \eta_i} + \delta\xi_i \frac{\partial^2 F}{\partial t\, \partial \xi_i};$$

ce terme, que l'on peut appeler $\delta \frac{\partial F}{\partial t}$, représente l'augmentation de $\frac{\partial F}{\partial t}$ quand les ξ_i, η_i augmentent respectivement de $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$: il est connu en fonction du temps puisque les perturbations $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$ le sont par les observations.

On sera donc ramené, comme dans le cas précédent, à connaître en fonction du temps les valeurs numériques de

$$-\varepsilon f - \varepsilon \int_{t_0}^{t} \frac{\partial f}{\partial t} dt,$$

d'où l'on déduira, exactement de la même manière, les valeurs des paramètres α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3, dont dépend le mouvement képlérien de la planète perturbatrice, et la masse m de cette planète.

La seule différence est que l'équation (13) est remplacée par la suivante :

$$(14)\quad -\varepsilon f + \varepsilon \int_{t_0}^{t} \frac{\partial f}{\partial t}\,dt = \sum_i \left(\delta\eta_i \frac{d\xi_i}{dt} - \delta\xi_i \frac{d\eta_i}{dt}\right) - \int_{t_0}^{t} \delta \frac{\partial F}{\partial t}\,dt + \text{const.},$$

où le second membre est connu en fonction du temps par l'observation ([1]).

On voit donc que, dans tous les cas, l'observation permet de déterminer la fonction perturbatrice, ou, pour mieux dire, les paramètres constants dont on suppose à l'avance que cette fonction perturbatrice dépend.

IV. — Cas général de la Mécanique analytique.

14. Nous allons maintenant revenir au problème général de la Mécanique analytique, c'est-à-dire à la transformation l'un dans l'autre de deux systèmes canoniques *quelconques*.

([1]) Nous remarquerons encore que cette formule (14) est, comme la formule (11), très facile à obtenir directement. Nous n'avons plus, cette fois-ci, les équations des forces vives; mais, nous avons, à la place, les deux suivantes : pour le mouvement non troublé

$$\left(\frac{d}{dt} - \frac{\partial}{\partial t}\right) F(\xi_i;\ \eta_i;\ t) = 0,$$

et pour le mouvement troublé

$$\left(\frac{d}{dt} - \frac{\partial}{\partial t}\right) [F(\xi_i + \delta\xi_i;\ \eta_i + \delta\eta_i;\ t) + \varepsilon f(\xi_i + \delta\xi_i;\ \eta_i + \delta\eta_i;\ t)] = 0.$$

Retranchant membre à membre, il vient, en négligeant ε^2,

$$\left(\frac{d}{dt} - \frac{\partial}{\partial t}\right)(\delta F + \varepsilon f) = 0,$$

équation qui peut s'écrire

$$-\varepsilon \frac{df}{dt} + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{d\,\delta F}{dt} - \delta \frac{\partial F}{\partial t}$$

et qui, intégrée entre t_0 et t, n'est autre que l'équation (14).

Nous ne changerons pas pour cela les notations : nous reprenons nos deux systèmes d'équations canoniques (A) et (B) considérés au n° 7 ; seulement, maintenant, la fonction perturbatrice εf *n'est plus supposée très petite*, le paramètre ε peut acquérir des valeurs notables, par exemple la valeur 1.

Nous ne changeons pas non plus la méthode, nous conservons les formules de transformation (5), la fonction σ satisfaisant toujours à l'équation de Jacobi (6).

Développant cette fonction $\sigma(x_i; \eta_i; t)$ suivant les puissances de ε, nous avons vu au n° 7 comment les coefficients successifs σ_1, σ_2, ..., σ_k, ... pouvaient se calculer chacun par *une* quadrature. Nous allons montrer que *le coefficient σ_k de ε^k dans ce développement contient $(t - t_0)^k$ en facteur*. La série

$$\sigma = \varepsilon\sigma_1 + \varepsilon^2\sigma_2 + \ldots + \varepsilon^k\sigma_k + \ldots$$

sera donc convergente, *même si ε est grand, pourvu que $(t - t_0)$ soit assez petit*. Et alors le problème sera entièrement résolu, au moins pour les petites valeurs du temps, par les formules de transformation (5), ainsi qu'il a été annoncé au n° 9.

Tout d'abord on voit sur la formule (9) que σ_1 contient $(t - t_0)$ en facteur puisqu'il s'annule pour $t = t_0$.

Ensuite, le calcul de σ_2 s'effectue exactement comme celui de σ_1, par une formule analogue à (9), en mettant le signe de quadrature $\int_{t_0}^{t}$ par-devant le second membre de l'équation $(6)^{ter}$ exprimé au moyen des constantes d'intégration C. Or on vérifie immédiatement que ce second membre de $(6)^{ter}$ est lui-même de l'ordre de $(t - t_0)$. Donc σ_2 est de l'ordre de $(t - t_0)^2$.

De proche en proche, on vérifiera sans peine que le second membre de l'équation $(6)^{quater}$ qui donne σ_k est de l'ordre de $(t - t_0)^{k-1}$. Donc σ_k, qui s'obtient en plaçant le signe de quadrature $\int_{t_0}^{t}$ par-devant ce second membre, est de l'ordre de $(t - t_0)^k$, comme nous voulions l'établir.

15. Nous terminerons par une remarque sur un cas très particulier en apparence, mais en réalité très général : nous allons supposer que la fonction caractéristique F du système (A) est

identiquement nulle, si bien que les ξ_i, η_i seront des constantes. Le système (B) devenu

$$\text{(B)}' \qquad \frac{dx_i}{dt} = \varepsilon \frac{\partial f}{\partial y_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\varepsilon \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

est alors un système *quelconque* d'équations canoniques (en y faisant croître ε jusqu'à 1) dont les formules (5) donneront les intégrales générales, les ξ_i, η_i jouant le rôle de constantes d'intégration. L'équation (6) à laquelle doit satisfaire la fonction $\sigma(x_i; \eta_i; t)$ est devenue

$$(15) \qquad \frac{\partial\sigma}{\partial t} + \varepsilon f\left(x_i; \eta_i + \frac{\partial\sigma}{\partial x_i}; t\right) = 0.$$

On voit toute l'analogie, presque l'identité, de cette remarque avec ce théorème classique de Jacobi : *Si l'on possède une intégrale complète* $\sigma(x_i; \eta_i; t)$ *de l'équation aux dérivées partielles*

$$(16) \qquad \frac{\partial\sigma}{\partial t} + \varepsilon f\left(x_i; \frac{\partial\sigma}{\partial x_i}; t\right) = 0$$

contenant n constantes arbitraires $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$, *on sait écrire immédiatement les intégrales générales des équations* (B)$'$. La seule différence est que les η_i figurent explicitement dans l'équation (15) et pas dans l'équation (16).

La méthode exposée permet de développer σ suivant les puissances de ε. En faisant, dans cette série, $\varepsilon = 1$, elle convergera pour les petites valeurs du temps, ainsi qu'il a été dit au n° **14** : nous observerons, d'ailleurs, que cela est tout à fait évident dans le cas où la fonction caractéristique f du système (B)$'$ ne dépend pas explicitement du temps, puisqu'alors l'équation (15) s'écrit

$$\frac{\partial\sigma}{\partial(\varepsilon t)} + f\left(x_i; \eta_i + \frac{\partial\sigma}{\partial x_i}\right) = 0,$$

et son intégrale σ peut être développée suivant les puissances de la variable εt, ou, si l'on préfère, de la variable $\varepsilon(t - t_0)$.

Au point de vue formel, et pour les petites valeurs du temps, la résolution du système d'équations canoniques (B)$'$ est ainsi complète.

SUR LES SOMMES ABÉLIENNES DE VOLUMES CYCLIDO-CONIQUES;

Par M. A. BUHL.

---

1. J'étudie brièvement, dans ce qui suit, la somme des volumes coniques limités, dans un cône quelconque, par les quatre cloisons que ce cône détermine dans une cyclide quelconque.

D'après la formule de Stokes ou, plus exactement, d'après sa forme particulière

$$\int\int_{\sigma}\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial z}\right)(\alpha x+\beta y+\gamma z)\,d\sigma=\int_{\Sigma}\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ F & G & H \end{vmatrix}$$

où F, G, H sont homogènes d'ordre -2, la somme abélienne en question est exprimable soit comme intégrale de surface, soit comme intégrale de ligne. Dans de tels cas, c'est l'intégrale de ligne qui s'impose en fin de compte car, pour définir le cône, on ne doit se donner que le sommet et le contour Σ sur lequel s'appuient les génératrices. Les volumes attachés à une surface pouvant être considérés comme des intégrales de surface, la formule précédente a un rôle tout indiqué. On y retrouve alors une expression

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial z},$$

ayant une forme rationnelle connue, pour laquelle il s'agit notamment de décider si F, G, H seront rationnels aussi. C'est une recherche difficile en général et qui joue un rôle capital dans la *Théorie des fonctions algébriques de deux variables* de M. Émile Picard (t. II, p. 478 et *passim*).

Mais ici, il se trouve que la chose est très simple et c'est ce que j'ai voulu noter.

Les belles recherches de M. G. Humbert, sur les applications du théorème d'Abel à la Géométrie, permettent de prévoir qu'il y a bien aussi quelques remarques géométriques intéressantes à faire quant au sujet précédent; j'utilise notamment le Mémoire

Sur quelques propriétés des aires sphériques (*Journal de Mathématiques*, 1888).

Quant à ceux de mes propres travaux auxquels je fais allusion, encore qu'il ne soit point indispensable de s'y reporter, ce sont surtout les Mémoires relatifs à la formule de Stokes publiés, dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, à partir de 1910.

2. Considérons la surface algébrique d'équation

$$(1)\qquad \varphi_m + \varphi_{m-1} + \ldots + \varphi_1 + \varphi_0 = 0.$$

Soit un contour fermé quelconque Σ, tout à fait indépendant de la surface (1), servant de directrice à un cône $O\Sigma$. Ce cône détermine, sur (1), m cloisons; entre chaque cloison et le sommet O du cône, on conçoit un volume conique τ_i et, pour la somme des m volumes ainsi définis, on a

$$(2)\qquad \sum \tau_i = \iint_\sigma \left(- \frac{\varphi_{m-1}^3}{3\varphi_m^3} + \frac{\varphi_{m-1}\varphi_{m-2}}{\varphi_m^2} - \frac{\varphi_{m-3}}{\varphi_m} \right)(\alpha x + \beta y + \gamma z)\, d\sigma.$$

L'intégrale double est prise sur une cloison σ établie de façon quelconque sur le contour Σ; cette cloison n'a donc aucune relation avec la surface (1). En l'élément $d\sigma$ de σ on considère une normale de cosinus directeurs α, β, γ.

Si l'on pose

$$(3)\qquad A = - \frac{\varphi_{m-1}^3}{3\varphi_m^3} + \frac{\varphi_{m-1}\varphi_{m-2}}{\varphi_m^2} - \frac{\varphi_{m-3}}{\varphi_m},$$

on a là une expression homogène d'ordre -3. Si on lui donne la forme

$$(4)\qquad A = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z},$$

avec F, G, H homogènes d'ordre -2, la forme particulière, indiquée pour la formule de Stokes, permet d'écrire (2) sous la forme remarquablement symétrique

$$(5)\qquad \sum \tau_i = \int_\Sigma \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ F & G & H \end{vmatrix}.$$

De plus, F, G, H, d'après (4) et d'après la rationalité de A, sont, en général, des expressions rationnelles *augmentées d'un terme logarithmique*. Telle est la forme du théorème d'Abel particulière à la question ; elle porte à étudier les surfaces plus particulièrement simples et remarquables pour lesquelles (5) s'exprimera *sans termes logarithmiques*. Nous allons voir que les *cyclides* les plus générales sont de telles surfaces.

3. Par définition, une *cyclide* est une surface quartique qui passe deux fois par le cercle imaginaire de l'infini (¹). De ce fait, on peut lui attribuer immédiatement l'équation

$$r^4 + 2\lambda_1 r^2 + \mu_2 + \mu_1 + \mu_0 = 0$$

en laquelle

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

et où λ_1, μ_2, μ_1, μ_0 sont des polynomes homogènes dont le degré est indiqué par l'indice.

L'origine O est alors un point tout à fait quelconque par rapport à la cyclide. Ce rôle quelconque ne sera pas altéré par une rotation du trièdre des coordonnées qui permettra de ramener μ_2 à la forme

$$2KP_2 = 2K(Ax^2 + By^2 + Cz^2)$$

et, pour équation de la cyclide, nous pourrons écrire définitivement

$$(6) \qquad r^4 - 2P_1 r^2 + 2KP_2 - 4m^2 Q_1 + n^4 = 0$$

en posant

$$P_1 = hx + ky + lz, \qquad Q_1 = ax + by - cz.$$

Les coefficients K, m sont superflus mais destinés à rendre

(¹) Les deux exposés fondamentaux concernant les cyclides sont vraisemblablement l'Ouvrage de Gaston Darboux *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques* (1872 ; réimpression 1896, A. Hermann) et le Mémoire purement géométrique *Sur les surfaces cyclides* de M. G. Humbert (*Journal de l'École Polytechnique*, 1885).

Un excellent et récent Ouvrage de M. C.-M. Jessop, de Cambridge, intitulé *Quartic Surfaces with singular points*, contient un Chapitre sur les cyclides où sont habilement résumés les résultats les plus importants dus aux deux géomètres précédents. J'ai écrit, pour le présent *Bulletin* (p. 145), une analyse de ce nouvel Ouvrage.

l'équation (6) homogène par rapport à toutes les lettres qui y figurent; cela permettra d'exprimer les volumes qu'il s'agit d'étudier comme quantités homogènes du troisième ordre par rapport aux longueurs.

Ceci posé, on écrit immédiatement

$$(7)\qquad A = \frac{8P_1^3}{3r^6} - \frac{4KP_1P_2}{r^6} + \frac{4m^2Q_1}{r^4}.$$

Remarquons que

$$\frac{P_1P_2}{r^6} = \frac{Ahx + Bky + Clz}{(x^2+y^2+z^2)^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}\right)$$

en posant

$$(8)\qquad \begin{cases} F = \dfrac{h}{2}\,\dfrac{(B-A)y^2 + (C-A)z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \\[2ex] G = \dfrac{k}{2}\,\dfrac{(C-B)z^2 + (A-B)x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \\[2ex] H = \dfrac{l}{2}\,\dfrac{(A-C)x^2 + (B-C)y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}. \end{cases}$$

Dès lors, le second membre de (2) est la somme des trois expressions

$$(9)\qquad \frac{8}{3}\int\!\!\int_\sigma \frac{(hx+ky+lz)^3}{(x^2+y^2+z^2)^3}(\alpha x + \beta y + \gamma z)\,d\sigma,$$

$$(10)\qquad 4K\int\!\!\int_\sigma \frac{Ahx + Bky + Clz}{(x^2+y^2+z^2)^2}(\alpha x + \beta y + \gamma z)\,d\sigma,$$

$$(11)\qquad 4m^2\int\!\!\int_\sigma \frac{ax + by + cz}{(x^2+y^2+z^2)^2}(\alpha x + \beta y + \gamma z)\,d\sigma,$$

susceptibles d'interprétations géométriques remarquables, et, en outre, d'une quatrième intégrale de surface d'une forme plus particulière à la question. Cette quatrième intégrale, d'après la forme de la formule de Stokes déjà invoquée, peut se remplacer immédiatement par l'intégrale de ligne

$$(12)\qquad 2K\int_\Sigma \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ F & G & H \end{vmatrix}$$

en laquelle, bien entendu, F, G, H sont les expressions (8).

4. Étudions maintenant les interprétations géométriques, en effet très remarquables, qui se peuvent donner des intégrales doubles (9), (10), (11).

Soit d'abord la sphère passant par l'origine

$$(S_1) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2(hx + ky + lz) = 0.$$

Le cône $O\Sigma$ y détermine un seul volume sphéro-conique τ_1 qui peut être évalué par la formule (2); ce volume a alors exactement l'expression (9).

Rappelons en outre que, si l'on considère une sphère de centre (a, b, c) et de rayon R, le cône $O\Sigma$ y découpe deux cloisons d'aires σ_2 et σ_1, la différence de ces aires étant

$$(13) \qquad \sigma_2 - \sigma_1 = 4\,\mathrm{R} \int\int_\sigma \frac{ax + by + cz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} (\alpha x + \beta y + \gamma z)\, d\sigma.$$

Donc, si l'on considère la sphère

$$(S_2) \qquad (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = m^2$$

et si, pour cette sphère, la différence (13) est δ_2, on voit immédiatement que l'expression (11) est $m\delta_2$.

Si enfin on considère la sphère

$$(S_3) \qquad \left(x - \frac{\mathrm{A}h}{\mathrm{K}}\right)^2 + \left(y - \frac{\mathrm{B}k}{\mathrm{K}}\right)^2 + \left(z - \frac{\mathrm{C}l}{\mathrm{K}}\right)^2 = \mathrm{K}^2$$

et si, pour cette sphère, la différence (13) est δ_3, l'expression (10), au signe près, est $\mathrm{K}\delta_3$.

En résumé, l'expression (2), c'est-à-dire la somme abélienne des volumes coniques déterminés, par le cône $O\Sigma$, dans la cyclide (6), est exprimée par

$$(14) \quad \tau_1 + m\delta_2 - \mathrm{K}\delta_3 + \mathrm{K}\int_\Sigma \frac{1}{r^4} \begin{vmatrix} dx & x & h & [(\mathrm{B} - \mathrm{A})y^2 - (\mathrm{C} - \mathrm{A})z^2] \\ dy & y & k & [(\mathrm{C} - \mathrm{B})z^2 - (\mathrm{A} - \mathrm{B})x^2] \\ dz & z & l & [(\mathrm{A} - \mathrm{C})x^2 - (\mathrm{B} - \mathrm{C})y^2] \end{vmatrix}.$$

Grâce aux précautions prises, ce résultat est manifestement homogène et du troisième ordre par rapport aux longueurs.

5. Il est maintenant visible que l'expression (14) peut être con-

sidérée comme une somme d'intégrales de ligne ne contenant sous les signes d'intégration que des fractions rationnelles en x, y, z.

Des applications immédiates de la formule de Stokes transforment les différences d'aires sphériques, telles que (13), en de telles intégrales de ligne; c'est ce résultat qui a été obtenu directement par M. G. Humbert.

Il y a quelque chose de complètement analogue pour le volume sphéro-conique τ_1, comme je l'ai montré dans mon Quatrième Mémoire.

Enfin les travaux de M. G. Humbert et les miens ont fait connaître un certain nombre d'intégrales, telles que le second membre de (5), qui, pour exprimer certains êtres géométriques, contiennent des fonctions rationnelles F, G, H de constitutions diverses. Il convient d'y adjoindre l'intégrale explicitement écrite en (14) qui, ajoutée à des termes déjà étudiés en d'autres questions, exprime une somme abélienne de volumes cyclido-coniques. Voilà pour le point de vue analytique.

6. Au point de vue géométrique, la décomposition (14) peut suggérer des rapprochements également intéressants. Ainsi la cyclide (6) est le lieu de la *cyclique*

(15) $$r^2 - 2P_1 = \lambda, \qquad \lambda r^2 + 2KP_2 - 4m^2Q_1 - n^4 = 0,$$

variable avec le paramètre λ. Or *toutes ces cycliques sont tracées sur des sphères concentriques à* (S_1), la sphère (S_1) étant celle dans laquelle le cône $O\Sigma$ détermine τ_1.

On peut aussi se proposer d'étudier les cas où disparaît l'intégrale explicitement écrite dans (14).

Cela arrive notamment pour h, k, l nuls, ce qui fait disparaître aussi (9) et (10). La cyclide est alors rapportée à son *centre*, au sens général de ce mot. La somme abélienne (2) s'exprime alors uniquement par une différence d'aires sphériques, cas spécialement étudié dans mon Cinquième Mémoire et dans une Note des *Comptes rendus* (19 mars 1917).

Le cas $A = B = C$ réduit la somme (14) à ses trois premiers termes. Alors la seconde équation (15) représente une sphère, tout comme la première. Il s'agit alors d'une cyclide dégénérée pour laquelle l'une des générations possibles, comme surface cerclée,

est immédiatement en évidence. Mais il est justement remarquable qu'une cyclide puisse dégénérer de manière à contenir des sommes abéliennes de volumes coniques exprimables par des volumes et des aires sphéro-coniques.

7. Entre l'époque de la rédaction de cette Note et celle de la correction des épreuves, les *Principes de Géométrie analytique* de Gaston Darboux ont été publiés, précédés d'ailleurs de fort peu par la mort de leur illustre auteur. Que la disparition du Maître permette, au moins, de dire toute l'admiration soulevée par sa dernière publication didactique; il y a là un livre prodigieux, absolument incomparable parmi ceux de titre aussi modeste. Il reprend l'étude des cyclides, reproduit tout ce que contenait l'Ouvrage *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques* et y ajoute encore.

Ce m'est une bonne fortune que d'être revenu à l'étude des cyclides peu avant le moment où Gaston Darboux allait réattirer l'attention sur elles. Il se pourrait que ces surfaces, qui ont déjà si brillamment illustré certaines théories, telles celle de l'inversion et celle des coordonnées pentasphériques, puissent illustrer encore la théorie des intégrales attachées aux surfaces algébriques : ce qui précède est une minime contribution en ce sens. Il me faudra vraisemblablement y revenir, ne serait-ce que pour profiter de la symétrie particulièrement remarquable présentée par la cyclide de Dupin.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

PICARD (Émile). — *Les Sciences mathématiques en France depuis un demi-siècle.* Une brochure in-8 (25-16) de 26 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1917. Prix : 2fr.

Table des matières. — I. Les fonctions analytiques. — II. Les équations différentielles. — III. Théorie des nombres; Algèbre et Géométrie. — IV. Théorie des fonctions de variables réelles et des ensembles. — V. Quelques remarques finales.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XLI.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XLI; 1917. — PREMIÈRE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES AUTEURS.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

MÉLANGES.

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS

D'ANALYSES.

FIN DES TABLES DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XLI.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
37460 Quai des Grands-Augustins, 55.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Ernest Lebon*, Secrétaire de la Rédaction, rue des Écoles, 4 *bis*, Paris, 5e.

[illegible] Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS et Cie, quai des Grands-Augustins, 55.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES.
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX ET É. PICARD,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. P. APPELL, É. CARTAN, J. DRACH, C. GUICHARD, J. HADAMARD, G. KŒNIGS,
LE. LEBON, G. LORIA, S. RINDI, H. G. ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL,
CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY,
DE 1886 A 1905 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY
ET DE 1905 A 1910 PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XLI. — ANNÉE 1917.

(LIIe VOLUME DE LA COLLECTION.)

SECONDE PARTIE.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS,
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1917

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SECONDE PARTIE.

REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

THE QUATERLY JOURNAL OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS (¹).

Tome XXXVII, 1906.

Young (*W.-H.*). — On regions and sets of regions (1-35).

Une *région* est une partie du plan qui peut être recouverte par des triangles empiétant les uns sur les autres ou qui peut être engendrée par un triangle mobile et de forme variable.

Tout point intérieur au moins à un triangle est dit *intérieur* à la région.

Tout point extérieur à tous les triangles est dit *extérieur*.

Tout point qui n'est ni intérieur ni extérieur est dit *point de coupure* (edge point).

Si l'on ne tient compte que des points intérieurs à une région, on peut toujours la supposer engendrée par une suite *dénombrable* de triangles; mais en opérant ainsi on peut laisser des points de coupure, qui deviennent des points extérieurs.

Les points extérieurs se divisent en *points extérieurs ordinaires* et *points extérieurs limites*. Ces derniers sont définis par la propriété que, en décrivant autour de l'un d'eux comme centre un cercle quelconque, il y aura dans ce cercle des points intérieurs à la région. Si tous ces points font partie de la région, celle-ci est dite *close*. Les points extérieurs limites et les points de cou-

(¹) Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XXXIV, 1910, p. 90.

pure sont compris sous la dénomination commune de *points frontière*, et leur ensemble forme ce qu'on appelle la *frontière* de la région.

Tout point frontière qui a la propriété que, dans tout cercle ayant ce point comme centre, il y a, outre ce point lui-même, à la fois des points intérieurs et des points extérieurs, sera nommé un *point de bordure* (rim), et leur ensemble sera nommé la *bordure* de la région. Ces points forment un ensemble parfait de points qui n'est dense nulle part.

Supposons qu'une région close puisse être placée tout entière entre deux droites perpendiculaires à une même direction D et de distance *e*, la limite inférieure de *e* est dite *largeur* (spann) de la région, *dans la direction* D. La limite supérieure des largeurs de la région, dans toutes les directions, est dite la *largeur* de la région. Une région *finie* est une région qui a une *largeur* finie.

Une série de points, dense nulle part, et telle que, étant donnée une quantité quelconque *e*, si l'on décrit de chacun de ces points comme centre un cercle de rayon inférieur ou égal à *e*, ces cercles engendrent une région dont la largeur dans aucune direction ne décroît indéfiniment lorsque *e* décroît, est dite un *arc de courbe*, ou simplement une *courbe*.

Dans ce sens, ni un point, ni un segment de droite ne sont des courbes, mais une ligne polygonale en est une. La courbe de Péano, qui remplit un carré, n'est pas non plus une courbe, de ce point de vue.

On appelle *courbe fermée* une courbe telle qu'étant donnés deux quelconques de ses points P et Q, la courbe peut être divisée en deux arcs de courbe tels que, avec P et Q, ils constituent la courbe tout entière, tels de plus que P et Q soient des points limites de chaque arc, et qu'aucun point d'un des arcs ne soit un point limite de l'autre.

Lorsque la bordure d'une région finie est un arc de courbe, et que la frontière de cette région ne se compose que de points de bordure, la région est dite *simplement connexe*. La courbe bordure n'est pas nécessairement une courbe fermée. Ce n'est pas non plus nécessairement une courbe de Jordan (courbe dont les points sont en relation biunivoque avec ceux d'un segment de droite).

Si une suite dénombrable de régions R_1, R_2, ..., R_n, ... est telle que chacune soit à l'intérieur de la précédente, si les largeurs de R_n dans deux directions ne décroissent pas indéfiniment, si de plus les points communs à ces régions forment un ensemble qui n'est dense nulle part, ces points communs forment un arc de courbe.

Pour plus de simplicité l'auteur s'est borné à la considération de l'espace à deux dimensions, mais beaucoup de ses résultats s'étendent sans difficulté à celui à *n* dimensions.

Glaisher (J.-W.). — The arithmetical functions $P(m)$, $Q(m)$, $\Omega(m)$ (36-48).

L'auteur, dans un article précédent [1], a défini quatre fonctions arithmétiques : $\lambda(m)$, $P(m)$, $Q(m)$, $\Omega(m)$, et il a démontré que la fonction $\lambda(m)$ satisfait à la relation

$$\lambda(m_1 m_2) = \lambda(m_1)\lambda(m_2)$$

(1) Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XXXIV, 1910, p. 98.

lorsque m_1 et m_2 sont deux entiers premiers entre eux. On sait l'importance d'une telle relation pour une fonction arithmétique. Dans ce nouvel article, l'auteur démontre la même propriété pour les fonctions $P(m)$ et $\Omega(m)$. Quant à la fonction $Q(m)$, il démontre qu'elle jouit de la même propriété lorsque m_1 et m_2 ne sont pas tous les deux $\equiv 3 \pmod 4$. Si ce dernier cas se présente, la relation précédente est remplacée par

$$Q(m_1 m_2) = -3\,Q(m_1)\,Q(m_2).$$

L'auteur s'appuie sur la propriété suivante :

Soit

$$4m = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2,$$
$$4\varpi = \mu^2 + \nu^2 + \rho^2 + \sigma^2$$

(α, β, ..., σ entiers impairs, m et ϖ premiers entre eux).

Soit

$$\alpha' = (-1)^{\frac{1}{2}(\alpha-1)}\alpha, \qquad \ldots, \qquad \sigma' = (-1)^{\frac{1}{2}(\sigma-1)}\sigma.$$

En posant

$$A = \frac{1}{2}(\alpha'\mu' + \beta'\nu' + \gamma'\rho' + \delta'\sigma'),$$

$$B = \frac{1}{2}(\gamma'\mu' + \delta'\nu' - \alpha'\rho' - \beta'\sigma'),$$

$$C = \frac{1}{2}(\delta'\mu' - \gamma'\nu' + \beta'\rho' + \alpha'\sigma'),$$

$$D = \frac{1}{2}(\beta'\mu' - \alpha'\nu' - \delta'\rho' + \gamma'\sigma'),$$

on a

$$4(A^2 + B^2 + C^2 + D^2) = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)(\mu^2 + \nu^2 + \rho^2 + \sigma^2),$$

de sorte qu'à tout couple de décompositions de $4m$ et 4ϖ en sommes de quatre carrés impairs, correspond pour $4m\varpi$ une telle décomposition.

Cette propriété est facile à démontrer; mais l'auteur s'appuie aussi sur la réciproque, à savoir que toute décomposition de $4m\varpi$ en quatre carrés impairs s'obtient ainsi. Cette réciproque, il n'a pu la démontrer; il l'a vérifiée sur des exemples particuliers.

Hardy (*G.-H.*). — On Kummer's series for $\log\Gamma(a)$ (49-53).

Démonstration nouvelle de la formule de Kummer :

$$\log\Gamma(a) = (1-a)\log\pi + \left(\frac{1}{2} - a\right)C - \frac{1}{2}\log\sin a\pi$$
$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin 2ma\pi \log 2m}{m} \qquad (0 < a < 1).$$

La démonstration s'appuie sur le développement en série de Fourier de la fonction $\zeta(s, a, \varpi)$ définie pour toutes les valeurs de s autres que des nombres entiers positifs et pour toutes les valeurs de a et ϖ dont la partie réelle est positive par l'équation

$$\zeta(s, a, \varpi) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi}\int\frac{e^{-au}(-u)^{s-1}}{1-e^{-\varpi u}},$$

où le contour d'intégration part du point à l'infini sur l'axe des $x > 0$ pour y revenir, après avoir entouré l'origine, mais aucun autre zéro de $1 - e^{-wu}$; d'ailleurs $(-u)^{s-1}$ est défini comme étant égal à $e^{(s-1)\log(-u)}$, $\log(-u)$ étant réel pour u réel et négatif et rendu uniforme pour une coupure le long de l'axe des $x > 0$. C'est une généralisation de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann.

Ce développement en série obtenu, on passe à la fonction $\log\Gamma(a, w)$ définie par la formule

$$\log \frac{\Gamma(a, w)}{\sqrt{\frac{2\pi}{w}}} = \frac{d}{ds}\zeta(s, a, w)_{s=0}.$$

On obtient ainsi une formule un peu plus générale que celle de Kummer :

$$\log\Gamma(a, w) = \left(\frac{a}{w} - 1\right)\log\left(\frac{w}{2\pi}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{w}\right)C - \frac{1}{2}\log\left(2\sin\frac{a\pi}{w}\right)$$
$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{2\nu a\pi}{w}\log\nu}{\nu} \quad \left(0 < \left|\frac{a}{w}\right| < 1\right).$$

On retrouve la formule de Kummer en faisant $a = 1$.

Hardy (G.-H.). — On double Fourier series and especially those which represent the double zeta-function with real and incommensurable parameters (53-79).

La méthode du Mémoire précédent par laquelle on a développé en série de Fourier la fonction $\zeta(s, a, w)$, s'applique aux fonctions ζ d'ordre supérieur. Soit

$$\zeta_2(s, a, w_1, w_2) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int \frac{e^{-au}(-u)^{s-1}\,du}{(1 - e^{w_1 u})(1 - e^{w_2 u})},$$

le contour d'intégration et la valeur à prendre pour $(-u)^{s-1}$ étant définis comme précédemment. On suppose de plus $\frac{w_2}{w_1}$ réel et irrationnel, et l'on se propose de développer cette fonction en série double de Fourier

$$\sum_{-\mu_1}^{\mu_1}\sum_{-\nu_1}^{\nu_1} c_{\mu\nu}\, e^{2\pi i\left(\frac{\mu\alpha}{w_1} + \frac{\nu\beta}{w_2}\right)} \qquad (\text{on a posé } a = \alpha + \beta).$$

Le calcul des coefficients $c_{\mu\nu}$ est aisé. Reste à prouver que la série obtenue représente bien la fonction ζ_2. Pour cela, l'auteur établit plusieurs théorèmes généraux relatifs aux séries doubles de Fourier. Il étend aux fonctions de plusieurs variables les méthodes et les résultats de Jordan relatifs aux fonctions d'une variable à *variation bornée;* en particulier, il montre que ces fonctions sont développables en séries de Fourier doubles de la forme indiquée plus haut et il applique ces résultats à la fonction ζ_2.

L'auteur donne une autre expression de ζ_2, toujours dans le cas de $\frac{w_2}{w_1}$ réel

et irrationnel, à savoir

$$\zeta(s, a, w_1, w_2) = \lim_{R=\infty} \Gamma(1-s) \left\{ \frac{1}{w_2} \Sigma' \frac{e^{\frac{2ma\pi i}{w_1}}}{1 - e^{\frac{2mw_2\pi i}{w_1}}} \left(-\frac{2m\pi i}{w_2} \right)^{s-1} + \frac{1}{w_1} \Sigma \frac{e^{-\frac{2na\pi i}{w_2}}}{1 - e^{\frac{2nw_1\pi i}{w_2}}} \left(-\frac{2n\pi i}{w_1} \right)^{s-1} \right\},$$

la sommation s'étendant aux valeurs des entiers m, n autres que zéro et tels que $\left|\frac{2m\pi}{w_1}\right|$ et $\left|\frac{2n\pi}{w_2}\right|$ soient plus petits que R.

C'est une modification d'une autre formule donnée par l'auteur dans les *Cambridge Philosophical Transactions* (vol. XX, part I) et s'appliquant au cas où $\frac{w_1}{w_2}$ n'est pas réel. L'auteur compare cette formule à celle donnée par le développement de Fourier.

Miller (*G.-A.*). — Groups of subtraction and division (80-87).

Étude des groupes engendrés par les deux substitutions $n \mid \chi_1 - n \mid$ ou s_1 et $n \left| \frac{\chi_2}{n} \right.$ ou s_2; χ_1, χ_2 étant des constantes.

Chacune de ces deux substitutions étant d'exposant 2, la recherche de ces groupes revient à la recherche de l'exposant de $s_1 s_2$, c'est-à-dire de l'entier k, s'il existe, tel que $(s_1 s_2)^k = 1$.

Lorsque $\chi_1 = 0$, $k = 2$; lorsque $\chi_1^2 = \chi_2$, $k = 3$; lorsque $\chi_1^2 = 2\chi_2$, $k = 4$; lorsque $\chi_1^2 = 3\chi_2$, $k = 6$.

En supposant χ_1 et χ_2 rationnels, ce sont les seuls cas où k existe. En supposant χ_1 et χ_2 irrationnels, il y a une infinité d'autres cas.

*M*rs *Grace Chisholm Young*. — On the form of a certain Jordan curve (87-91).

Construction d'une courbe de Jordan, à contenu positif. Cette courbe se compose de segments de droite et chaque segment, une fois placé, n'est plus dérangé dans les constructions ultérieures, ce qui distingue cette construction d'autres données antérieurement. La courbe est à l'intérieur d'un carré de côté 1, et son contenu peut être un nombre pris arbitrairement entre 0 et 1.

Elliot (*E.-B.*). — On absolute orthogonal covariants and their sources (91-105).

Tout gradient (fonction entière homogène des coefficients) est la source d'un covariant absolu orthogonal pour une forme binaire $(a_0, a_1, \ldots, a_p)(x, y)^p$ ou la somme de deux sources. Un covariant absolu orthogonal est une expression qui reste invariable pour toute transformation

$$x = X\cos\theta - Y\sin\theta, \qquad y = X\sin\theta + Y\cos\theta,$$

et qui reste invariable ou est multipliée par -1 pour les transformations

$$x = X\cos\theta + Y\sin\theta, \qquad y = X\sin\theta - Y\cos\theta.$$

De plus, $ip - m$ ($i =$ degré du gradient, m degré le plus petit possible du covariant) est pair. La démonstration repose sur un théorème de M. Berry, à savoir que ce covariant a un annulateur de l'une des deux formes :

$$[\Delta^2 + m^2][\Delta^2 + (m-2)^2]\ldots\ldots[\Delta^2 + 2^2]\Delta,$$
$$[\Delta^2 + m^2]\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots[\Delta^2 + 1^2],$$

suivant que m est pair ou impair, Δ étant l'opérateur :

$$a_0\frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1\frac{\partial}{\partial a_2} + \ldots + pa_{p-1}\frac{\partial}{\partial a_p} - \left(pa_1\frac{\partial}{\partial a_0} + \ldots + 2a_{p-1}\frac{\partial}{\partial a_{p-2}} + a_p\frac{\partial}{\partial a_{p-1}}\right).$$

Application au cas $m = ip$. Isolation des sources de différents degrés m, $m+2$, ...; $m-2$, ... Application au théorème d'algèbre suivant :

« Soit G le gradient le plus général de degré i ; si l'on écrit que $\Delta^2 G$ et G sont identiques à un facteur numérique près $-\delta$, on obtient des équations linéaires homogènes par rapport aux coefficients de G. En écrivant qu'elles sont compatibles pour les valeurs non toutes nulles de ces coefficients, on obtient une équation de degré $\frac{(p+i)!}{p!\,i!}$ de la forme

$$\begin{vmatrix} c_{11}+\delta & c_{12} & c_{13} & \ldots \\ c_{21} & c_{22}+\delta & c_{23} & \ldots \\ c_{31} & c_{32} & c_{33}+\delta & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0.$$

» Cette équation en δ admet les racines $(ip)^2$, $(ip-2)^2$, ..., m_0^2 ($m_0 = 0$ ou 1, suivant que ip est pair ou impair). Elle les admet toutes et n'en admet pas d'autres. »

Basset (*A.-B.*). — On trinodal and quadrinodal quintics (106-121).

Si l'on écrit l'équation générale d'une quintique trinodale rapportée au triangle qui a les trois nœuds (points doubles) comme sommets, puis si l'on transforme cette équation en remplaçant chaque coordonnée par son inverse, on obtient l'équation d'une quartique sans nœud, circonscrite au triangle de référence.

Donc toute propriété d'une telle quartique en donne une pour la quintique primitive. Suivent quelques exemples, en particulier des propriétés des quintiques trinodales dans lesquelles les tangentes aux nœuds sont toutes doubles.

Ces six tangentes sont tangentes à une même conique. Si l'on joint deux nœuds, la droite ainsi obtenue coupe la quintique en un cinquième point ; les trois points ainsi obtenus sont en ligne droite ; par ces points passent des tangentes doubles à la quintique, etc.

Pour les quintiques quadrinodales, l'auteur établit différentes formes d'équations générales, par exemple $S_1^2 u + S_2^2 v + S_3^2 w = 0$, où S_1, S_2, S_3 sont trois

coniques passant par les quatre nœuds, et u, v, w trois lignes droites. Résultats particuliers pour les quintiques quadricuspidales.

Toujours par la transformation qui remplace chaque coordonnée par son inverse, on en déduit des propriétés des quartiques uninodales et unicuspidales relativement à un triangle de Poncelet (à la fois inscrit et circonscrit).

Cunningham (Allan). — Haupt-exponents of 2, with a table for all primes $\leqq 10000$ (122-145).

Le *haupt-exponent*, c'est-à-dire l'exposant principal, ou plus simplement, comme on dit en France, l'*exposant* d'un entier a par rapport à un module N, c'est le plus petit entier ξ tel que $a^{\xi} \equiv 1 \pmod{N}$. Cet exposant est toujours un diviseur de $\varphi(N)$.

Cette définition suppose a et N premiers entre eux.

L'article de M. Cunningham donne des procédés pour calculer simplement cet exposant lorsque $a = 2$, et que les facteurs premiers de N appartiennent à certaines formes linéaires. Ce calcul repose sur des théorèmes dont nous citons quelques-uns comme exemples. D'ailleurs, certains de ces théorèmes ont été trouvés par induction et n'ont pas été démontrés (p désigne un nombre premier, les congruences sont mod p).

Si $p = 8\varpi \pm 1$, alors $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1$.

Si $p = 8\varpi \pm 3$, alors $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1$.

Si $p = 8\varpi + 1$, ce qui entraine $p = (4\alpha + 1)^2 + 16\beta^2 = (4\gamma + 1)^2 + 8\delta^2$ (β, γ de même parité) et si β, γ sont impairs, alors $2^{\frac{p-1}{4}} \equiv -1$; si β, γ sont pairs, alors $2^{\frac{p-1}{4}} \equiv 1$.

De plus, dans ce dernier cas, où $2^{\frac{p-1}{4}} \equiv 1$, si $\alpha + \frac{\beta}{2}$ est impair, alors $2^{\frac{p-1}{8}} \equiv -1$; si $\alpha + \frac{\beta}{2}$ est pair, alors $2^{\frac{p-1}{8}} \equiv 1$ (non démontré).

Règle du même genre pour $2^{\frac{p-1}{16}}$; règles particulières lorsque $p = X^4 + Y^4$ ou $p = \frac{1}{2}(X^4 + Y^4)$.

Si $p = 6\varpi + 1$, ce qui entraîne $p = A^2 + 3B^2$, alors si $B = 3\beta \pm 1$, on a $2^{\frac{p-1}{3}} \not\equiv 1$ et si $B = 3\beta$, on a $2^{\frac{p-1}{3}} \equiv 1$.

Règles analogues mais plus compliquées pour $2^{\frac{p-1}{5}}$ lorsque $p = 10\varpi + 1$ et aussi pour $2^{\frac{p-1}{n}}$ (n premier > 5) lorsque $p = 2n\pi + 1$. Ces dernières règles conduisent d'ailleurs souvent à des calculs impraticables.

Règles pour $2^{\frac{p-1}{n}}$, dans le cas où $p = \frac{X^n + Y^n}{X + Y}$ ou $\frac{1}{n}\,\frac{X^n \mp Y^n}{X \mp Y}$, etc.

Comme application soit $p = 1777$, d'après les règles précédentes $2^{\frac{p-1}{8}} \equiv 1$ et $2^{\frac{p-1}{16}} \equiv -1$, donc ξ est un diviseur de $\frac{p-1}{8}$ ou 222, mais non de $\frac{p-1}{16}$

ou 111; d'autre part, $2^{\frac{p-1}{3}} \equiv 1$, donc ξ est un diviseur de $\frac{p-1}{3}$ ou 592; on en conclut que $\xi = 2$ ou 74. On voit immédiatement que ξ n'est pas égal à 2, donc $\xi = 74$.

L'article se termine par la Table mentionnée dans le titre.

Hardy (*G.-H.*). — On the function $P_\rho(x)$ (146-172).

Il s'agit de la fonction définie pour $\rho > 1$ par la formule

$$P_\rho(x) = \prod_1^\infty \left(1 + \frac{x}{n^\rho}\right).$$

L'auteur démontre que cette fonction est représentée asymptotiquement par [1]

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2\rho}}(-x)^{-\frac{1}{2}}\, 2 \sin\left[\pi(-x)^{\frac{1}{\rho}}\right] e^{\pi \cot\frac{\pi}{\rho}(-x)^{\frac{1}{\rho}} + \sum_{s=1}^{k} \frac{\zeta(\rho s)}{s}(-x)^s}.$$

Cette formule est valable dans un certain domaine, comprenant en particulier l'axe des x réels négatifs.

Lorsque $\rho < 1$, la fonction $P_\rho(x)$ existe encore, elle est alors donnée par le produit infini

$$T_\rho(x) = \prod_1^\infty \left(1 + \frac{x}{n^\rho}\right) e^{-\frac{x}{n^\rho} + \frac{x^2}{2n^{2\rho}} - \ldots + (-1)^k \frac{x^k}{kn^{k\rho}}},$$

où k est le plus grand entier contenu dans $\frac{1}{\rho}$.

On a pour ces valeurs de ρ, sauf pour celles qui sont inverses d'un entier, la valeur asymptotique de $P_\rho(x)$

$$(-2\pi x)^{-\frac{1}{2}}\, 2 \sin\left[\pi(-x)^{\frac{1}{\rho}}\right] e^{\pi \cot\frac{\pi}{\rho}(-x)^{\frac{1}{\rho}}}.$$

La formule donnée pour $\rho > 1$ s'applique aussi pour ρ complexe à partie réelle plus grande que 1, dans un certain domaine limité par des courbes de forme spirale.

On peut se demander comment se comporte la fonction $P_\rho(x)$ lorsque x croît indéfiniment, mais en dehors du domaine précité. Le cas de ρ réel a déjà été étudié par M. Wiman. M. Hardy montre que le cas de ρ complexe est analogue, le rôle joué par l'axe des x étant joué ici par une certaine spirale.

Le Mémoire donne ensuite la démonstration du théorème suivant :

« Si $\rho > 2$, les racines suffisamment grandes de l'équation

$$P_\rho(x) = a_0 x^n + \ldots + a_n$$

sont données approximativement par la formule $-k^\rho (k = 1, 2, \ldots)$ si $\rho > 2$ et

---

(1) *Voir* l'erratum de la page 378 du Volume analysé.

par la formule

$$\left(\frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{\rho}\right)^{\rho} e^{\frac{1}{2}\rho\pi i}\left[(2p\pi)^{\rho} - i\left(n+\frac{1}{2}\right)\rho^{2}(2p\pi)^{\rho-1}\log(2p)\right]$$

si $1 < \rho < 2$. »

Suivent quelques résultats relatifs au cas où $\rho < 1$,

Le Mémoire se termine par une formule asymptotique relative à la fonction

$$Q(x) = \prod\left(1 + \frac{x}{q^{n}}\right) \qquad (q > 1).$$

On a

$$|Q(x)|^{2} = \frac{H}{-x} e^{\frac{\log^{2}(-x)}{\log q}} \sin^{2}\left(\frac{\pi\log(-x)}{\log q}\right),$$

H restant fini.

Glaisher (J.-W.-L.). — On series for $\frac{1}{\pi}$ and $\frac{1}{\pi^{2}}$ (173-198).

Ces séries sont tirées de formules relatives à des fonctions elliptiques dans le cas où ces fonctions dégénèrent. L'auteur trouve ainsi trente et une séries, dont par exemple

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1}{2} + \frac{1^{2}}{2^{2}.4} + \frac{1^{2}.3^{2}}{2^{2}.4^{2}.6} + \cdots$$

$$\frac{8}{\pi^{2}} = 1 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^{4} - 7\left(\frac{1}{2.4}\right)^{4} - 11\left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^{4} \cdots$$

Basset (A.-B.). — On quinquenodal and sexnodal quinties (199-214).

Dans l'article précédemment analysé, l'auteur avait discuté les quintiques à 3 ou 4 points doubles; dans celui-ci, il s'occupe des quintiques à 5 et 6 points doubles. Il donne leurs équations sous différentes formes. Par exemple, l'équation d'une quintique à 5 points doubles

$$S^{2}W + S\Sigma U + \alpha\beta\gamma u^{2} = 0;$$

α, β, γ sont les côtés du triangle formé par trois des points doubles; Σ une conique passant par ces trois points, arbitraire d'ailleurs; U est une droite passant par les deux autres points doubles; S une conique passant par les cinq points doubles; W est une droite arbitraire. L'auteur cherche les conditions pour que quelques-uns de ces points doubles soient des points de rebroussement. Mêmes questions pour les quintiques à 6 points doubles. Il montre qu'une quintique binodotricuspidale peut s'obtenir en partant d'une parabole, en effectuant une inversion, puis une projection, puis la transformation

$$\alpha' = \frac{1}{\alpha}, \qquad \beta' = \frac{1}{\beta}, \qquad \gamma' = \frac{1}{\gamma}.$$

Il démontre qu'il existe une conique passant par les quatre points de rebroussement et tangente à la quintique en ses points d'inflexion.

Parmi les quintiques à 6 points doubles, on peut remarquer les quintiques ayant un point quadruple. Discussion des différentes formes que peuvent présenter ces courbes. Propriété des quintiques *tritacnodales* (trois points doubles avec inflexions).

Burnside (*W.*). — On simply transitive groups of prime degree (215-221).

Tout groupe de permutations transitif de degré premier est ou bien doublement transitif, ou bien métacyclique. Nouvelle démonstration de ce théorème s'appuyant sur la propriété arithmétique suivante : « Soit le polynome

$$A_0 x + A_1 x^{\alpha} + A_1 x^{\alpha^2} + \ldots + A_{r-1} x^{\alpha^{r-1}};$$

r est un diviseur de $p-1$ (p premier), α est une racine primitive de la congruence $\alpha^r \equiv 1 \pmod{p}$, les A sont des coefficients. Si ce polynome est tel qu'en y remplaçant x successivement par les p racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité, les résultats obtenus soient ces p racines $p^{\text{ièmes}}$; alors $r-1$ des A sont nuls, et le $r^{\text{ième}}$ est une racine $p^{\text{ième}}$ de l'unité. »

Elliot (*E.-B.*). — On sequences $\xi_1, \xi_2, \ldots$ such that the convergency or divergency of $\Sigma(\xi_n u_n)$ is decided by that of Σu_n (222-226).

Démonstration des cinq théorèmes suivants, dont le deuxième et le troisième sont dus à M. Hadamard.

1. Si

$$|\xi_1| + |\xi_2 - \xi_1| + |\xi_3 - \xi_2| + \ldots$$

est convergente et que $\lim\limits_{n=\infty} \xi_n \neq 0$, alors les deux séries Σu_n et $\Sigma u_n \xi_n$ sont ou bien toutes les deux convergentes, ou bien toutes les deux divergentes mais non vers l'infini, ou bien toutes les deux divergentes vers l'infini. (Une série divergente vers l'infini est une série où S_n croît indéfiniment.)

Réciproquement, pour que ces circonstances se présentent quels que soient les u_n, il est nécessaire que les ξ satisfassent aux conditions imposées plus haut.

2. Si

$$|\xi_1| + |\xi_2 - \xi_1| + |\xi_3 - \xi_2| + \ldots$$

est convergente, alors si Σu_n est convergente, $\Sigma u_n \xi_n$ l'est aussi. Réciproquement, comme dans 1.

3. Si

$$\left|\frac{1}{\xi_1}\right| + \left|\frac{1}{\xi_2} - \frac{1}{\xi_1}\right| + \left|\frac{1}{\xi_3} - \frac{1}{\xi_2}\right| + \ldots$$

est convergente, alors si Σu_n est divergente, $\Sigma \xi_n u_n$ l'est aussi. Réciproquement....

4. Si

$$|\xi_1| + |\xi_2 - \xi_1| + |\xi_3 - \xi_2| + \ldots$$

est convergente et que $\lim\limits_{n=\infty} \xi_n = 0$, alors si Σu_n ne diverge pas vers l'infini, $\Sigma \xi_n u_n$ est convergente. Réciproquement....

5. Si

$$\left|\frac{1}{\xi_1}\right| + \left|\frac{1}{\xi_2} - \frac{1}{\xi_1}\right| + \left|\frac{1}{\xi_3} - \frac{1}{\xi_2}\right| + \dots$$

est convergente et si ξ_n croît indéfiniment avec n, alors si Σu_n est divergente, $\Sigma \xi_n u_n$ est divergente à l'infini. Réciproquement....

Miller (*G.-A.*). — A new chapter in trigonometry (226-234).

Application de quelques propriétés du groupe engendré par deux opérateurs d'ordre 2 (en général non permutables) aux formules de trigonométrie.

Glaisher (*J.-W.-L.*). — On the expansion of $\int_0^1 k^n \mathrm{F}(\varphi)\,dk$ and $\int_0^1 k^n \mathrm{E}(\Phi)\,dk$, $\mathrm{F}(\Phi)$ and $\mathrm{E}(\Phi)$ being the legendrian elliptic integrals (235-276).

Les séries obtenues procèdent suivant les puissances de Φ, $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Phi$, $\sin\Phi$ et suivant les multiples de Φ. Les théorèmes fondamentaux d'où ces développements sont tirés sont les suivants :

$$\int_0^1 k^{2n}\, \mathrm{F}(\Phi)\,dk = \frac{(\mathrm{D}^2+1^2)(\mathrm{D}^2+3^2)\dots[\mathrm{D}^2+(2n-1)^2]}{2^2.4^2\dots(2n)^2} \int_0^{\Phi} \frac{\Phi}{\sin\Phi}\,d\Phi.$$

$$\int_0^1 k^{2n+1} \mathrm{F}(\Phi)\,dk = \frac{(\mathrm{D}^2+2^2)(\mathrm{D}^2+4^2)\dots[\mathrm{D}^2+(2n)^2]}{1^2.3^2\dots(2n+1)^2} \operatorname{tang}\frac{1}{2}\Phi.$$

égalités symboliques dans lesquelles D^h veut dire $\frac{d^h}{d\Phi^h}$.

L'auteur déduit de ses formules certaines séries pour le calcul de $\frac{1}{\pi}$ d'ailleurs déjà données dans un article précédent, et aussi la valeur de certaines intégrales définies.

Bateman (*H.*). — A type of hyperelliptic curve and the transformations connected with it (277-286).

Il s'agit d'une courbe d'ordre n ayant un point multiple O d'ordre $n-2$, de la transformation qui fait correspondre à tout point M le point situé sur OM et conjugué harmonique de M par rapport aux deux points simples d'intersection de OM avec la courbe, et des courbes qui se transforment en elles-mêmes par cette transformation. Ces courbes passent par les points de contact des tangentes menées de O à la première courbe. Extension de quelques-uns de ces résultats aux surfaces.

Miller (*G.-A.*). — Groups generated by operators which transform each other into their powers (286-288).

Si une série d'opérateurs est telle que chacun d'eux transforme chacun des autres en son inverse ou en son cube, ces opérateurs engendrent le groupe hamiltonien d'ordre 2^n, sauf lorsque tous les opérateurs sont d'ordre 2. Dans ce cas, ils engendrent le groupe abélien d'ordre 2^n et de type (1, 1, ...).

Si un groupe non abélien est engendré par deux opérateurs qui se transforment l'un l'autre respectivement en leurs puissances d'exposants α, β, le groupe est complètement défini par α et β chaque fois que l'un des nombres $\alpha - 1$, $\beta - 1$ est un nombre premier et l'autre une puissance de ce nombre premier, et cela a lieu seulement dans ce cas.

Toute série d'opérateurs tels que chacun transforme n'importe quel autre en une puissance de ce dernier, engendre un groupe abélien ou un groupe métabélien.

Barnes (*E.-W.*). — The asymptotic expansion of the function $G(x, \theta) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x^n}{\Gamma(n+1)(n+\theta)}$, and the singularities of $g(x, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+\theta}$ (289-313).

Le développement asymptotique de la fonction G est

$$G(x, \theta) = \Gamma(\theta)(-x)^{-\theta} + e^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\theta)\dots(n-\theta)}{x^{n+1}},$$

formule valable si l'argument de x est > 0 et $< 2\pi$.

La série du second membre est divergente. Sa somme est entendue à la façon ordinaire; elle est égale à

$$\sum_{n=0}^{k} \frac{(1-\theta)\dots(n-\theta)}{x^{n+1}} + \frac{J_k(x)}{x^{k+1}},$$

où $\frac{J_k(x)}{x^{k+1}}$ tend vers zéro lorsque x croît indéfiniment.

Des deux termes de la formule, c'est le premier qui domine lorsque l'argument de x est $> \frac{\pi}{2}$, c'est le second dans le cas contraire. Dans ce second cas, la formule obtenue en supprimant le premier terme s'applique encore si l'argument x est nul.

Les zéros de la fonction sont donnés par la formule

$$-2n\pi i - (\theta - 1)\log n + \log\Gamma(\theta) + (1-\theta)\log 2\pi - \frac{(1-\theta)i\pi}{2} + \varepsilon_n.$$

n étant un grand entier positif ou négatif, et ε_n tendant vers zéro lorsque n croît indéfiniment.

La fonction $g(x, \theta)$ définie pour $|x| < 1$ par

$$g(x, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+\theta}$$

est liée à la précédente par la formule

$$g(x, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_D G(xz, \theta) \log(-z) e^{-z} dz;$$

D est un contour qui entoure une demi-droite issue de l'origine et située au-dessus de Ox. Le développement précédent de G donne alors pour g les résultats suivants : la fonction g n'a pas d'autre singularité que $x = 1$, et l'on a

$$g(x, \theta) = -x^{-\theta} \log(1-x) + \Phi(x),$$

$\Phi(x)$ étant une fonction régulière dans les environs de $x = 1$. On a d'ailleurs, pour $R(x) > \frac{1}{2}$,

$$\Phi(x) = Cx^{-\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{x^{n+1}} \frac{(\theta-1)\ldots(\theta-n)}{n!} \left(\frac{1}{1} + \ldots + \frac{1}{n}\right),$$

C étant une constante $= \psi(1) - \psi(\theta)$, en posant

$$\psi(\theta) = -\frac{1}{\theta} + \theta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+\theta)}.$$

On a aussi, pour $|\log x| < 2\pi$ et $\arg(1-x) < \pi$,

$$g(x, \theta) = -x^{-\theta} \log(1-x) + Cx^{-\theta} + x^{-\theta} \log x - x^{-\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n(-\theta)}{n!} (\log x)^n,$$

les S_n étant les polynomes de Bernoulli.

Basset (A.-B.). — Compound singularities of curves (313-328).

Généralisations au moyen de la théorie de la transformation birationnelle de certains résultats obtenus dans un Mémoire précédent [1].

La transformation employée est la suivante : soit C une conique et A un point ; à tout point P du plan on fait correspondre l'intersection P' de AP et de la polaire de P. L'expression analytique de cette transformation peut être mise sous la forme

$$\alpha\alpha' = \beta\beta' = \gamma\gamma'.$$

Étant données les singularités d'une courbe, on peut en déduire les singula-

[1] Voir ce *Bulletin*, t. XXXIV₂, p. 98.

rités de la courbe transformée, d'où une méthode de transformation des propriétés des singularités.

L'auteur énonce, sans le démontrer en général, le théorème suivant :

« Soient B et C les points de contact des tangentes à C issues de A. Soient deux courbes ayant chacune une certaine singularité en un point C' de BC. Supposons que ces courbes ne coupent pas BC en d'autres points que C', B et C. Supposons que la singularité de la première courbe soit dans une certaine relation avec la droite BC, et celle de la seconde courbe dans la même relation avec la droite AC'. Alors, lorsque les courbes sont transformées, les deux singularités en A sont réciproques l'une de l'autre. »

Glaisher (J.-W.-L.). — On the integral $\int_0^1 k^n \mathrm{K}\, dk$ (329-349).

L'auteur donne des développements en série de cette intégrale, laquelle n'est d'ailleurs qu'un cas particulier de l'intégrale $\int_0^1 k^n \mathrm{F}(\Phi)\, dk$ considérée dans un précédent travail.

Miller (G.-A.). — On the commutators of a group of order p^m (349-352).

Dans le théorème suivant, p désigne un nombre premier.

« Tout commutateur d'un groupe d'ordre p^m transforme en lui-même tout sous-groupe d'ordre p^{m-2}. »

Dans les théorèmes suivants p est supposé différent de 2.

« Si l'ordre d'un groupe est p^{2m}, il ne peut avoir de sous-groupe cyclique commutateur d'ordre p^m. Si un groupe d'ordre p^m contient un sous-groupe cyclique commutateur d'ordre p^α, alors $m > 2\alpha + 1$. Si $m = 2\alpha + 2$, il y a un et un seul tel groupe. »

Lorsque $p = 2$, on a $m > \alpha + 1$, et si $m = \alpha + 2$ avec $\alpha > 1$, il y a trois et trois seulement tels groupes. Si $\alpha = 1$ il y a deux et deux seulement tels groupes, le groupe quaternion et le groupe octique.

Stephenson (Andrew). — On a class of forced oscillations (353-360).

Il y a des cas dans lesquels une oscillation est amplifiée ou maintenue par une influence périodique, d'une période égale à la moitié de celle de l'oscillation. Cet effet a été observé expérimentalement.

L'objet de l'auteur est de démontrer qu'un effet semblable peut se produire lorsque le rapport de la seconde période à la première, au lieu d'être égal à $\frac{1}{2}$, est égal approximativement à $1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \ldots$ Il ne semble pas que ces effets aient été déjà observés. La méthode employée par l'auteur est celle de Hill,

déjà employée par Rayleigh dans le cas du rapport égal à $\frac{1}{2}$, mais poussée à un ordre d'approximation plus élevé.

Hardy (*G.-H.*). — On certain double integrals (360-369).

Il s'agit des intégrales du type

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(ax+by)\,\psi(a'x+b'y)\,dx\,dy,$$

a, b, a', b' étant des constantes réelles ou complexes.

En faisant certaines hypothèses sur f, φ, a, b, a', b', l'auteur obtient une expression de ces intégrales. Comme application,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ax-by}(a'x+b'y)^{s-1}\,dx\,dy = -\frac{\Gamma(s)}{ab'-ba'}\left[\left(\frac{a'}{a}\right)^s - \left(\frac{b'}{b}\right)^s\right]$$

$\left(R(s) > 0,\ R(a) > 0,\ R(b) > 0,\ \frac{a'}{b'}\right.$ non réel, $\left. ab'-ba' \neq 0\right)$.

On a aussi

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ax-by}(ax+by)^{s-1}\,dx\,dy = \frac{\Gamma(s+1)}{ab}$$

(a, b, s réels et > 0);

$$\int_0^\infty \int_0^\infty {\cos \atop \sin}(ax-by)(a'x-b'y)^{s-1}\,dx\,dy$$
$$= \frac{{\cos \atop \sin}\left[\frac{1}{2}(1-s)\pi\right]\Gamma(s)}{ab'-ba'}\left[\left(\frac{a'}{a}\right)^s - \left(\frac{b'}{b}\right)^s\right]$$

[a, b, a', b' réels et positifs, $R(s) < 1$, $ab'-ba' \neq 0$], et des formules analogues lorsque a, b ne sont pas positifs.

Hardy (*B.-G.*). — On the integral function

$$\Phi_{a,\alpha,\beta}(x) = \sum_0^\infty \frac{x^n}{(n+a)^{\alpha n+\beta}}$$

(369-378).

α et β sont supposés réels (hypothèses simplificatives mais non essentielles), a n'est égal ni à un entier négatif, ni à zéro.

Si l'on suppose $0 < \alpha < 2$, on a la formule asymptotique

$$\Phi_{a,\alpha,\beta}(x) = (1-\varepsilon_x)\sqrt{\frac{2\pi x^{\frac{1}{\alpha}}}{e\alpha}}\,x^{-\frac{\beta}{\alpha}}\,e^{-a\alpha-\beta+\frac{\alpha}{e}x^{\frac{1}{\alpha}}}$$

($e = 2{,}718, \ldots, \varepsilon_x$ tend uniformément vers zéro quand x croît indéfiniment). Cette formule est vraie dans un domaine D formé des points $x = re^{i\theta}$ pour lesquels

$$r \geq R_0, \qquad -\frac{1}{2}\alpha\pi + \delta \leq \theta \leq \frac{1}{2}\alpha\pi - \delta,$$

où R_0 est grand et δ petit.

Dawson (*H.-G.*). — On a method used for the reduction of a ternary quintic to the sum of seven fifth powers (379-384).

Si une forme quintique est une somme de sept puissances cinquièmes de formes linéaires

$$\sum_{r=1}^{r=7} (l_r x + m_r y + n_r z)^5,$$

elle est annulée par les opérateurs obtenus en substituant $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ à x, y, z dans l'équation de toute cubique passant par les sept points l_r, m_r, n_r. L'objet du Mémoire est d'assurer, par l'emploi de cubiques appropriées, à trouver ces sept points, par conséquent les sept formes linéaires.

L'auteur applique sa méthode à la forme

$$yz^4 + zx^4 + xy^4 + y^2z^3 + z^2x^3 + x^2y^3;$$

les résultats sont trop compliqués pour trouver place ici.

E. Cahen.

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK (¹).

T. CXLIV, 1914.

Horn (*J.*). — Les intégrales de Laplace solutions d'équations différentielles non linéaires (167-189).

L'équation différentielle linéaire d'ordre n dont les coefficients sont des fonctions linéaires de x est, d'après Laplace, vérifiée par une intégrale définie

$$y = \int v(z)\, e^{zx}\, dz,$$

où $v(z)$ satisfait à une équation différentielle linéaire du premier ordre dont les coefficients sont des fonctions entières de z de degré n. La méthode de Laplace s'applique encore aux équations différentielles linéaires d'ordre n,

(¹) Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XL_2, p. 19-40.

lorsque les coefficients sont des fonctions entières de x de degré p; la transformée en $v(z)$ est alors d'ordre p, les coefficients étant de degré n. Plus généralement enfin, la méthode s'appliquerait aux équations différentielles linéaires dont les coefficients seraient des séries entières : la transformée en $v(z)$ serait une équation *intégrale* linéaire du type de Volterra.

Dans cet article, l'auteur applique la méthode de Laplace à l'équation différentielle *non linéaire* du premier ordre

$$x^{k+1}\frac{dy}{dx} - y = f(x, y),$$

où k est un entier positif et $f(x, y)$ est développable en série entière convergente au voisinage de $x = 0$, $y = 0$:

$$f(x, y) = \Sigma A_{\lambda\mu} x^{\lambda} y^{\mu}.$$

Pour $k = 1$, on obtient une équation intégrale non linéaire, pour $k > 1$ un système d'équations intégrales non linéaires du type de Volterra.

I. L'auteur pose

$$y = \int_0^{\infty} w(t)\, e^{-\frac{t}{x}}\, dt,$$

l'intégration se faisant le long de la demi-droite d'arguments $\omega\left(-\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2}\right)$. On a

$$x^{\lambda} y = \int_0^{\infty} \int_0^{t} \frac{(t-\tau)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}\, w(\tau)\, d\tau\, e^{-\frac{t}{x}}\, dt,$$

à condition qu'on ait

$$\lim_{t \to \infty} e^{-\frac{t}{x}} \int_0^{t} (t-\tau)^{\lambda'-1}\, w(\tau)\, d\tau = 0 \qquad (\lambda' = 1, 2, \ldots, \lambda).$$

On a ensuite

$$x^2 \frac{dy}{dx} = \int_0^{\infty} t\, w(t)\, e^{-\frac{t}{x}}\, dt.$$

Enfin, on a l'expression de $x^{\lambda} y^{\mu}$ en remarquant que y^{μ} est de la forme

$$y^{\mu} = \int_0^{\infty} w^{\mu}(t)\, e^{-\frac{t}{x}}\, dt,$$

où $w^{\mu}(t)$ est une puissance symbolique résultant de la loi de multiplication (ou composition) symbolique définie par la formule

$$w_1 w_2(t) = \int_0^{t} w_1(\tau)\, w_2(t-\tau)\, d\tau.$$

D'après cela, l'équation différentielle donnée, pour $k = 1$, devient

$$\int_0^{\infty} W e^{-\frac{t}{x}} dt = 0$$

R. 2.

avec

$$\overline{W} = t\,w(t) - G_0(t) - \sum_{\mu=2}^{\infty} A_{0\mu}\, w^{\mu}(t) - \sum_{\mu=1}^{\infty} G_{\mu}\, w^{\mu}(t);$$

les fonctions $G_{\mu}(t)$ sont des fonctions entières

$$G_{\mu}(t) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} A_{\lambda\mu} \frac{t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}.$$

Si l'équation intégrale $\overline{W} = 0$ admet pour solution une série entière

$$w(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!},$$

cette série entière est unique : ses coefficients sont, en effet, déterminés par la condition que la série

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n$$

satisfasse (formellement) à l'équation différentielle donnée.

L'auteur démontre l'existence d'une solution de l'équation intégrale, soit à l'intérieur du cercle

$$|t| \leq 1 - \varepsilon \qquad (0 < \varepsilon < 1),$$

soit à l'intérieur du secteur

$$|\arg t| \leq \pi - \theta \qquad (0 < \theta < \pi)$$

par la méthode des fonctions majorantes, qui le ramène à la résolution de l'équation intégrale transformée de l'équation

$$y = \Sigma A_{\lambda\mu} x^{\lambda} y^{\mu} \qquad (\lambda \geq 1,\ \mu \geq 0;\ \lambda + \mu \geq 2).$$

Il obtient ainsi une solution représentée à l'intérieur du cercle $|t| < 1$, par une série entière convergente; dans le secteur $|\arg t| \leq \pi - \theta$, on a

$$|w(t)| < K e^{\sigma|t|},$$

K et σ étant des constantes positives. L'intégrale de Laplace est alors solution de l'équation différentielle donnée dans le cercle $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \sigma$.

2. Dans le cas $k > 1$, l'auteur suppose, ce qui ne restreint en rien la généralité, que l'équation est vérifiée formellement par une série entière

$$s = \sum_{n=k}^{\infty} C_n x^n.$$

Il considère alors k solutions particulières $\eta_{i0}, \eta_{i1}, \ldots, \eta_{ik-1}$, la solution η_{im} étant

définie dans le secteur

$$\frac{2m\pi - \frac{3\pi}{2}}{k} < \arg x < \frac{2m\pi + \frac{3\pi}{2}}{k}.$$

En supposant x dans le secteur

$$-\frac{3\pi}{2k} < \arg x < \frac{3\pi}{2k},$$

il pose

$$X = x^k, \qquad Y_p(X) = \frac{1}{k x^p} \sum_{m=0}^{k-1} e^{-\frac{2mp\pi i}{k}} y_m\left(e^{\frac{2m\pi i}{k}} x\right) \qquad (p = 0, 1, \ldots, k-1).$$

Les fonctions $Y_p(X)$ satisfont à un système d'équations différentielles de la forme

$$k X^2 \frac{dY_p}{dX} + Y_p = a_1 Y_{p-1} + a_2 Y_{p-2} + \ldots + a_p Y_0 + \Sigma A^{(p)}_{\lambda, \mu_0, \mu_1, \ldots} X^\lambda Y_0^{\mu_0} Y_1^{\mu_1} \ldots$$

$$(p = 0, 1, \ldots, k-1; \; \lambda \geq 1, \mu_0 + \mu_1 + \ldots \geq 0; \; \lambda + \mu_0 + \mu_1 + \ldots \geq 2).$$

Ce système donne naissance à un système d'équations intégrales non linéaires du type de Volterra, que l'auteur traite comme celui obtenu pour $k = 1$. La solution $w_p(t)$ est régulière, soit dans le cercle $|t| < \frac{1}{w}$, soit dans le secteur $-\pi < \arg t < \pi$. On a alors

$$y_m = \sum_{p=0}^{k-1} x^p \int_0^{\infty} w_p(t) e^{-\frac{t}{x^k}} dt \qquad (m = 0, 1, \ldots, k-1),$$

où l'intégrale est étendue à la demi-droite d'argument ω; la variable x est supposée appartenir à la portion d'un cercle $\mathcal{R}\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \sigma$ intérieure au secteur

$$\frac{2m\pi - \frac{3\pi}{2}}{k} < \arg x < \frac{2m\pi + \frac{3\pi}{2}}{k}.$$

L'intégrale $y_m(x)$ est représentée asymptotiquement dans le secteur précédent par la série entière qui vérifie formellement l'équation différentielle.

Courant (*R.*). — Sur les théorèmes d'existence de la théorie du potentiel et de la théorie des fonctions (190-211).

L'idée si suggestive de Riemann, connue sous le nom de *principe de Dirichlet*, peut, comme Hilbert l'a montré, servir de point de départ à une démonstration rigoureuse du théorème fondamental d'existence des fonctions potentielles; cependant, les travaux de Hilbert et ceux qui s'y rattachent ne s'appliquent pas directement à des problèmes analogues, tels que l'existence de fonctions sur une surface de Riemann donnée, des intégrales abéliennes, des variables uniformisantes du type de Schottky, de fonctions automorphes de

groupe donné. L'auteur se propose de donner un procédé de démonstration simple s'appliquant immédiatement à tous les problèmes précédents. Il suppose simplement connue la résolution du problème de Dirichlet dans le cas du cercle et du rectangle, ainsi que l'existence d'une fonction potentielle régulière dans un rectangle, prenant sur deux côtés parallèles de ce rectangle des valeurs données continues, et admettant sur les deux autres côtés une dérivée normale nulle.

I. *Remarques préliminaires.* — Soient Ω_1, Ω_2, ... une infinité de domaines dont chacun est limité par un nombre fini de courbes situées à distance finie et formées chacune d'un nombre fini d'arcs de courbe analytiques; soit

$$\Omega = \lim_{n=\infty} \Omega_n$$

le domaine formé de tous les points appartenant aux domaines Ω_n. L'auteur appelle *intégrale d'une fonction*, étendue aux domaines Ω, la limite, quand elle existe, de l'intégrale de cette fonction étendue au domaine Ω_n.

L'auteur pose de plus

$$D[\varphi] = \int\int_{(\Omega)} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 \right] dx\, dy.$$

Il démontre les deux lemmes suivants :

Lemme I. — *Soit $\varphi(x, y)$ une fonction continue dans le domaine Ω, admettant dans ce domaine une dérivée continue, sauf le long d'un nombre fini d'arcs de courbe, et admettant dans Ω l'intégrale $D[\varphi]$. Soit une bande, définie par les inégalités $x_0 \leqq x \leqq x_1$, et traversant le domaine Ω. Alors il existe une valeur x' comprise entre x_0 et x_1 telle que l'intégrale*

$$\int_{x=x'} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 \right] dy$$

étendue à la portion de la droite $x = x'$ qui se trouve dans Ω, existe et soit plus petite que $\dfrac{D[\varphi]}{x_1 - x_0}$.

Lemme II. — *Soient $p_1(x, y)$, $p_2(x, y)$, ... une infinité de fonctions potentielles régulières dans le rectangle R limité par des parallèles aux axes, et telles que l'intégrale de Dirichlet $D[p_n]$ étendue à R tende vers zéro pour n infini; si les valeurs de p_n en un point P intérieur à R ont une limite c, les fonctions p_n convergent dans tout le rectangle R vers c, et cela uniformément à l'intérieur de tout domaine intérieur à R.*

Si une fonction potentielle u est régulière à l'intérieur et *sur le contour* d'un rectangle R, son intégrale de Dirichlet $D[u]$ est inférieure à l'intégrale de Dirichlet de toute autre fonction continue ainsi que ses dérivées du premier ordre dans le rectangle et prenant sur le contour les mêmes valeurs que u. Cette conclusion n'est plus valable si u n'est pas régulière sur le contour. Cependant, l'auteur démontre le lemme important suivant :

Lemme III. — *Si φ est une fonction continue à l'intérieur et sur le contour d'un rectangle R, admettant à l'intérieur de R des dérivées du premier*

ordre continues, avec une intégrale de Dirichlet $D[\varphi]$ *finie, la fonction potentielle* u, *régulière dans* R, *qui prend sur le contour les mêmes valeurs que* φ, *admet aussi une intégrale de Dirichlet* $D[u]$ *et l'on a*

$$D[u] \leq D[\varphi].$$

L'hypothèse faite sur les dérivées de φ peut cesser d'être vraie pour un nombre fini de parallèles aux côtés du rectangle.

II. *Le problème avec valeurs aux limites de la théorie potentielle.* — Soit Ω un domaine qu'on peut supposer tout d'abord limité par une courbe de Jordan. Soit $f(x, y)$ une fonction continue à l'intérieur et sur le contour de Ω, admettant dans Ω des dérivées des deux premiers ordres continues (sauf sur un nombre fini de parallèles aux axes) et admettant une intégrale de Dirichlet $D[f]$ dans Ω. On peut se proposer le problème suivant :

Parmi toutes les fonctions continues dans Ω *et admettant dans* Ω *des dérivées des deux premiers ordres continues (sauf sur un nombre fini de parallèles aux axes), prenant de plus sur le contour de* Ω *les mêmes valeurs que la fonction* f, *trouver celle pour laquelle l'intégrale de Dirichlet* $D[u]$ *est minima.*

L'intégrale de Dirichlet de toutes les fonctions considérées a évidemment une borne inférieure positive d, et l'on peut trouver une suite infinie de fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ satisfaisant aux conditions données et telles que l'on ait

$$\lim_{n=\infty} D[\varphi_n] = d.$$

Les lemmes précédemment énoncés montrent que l'on a

$$\lim_{\substack{n=\infty \\ m=\infty}} D[\varphi_n - \varphi_m] = 0.$$

Cela ne suffit pas pour affirmer la convergence de la suite φ_n. Pour lever cette difficulté fondamentale dans la théorie, l'auteur procède de la manière suivante. Il décompose Ω en une infinité dénombrable de rectangles $R_1, R_2, R_3, \ldots$ de côtés parallèles aux axes et de périmètre tendant vers zéro, de manière qu'à l'intérieur de Ω ne se trouve aucun point limite de l'ensemble des sommets des rectangles. Il désigne alors par u_h la fonction qui, à l'intérieur de chaque rectangle R_p, est une fonction potentielle régulière prenant sur le contour de R_p les mêmes valeurs que φ_h. La suite des fonctions $u_1, u_2, u_3, \ldots$ satisfait aux conditions imposées par l'énoncé du problème, et l'on a

$$\lim_{n=\infty} D[u_n] = d.$$

Cette suite est convergente et sa limite u est une fonction potentielle à l'intérieur de Ω ; on a de plus

$$D[u] = d$$

et enfin, lorsque le point (x, y), intérieur à Ω, tend vers un point Q du contour de Ω, la fonction $u(x, y)$ tend vers la valeur de la fonction donnée f en Q. *Le problème proposé est ainsi résolu.*

Le résultat précédent peut se généraliser à d'autres domaines : il suffit que l'intégrale de Dirichlet $D[f]$ existe et que tout cercle, de rayon aussi petit qu'on veut, ayant pour centre un point de la frontière de Ω, contienne d'autres points de la frontière. On peut même se passer de l'hypothèse de l'existence de l'intégrale $D[f]$.

III. *Application de la méthode à d'autres théorèmes d'existence.* — La méthode précédente s'applique à d'autres théorèmes d'existence en changeant convenablement l'énoncé du problème du calcul des variations. Si, par exemple, il s'agit de l'existence de l'intégrale de deuxième espèce sur une surface de Riemann, la partie réelle u de cette intégrale devenant infinie en un point P de la surface de Riemann ($x = 0$, $y = 0$) qui ne soit pas un point de ramification, comme $\frac{\cos\varphi}{r}$, on peut procéder de la manière suivante. On décrit un cercle K de rayon suffisamment petit a autour du point P, on définit une fonction Φ discontinue, coïncidant dans K avec $\Psi = \frac{\cos\varphi}{r} - \frac{r\cos\varphi}{a^2}$, et identiquement nulle en dehors de K. Le problème de calcul des variations à résoudre consiste alors à chercher, parmi toutes les fonctions φ continues ainsi que leurs dérivés des deux premiers ordres sur la surface de Riemann, pour lesquelles $\varphi + \Phi$ est continue partout, sauf en P, et qui s'annulent en un point A donné de la surface, celle pour laquelle l'intégrale de Dirichlet est minima.

Ce problème se résout d'une manière tout à fait analogue au précédent.

IV. ***Sur la correspondance des points des contours dans la représentation conforme.*** — On sait que lorsqu'on fait la représentation conforme sur un cercle d'un domaine limité par une courbe de Jordan, il existe une correspondance univoque et continue entre les points des deux contours. Ce théorème a été étendu par Carathéodory au domaine simplement connexe le plus général, en remplaçant les points du contour par certains points de la frontière (Primenden) formant un ensemble parfait.

Ce théorème est une conséquence directe de deux lemmes établis par l'auteur :

Lemme *a*. — *Soit $f(z) = u + iv$ une fonction analytique de la variable complexe $z = x + iy$, définie dans le voisinage d'un segment rectiligne S du plan des z, et réalisant la représentation conforme de ce voisinage sur un domaine d'aire finie; soient de plus $C_1, C_2, \ldots$ une infinité d'arcs de courbe analytiques ne se coupant pas et tendant uniformément vers un segment AB de S. Si les valeurs de $f(z)$ tendent sur C_ν vers une constante c, $f(z)$ est identique à cette constante.*

Lemme *b*. — *Soit $u(x, y)$ une fonction potentielle régulière dans un domaine B du plan des xy; soit P un point qu'on peut atteindre sur la frontière de B, et soient C_1 et C_2 deux courbes analytiques terminées en P et ne contenant, en dehors de P, que des points intérieurs à B. Si u tend vers des limites quand (x, y) tend vers P sur C_1 et sur C_2, et si ces limites sont différentes, l'intégrale de Dirichlet $D[u]$ étendue à B est infinie.*

Si B est limité par une courbe de Jordan, ces lemmes montrent qu'à tout point de cette courbe de Jordan correspond un point et un seul du contour du cercle sur lequel se fait la représentation conforme de S (en réalité, c'est sur

un demi-plan que se fait cette représentation). Si B est un domaine simplement connexe quelconque, les points de la frontière de B qui interviennent sont les points limites des ensembles des points de B qui correspondent à une suite quelconque de points du cercle tendant vers un point de sa périphérie. Ce sont les « Primenden » de Carathéodory.

Hellinger (*Ernst*) *et Toeplitz* (*Otto*). — La théorie des fonctions continues et la théorie des formes quadratiques d'une infinité de variables (212-238).

On a remarqué, bien avant le développement systématique de la théorie des formes quadratiques d'une infinité de variables, que la théorie des fractions continues était liée d'une manière très étroite à une classe particulière de ces formes quadratiques, à savoir les formes J :

$$J(x) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \ldots + 2 b_1 x_1 x_2 + 2 b_2 x_2 x_3 + \ldots$$
$$= \sum_p (a_p x_p^2 + 2 b_p x_p x_{p+1}) \qquad (b_n \neq 0).$$

Dans le cas d'un nombre fini de variables, la transformation orthogonale qui change la forme en une somme de carrés est fournie facilement par les dénominateurs des réduites de la fraction continue

$$\cfrac{1}{a_1 - \lambda - \cfrac{b_1^2}{a_2 - \lambda - \cfrac{b_2^2}{a_3 - \lambda \ldots}}}$$

il en est de même, en un certain sens, dans le cas d'une infinité de variables.

Le présent article ne touche qu'incidemment à cette relation entre les formes J et la théorie des fractions continues : son but est proprement de rechercher la signification des formes J dans la théorie générale des formes quadratiques bornées à une infinité de variables. Toute forme bornée J possède en effet un spectre continu simple et des nombres fondamentaux simples. Les auteurs démontrent réciproquement que *toute forme bornée à spectre continu simple et à nombres fondamentaux simples* (*pouvant être à l'intérieur du spectre continu*) *peut être transformée orthogonalement en une forme* J. Les formes J apparaissent ainsi comme des éléments simples dans la théorie générale des formes quadratiques. De plus, chaque forme J admet une représentation normale, qui dépend essentiellement d'une fonction non décroissante $\rho(\mu)$ dont les discontinuités fournissent les nombres fondamentaux de la forme, le spectre continu étant formé des nombres au voisinage desquels la fonction n'est pas constante. Avec la fonction $\rho(\mu)$ interviennent une série de polynomes identiques aux dénominateurs des réduites de la fraction continue écrite plus haut et qui ont fait d'ailleurs l'objet des recherches de P. Tchebycheff, E. Heine et G. Darboux.

1. *Le spectre d'une forme* J. — Les coefficients $\varkappa_{pq}(\lambda)$ de la forme $K(\lambda; x)$ inverse de la forme $J(x) - \lambda E(x)$, où

$$E(x) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots$$

sont donnés par un système d'une infinité d'équations linéaires. On trouve sans difficulté

$$\varkappa_{pq}(\lambda) = -\pi_p(\lambda)\pi_q(\lambda)u(\lambda) - \frac{1}{c}\pi_p(\lambda)\pi_q^{1}(\lambda) \qquad (p \leqq q),$$

où $\pi_p(\lambda)$ est un polynome entier de degré $\lambda - 1$, où $\pi_q^1(\lambda)$ est le polynome $\pi_q(\lambda)$ construit en remplaçant les coefficients a_i, b_i par a_{i+1}, b_{i+1}; où c est une constante et $u(\lambda)$ une fonction encore inconnue. Cette fonction peut se déterminer par la condition que $\varkappa_{11}(\lambda)$ est la limite, pour n infini, du coefficient $\varkappa_{11}^{(n)}(\lambda)$ de la forme inverse de $J^{(n)}(x) - \lambda E(x)$, $J^{(n)}(x)$ se déduisant de $J(x)$ en ne conservant que les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On trouve ainsi

$$c\,u(\lambda) = \cfrac{1}{a_1 - \lambda - \cfrac{b_1^2}{a_2 - \lambda - \cfrac{b_2^2}{a_3 - \lambda - \ldots}}}$$

et cette fraction continue est sûrement convergente pour toutes les valeurs λ situées en dehors du spectre continu de la forme J.

La forme J peut être mise sous la forme

$$J(x) = \int \mu\, d\sigma(\mu; x) + \sum_{\alpha} \lambda_\alpha e(\lambda_\alpha; x),$$

où l'intégrale est étendue au spectre continu. Les fonctions $\sigma(\mu; x)$ et $e(\lambda_\alpha; x)$ peuvent être obtenues au moyen de la forme $K(\lambda; x)$. On a en effet

$$\lim_{\lambda''=0} \int_m^{\lambda} \Re\left[\frac{1}{i\pi} K(\lambda' + i\lambda''; x)\right] d\lambda' = \sigma(\lambda; x) + \sum_{\lambda_\alpha < \lambda} e(\lambda_\alpha; x).$$

L'auteur pose

$$\rho(\lambda) = \lim_{\lambda''=0} \frac{1}{c} \int_m^{\lambda} \Re\left[\frac{1}{i\pi}\varkappa_{11}(\lambda' + i\lambda'')\right] d\lambda' = -\lim_{\lambda''=0} \int_m^{\lambda} \Re\left[\frac{1}{i\pi} u(\lambda' + i\lambda'')\right] d\lambda'.$$

Les valeurs obtenues plus haut pour les coefficients $\varkappa_{pq}(\lambda)$ donnent alors

$$\sigma_{pq}(\lambda) + \sum_{\lambda_\alpha < \lambda} e_{pq}(\lambda_\alpha) = \int_m^{\lambda} \pi_p(\lambda')\pi_q(\lambda')\, d\rho(\lambda') \qquad (\lambda' \neq \lambda_\alpha).$$

Les nombres fondamentaux λ_α sont alors les points de discontinuité de la fonction $\rho(\lambda)$, et si δ_α est le saut de cette fonction pour λ_α, on a

$$e_{pq}(\lambda_\alpha) = \pi_p(\lambda_\alpha)\pi_q(\lambda_\alpha)\delta_\alpha,$$

d'où

$$e(\lambda_\alpha; x) = \left|\sum_p \pi_p(\lambda_\alpha)\sqrt{\delta_\alpha}\, x_p\right|^2.$$

Si maintenant on considère la fonction *continue* non décroissante

$$\rho^*(\lambda) = \rho(\lambda) - \sum_{\lambda_\alpha < \lambda} \delta_\alpha \qquad (\lambda \neq \lambda_\alpha),$$

on obtient

$$\sigma_{pq}(\lambda') = \int_m^{\lambda'} \pi_p(\lambda')\,\pi_q(\lambda')\,d\rho^*(\lambda');$$

d'où

$$\sigma(\lambda';x) = \int_m^{\lambda'} \frac{\left[d\sum_p \pi_p^*(\lambda')\,x_p\right]^2}{d\rho^*(\lambda')},$$

avec

$$\pi_p^*(\lambda') = \int_m^{\lambda'} \pi_p(\lambda')\,d\rho^*(\lambda').$$

Les valeurs trouvées pour $e_p(\lambda_\alpha;\, x)$ et $\sigma(\lambda';\, x)$ montrent que les nombres fondamentaux sont simples, ainsi que le spectre continu. On a enfin facilement

$$u(\lambda) = \int \frac{d\rho(\mu)}{\mu-\lambda}, \qquad J(\lambda) = \int \sum_{p,q} \mu\,\pi_p(\mu)\,\pi_q(\mu)\,x_p x_q\,d\rho(\mu),$$

les intégrales étant étendues au spectre de la forme J.

Les polynomes $\pi_p(\lambda)$ forment un système orthogonal par rapport à la fonction $\rho(\lambda)$ prise comme base; on a en effet

$$\int \pi_p(\lambda)\,\pi_q(\lambda)\,d\rho(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = q, \\ 0 & \text{si } p \neq q. \end{cases}$$

2. *Formes à spectre continu simple.* — Les auteurs partent maintenant, réciproquement, d'une forme réelle bornée K à spectre continu simple et supposent d'abord que cette forme n'a pas de spectre ponctuel, soit

$$K(x) = \int \lambda \frac{\left[d\sum_p \rho_p(\lambda)\,x_p\right]^2}{d\rho(\lambda)} = \Sigma k_{pq} x_p x_q,$$

avec

$$E(x) = \Sigma x_p^2 = \int \frac{\left[d\sum_p \rho_p(\lambda)\,x_p\right]^2}{d\rho(\lambda)}.$$

A la fonction continue non décroissante $\rho(\lambda)$ on peut associer une suite de polynomes $\pi_1(\lambda)$, $\pi_2(\lambda)$, ..., $\pi_p(\lambda)$ étant de degré $p-1$, formant une suite orthogonale par rapport à la fonction $\rho(\lambda)$ prise comme base. Les auteurs considèrent alors la transformation orthogonale

$$x_p = \sum_q o_{pq}\,\overline{x}_q,$$

avec

$$o_{pq} = \int_m^M \pi_q(\lambda)\,d\rho_p(\lambda) \qquad (m \leq k_{pp} < M).$$

Par cette transformation, les coefficients $\overline{k}_{pq}$ de la nouvelle forme $\overline{K}$ sont

$$\overline{k}_{pq} = \int \lambda\,\pi_p(\lambda)\,\pi_q(\lambda)\,d\rho(\lambda),$$

les intégrales étant étendues au spectre de la forme. Ces formules montrent que les seuls coefficients $\bar{k}_{pq}$ non nuls sont

$$\bar{k}_{pp} = \int \lambda \pi_p^2(\lambda)\, d\rho(\lambda) = a_p, \qquad \bar{k}_{p,p+1} = \int \lambda \pi_p(\lambda)\, \pi_{p+1}(\lambda)\, d\rho(\lambda) = -b_p,$$

et l'on a

$$b_p > 0.$$

On voit donc que *toute fonction quadratique bornée à spectre continu simple peut être transformée orthogonalement en une forme* J.

3. *Formes à spectre ponctuel et spectre continu simples.* — Soit maintenant une forme

$$K(x) = \sum_{(p,q)} k_{pq} x_p x_q = \int \lambda \frac{\left[d \sum_{(p)} \rho_p^*(\lambda) x_p \right]^2}{d\rho^*(\lambda)} + \Sigma \lambda_\alpha \left(\sum_{(p)} l_{\alpha p} x_p \right)^2.$$

La fonction $\rho^*(\lambda)$ est une fonction continue non décroissante. On ramène ce cas au précédent de la manière suivante : on fait correspondre aux nombres fondamentaux λ_α une suite de nombres positifs δ_α assujettis à la seule condition que la série $\sum \delta_\alpha$ soit convergente, et l'on pose

$$\rho(\lambda) = \rho^*(\lambda) + \sum_{(\lambda_\alpha < \lambda)} \delta_\alpha \qquad (\lambda \neq \lambda_\alpha).$$

Si l'on pose alors

$$\rho_p(\lambda) = \rho_p^*(\lambda) + \sum_{(\lambda_\alpha < \lambda)} l_{\alpha p} \sqrt{\delta_\alpha} \qquad (\lambda \neq \lambda_\alpha),$$

on a

$$K(x) = \int \lambda \frac{\left[d \sum_{(p)} \rho_p(\lambda) x_p \right]^2}{d\rho(\lambda)}.$$

Les polynomes $\pi_p(\lambda)$ se déterminent alors comme précédemment ainsi que la transformation orthogonale qui transforme $K(x)$ en une forme J. Cette forme J est bien déterminée quand on se donne le nombre δ_α ; mais comme ces nombres sont arbitraires, à la restriction près indiquée plus haut, on voit que la transformation orthogonale de la forme K en une forme J est possible d'une infinité de manières.

E. Cartan.

ANNALI DELLA R. SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
(SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE).

Tomo VIII, 1899.

Niccoletti (O.). — [H 4 *d*] Sur la transformation des équations linéaires du deuxième ordre à deux variables indépendantes (1-143, une page d'errata).

Les problèmes traités par l'auteur sont les suivants :

Étant donnée

$$(1) \qquad \Omega(z) = ar + 2bs + ct + 2dp + 2eq + fz = 0$$

une équation linéaire homogène du deuxième ordre :

a. Déterminer toutes les fonctions θ *formées linéairement et homogénément avec* z *et ses dérivées, qui, pour toute fonction* z *satisfaisant à l'équation donnée, satisfont à une équation analogue.*

La fonction θ est une *transformée différentielle* de z (d'ordre m si elle contient les dérivées de z jusqu'à l'ordre m).

b. Déterminer toutes les fonctions φ *dont le différentiel est donné par une expression linéaire homogène de* z *et de ses dérivées et qui, pour toute fonction* z *satisfaisant à l'équation donnée, satisfont à une équation analogue.*

La fonction φ est une *transformée intégrale* (d'ordre m) de z.

La bibliographie qui précède le travail comprend, pour ce qui regarde les transformations différentielles, en dehors de la transformation de Laplace, les travaux suivants :

Lewy, *Sur quelques équations linéaires, etc.* (*Journal de l'École Polytechnique*, LVIe cahier, 1886, p. 63).

Darboux, *Leçons*, etc., vol. II.

Liouville (Roger), *Sur les formes intégrables, etc.* (*Journal de l'École Polytechnique,* LVIe cahier, 1886, p. 32).

Pour les transformations intégrales on ne connaissait, à l'époque du travail présent, que le théorème de Moutard et les résultats énoncés dans l'introduction de son Mémoire, perdu en 1871; quelques formules de M. Darboux dans ses *Leçons* et un théorème de Liouville (dans le travail cité ci-dessus) retrouvé ensuite par M. Burgatti [*Sulle equazioni lineari, ecc.* (*Annali di Matem.*, série II, t. XXIII, 1895)] pour le type elliptique.

L'auteur réunit ces résultats et y en ajoute de nouveaux. Il commence par des notions générales sur les composantes d'une équation du deuxième ordre, sur l'équation adjointe, sur l'intégrale générale, et démontre le théorème suivant :

Un nombre p de fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_p$ des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont liées par un système de relations finies et différentielles. Si ce système est tel qu'en considérant avec ces relations toutes celles qu'on en déduit en différentiant autant de fois que l'on veut, on obtient, à partir d'un certain moment, autant de dérivées à calculer que de nouvelles relations indépendantes, on dit que ce système de relations est un *système complet*.

Le théorème consiste en ce que les fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_p$ satisfaisant à un système complet, s'obtiennent par un système d'équations aux différentielles totales, pour lequel les conditions d'intégrabilité sont satisfaites par suite des relations données.

Après cela commence l'étude des transformations différentielles du premier ordre, en déduisant du théorème précédent les conditions nécessaires pour que

$$(1) \qquad \theta = \alpha z + \beta p + \gamma q$$

satisfasse à une équation analogue à celle satisfaite par z, c'est-à-dire que l'on ait

$$F(\theta) = A\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} + 2D\frac{\partial\theta}{\partial x} + 2E\frac{\partial\theta}{\partial y} + F\theta = 0.$$

On prouve que le système formé par

$$(1) \qquad \Omega(z) = 0,$$

$$(2) \qquad \theta = \alpha z + \beta p + \gamma q,$$

$$(3) \qquad \frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\partial\alpha}{\partial x}z + \left(\alpha + \frac{\partial\beta}{\partial x}\right)p + \frac{\partial\gamma}{\partial x}q + \beta r + \gamma s,$$

$$(4) \qquad \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\partial\alpha}{\partial y}z + \frac{\partial\beta}{\partial y}p + \left(\alpha + \frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)q + \beta s + \gamma t,$$

où l'on regarde θ comme donnée et z comme inconnue, et en supposant que le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a & 2b & c \\ \beta & \gamma & 0 \\ 0 & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro, est un système complet. On en déduit que z, p, q peuvent s'obtenir du système aux différentielles totales

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$
$$dp = r\,dx + s\,dy,$$
$$dq = s\,dx + t\,dy,$$

où r, s, t sont obtenues en résolvant (1), (3) et (4). On aura

$$(5) \qquad z = Z + a_1 z_1 + a_2 z_2,$$

Z, z_1, z_2 étant des solutions particulières de (1), et d'une manière analogue

$$(6) \qquad p = P + a_1 p_1 + a_2 p_2,$$

$$(7) \qquad q = Q + a_1 q_1 + a_2 q_2.$$

et en substituant les valeurs (5), (6), (7) dans l'expression

$$\theta = \alpha z + \beta p + \gamma q,$$

les coefficients de a_1, a_2 doivent s'annuler, c'est-à-dire que θ doit s'annuler identiquement pour $z = z_1$ et $z = z_2$. La condition est aussi suffisante, comme l'auteur le prouve tout de suite, et l'on a que la condition nécessaire et suffisante pour que l'expression

$$\theta = \alpha z + \beta p + \gamma q$$

satisfasse à une équation linéaire homogène de deuxième ordre dans l'hypothèse que le déterminant D soit différent de zéro, est que θ s'annule pour deux solutions particulières de

$$\Omega(z) = 0$$

et reste déterminée par ces conditions.

Le cas exceptionnel $D = 0$ peut avoir lieu seulement pour les équations du type hyperbolique et parabolique. Une méthode analogue à celle qui a été employée précédemment conduit au résultat suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que l'expression

$$\theta = \alpha z + \beta p$$

satisfasse à une équation analogue à l'équation $\Omega = 0$ satisfaite par z, est, pour le cas hyperbolique, que l'équation en θ soit une des transformées de Laplace de l'équation en z, ou bien que θ s'annule pour une solution particulière de cette équation ; et, pour le cas parabolique, que θ s'annule pour une solution particulière de la même équation.

Pour les transformations différentielles d'ordre m

$$\theta = \Sigma \alpha_{ik} z_{ik} \qquad (0 \leq i + k \leq m),$$

où

$$z_{ik} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k},$$

l'auteur obtient par la même méthode des conditions analogues qui sont les suivantes :

Si le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_{m,0} & \alpha_{m-1,1} & \alpha_{m-2,2} & \alpha_{m-3,3} & \dots & \alpha_{1,m-1} & \alpha_{0,m} & 0 \\ 0 & \alpha_{m,0} & \alpha_{m-1,1} & \alpha_{m-2,2} & \dots & \alpha_{2,m-2} & \alpha_{1,m-1} & \alpha_{0,m} \\ a & 2b & c & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 2b & c & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 2b & c \end{vmatrix}$$

est différent de zéro, la condition est que θ s'annule pour $2m$ solutions particulières de l'équation donnée en z, et par ces conditions elle soit déterminée. L'équation en θ est alors de même classe que celle en z et se réduit à la forme normale avec le même changement de variables.

L'hypothèse $D = 0$ ne peut correspondre qu'aux types hyperbolique et parabolique. Pour le premier de ces deux types, on a alors le théorème de Darboux,

c'est-à-dire que la condition pour qu'une expression

$$\theta(m, n) = \alpha z + \alpha_1 z_{10} + \alpha_2 z_{20} + \ldots + \alpha_m z_{m0} + \beta_1 z_{01} + \beta_2 z_{02} + \ldots + \beta_n z_{0n} \quad (n < m)$$

satisfasse à une équation linéaire homogène du deuxième ordre est qu'elle s'annule pour $m+n$ solutions particulières de l'équation en z; seulement, lorsque $n = 0$, elle peut se déduire par i transformations de Laplace d'une expression analogue $(m - i, 0)$ qui s'annule pour $m - i$ solutions particulières de la $i^{\text{ième}}$ transformée de Laplace de l'équation donnée.

Pour le type parabolique de forme normale, la condition est que l'on ait

$$\theta = \alpha z + \alpha_1 z_{01} + \ldots + \alpha_m z_{0m} + \beta_1 z_{10} + \beta_2 z_{11} + \ldots + \beta_m z_{1,m-1}$$

ou bien

$$\theta = \alpha z + \alpha_1 z_{01} + \ldots + \alpha_{m-1} z_{0,m-1} + \beta_1 z_{10} + \beta_2 z_{11} + \ldots + \beta_m z_{1,m-1}$$

et qu'elle s'annule dans le premier cas pour $2m$, et dans le second pour $2m - 1$ solutions particulières de l'équation donnée. L'équation en θ est aussi du type parabolique et de forme normale. C'est le cas de la *transformation singulière* trouvée par l'auteur.

Pour les calculs relatifs à toutes ces transformations, l'auteur donne une méthode remarquable fondée sur l'observation suivante :

Soient

$$a\lambda_h + b\lambda_{h+1} + c\lambda_{h+2} = 0,$$
$$a\lambda'_h + b\lambda'_{h+1} + c\lambda'_{h+2} = 0,$$
$$a\lambda''_h + b\lambda''_{h+1} + c\lambda''_{h+2} = 0$$

trois successions récurrentes, ayant même échelle de relation; comme a, b, c sont proportionnels aux mineurs

$$\lambda'_{h+1}\lambda''_{h+2} - \lambda'_{h+2}\lambda''_{h+1}, \quad \ldots,$$

on aura

$$\frac{\lambda_h \lambda'_{h+1} - \lambda_{h+1}\lambda'_h}{\lambda_h \lambda''_{h+1} - \lambda_{h+1}\lambda''_h} = \frac{\lambda_{h+1}\lambda'_{h+2} - \lambda_{h+2}\lambda'_{h+1}}{\lambda_{h+1}\lambda''_{h+2} - \lambda_{h+2}\lambda''_{h+1}} = \frac{\lambda_{h+2}\lambda'_h - \lambda_h\lambda'_{h+2}}{\lambda_{h+2}\lambda''_h - \lambda_h\lambda''_{h+2}},$$

et le rapport de deux de ces déterminants ne change pas en augmentant d'une unité chaque indice ou en faisant une permutation cyclique des indices; et une telle propriété a lieu aussi pour les fonctions linéaires homogènes de ces déterminants. Cette propriété s'applique aux déterminants formés avec des solutions particulières et leurs dérivées.

z étant une solution de $\Omega(z) = 0$, il y a entre trois dérivées successives la relation

$$a z_{k} + b z_{k+1} + c z_{k+2} = 0.$$

On forme des déterminants dont la première ligne contient les solutions particulières, les lignes deuxième et troisième leurs dérivées premières, les lignes troisième et quatrième deux dérivées secondes, et ainsi de suite, l'avant-dernière et la dernière deux dérivées de l'ordre m. Alors le quotient de deux de ces déterminants correspondant à deux systèmes de solutions, mais contenant les dérivées de même ordre, est indépendant du choix des dérivées qu'ils con-

tiennent, et trois quelconques de ces déterminants, qui ne diffèrent que par deux lignes où figurent cycliquement deux de trois dérivées consécutives, ont des valeurs proportionnelles à a, $2b$, c.

Les transformations différentielles ont entre elles des relations. Toute transformation du premier ordre d'une équation du type hyperbolique peut s'obtenir par composition d'une des deux transformations de Laplace et d'une de celles de Lewy ; et toute transformation du premier ordre d'une équation du type parabolique par composition de deux transformations singulières. Deux transformations du premier ordre sont toujours permutables.

Toute transformation d'ordre supérieur s'obtient en composant des transformations du premier ordre. Deux transformations d'ordre quelconque sont permutables et la transformation composée est d'un ordre qui ne surpasse pas la somme des ordres.

Si d'une équation

$$\Omega(z) = 0$$

on passe, par une transformation différentielle du premier ordre, à l'équation

$$P(\theta) = 0,$$

on passe aussi, par une transformation du premier ordre, de l'équation

$$Q(\lambda) = 0,$$

adjointe de Ω, à l'équation

$$\Phi(u) = 0,$$

adjointe de P.

Si z est l'intégrale générale de $\Omega(z) = 0$, toute transformée différentielle θ est l'intégrale générale de l'équation transformée.

Lorsqu'on connaît la solution *principale* de l'équation primitive, la solution principale de toute transformée différentielle se trouve par des quadratures.

Dans le Chapitre III, l'auteur étudie les *transformations intégrales*.

$$\Omega(z) = ar + 2bs + ct + 2dp + 2eq + fz = 0$$

étant l'équation donnée, et

$$\Phi(u) = \frac{\partial^2(au)}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2(bu)}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2(cu)}{\partial y^2} + 2\frac{\partial(du)}{\partial x} + 8\frac{\partial(eu)}{\partial y} + fu = 0$$

son adjointe, on a

$$u\,\Omega(z) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y},$$

u étant une solution de l'équation adjointe, et

$$P = \alpha p + \beta q + \gamma z,$$

$$Q = \alpha' p + \beta' q + \gamma' z,$$

$$(2)\quad \begin{cases} \alpha = au, & \beta = bu - v, & \gamma = 2du - \dfrac{\partial(au)}{\partial x} - \dfrac{\partial(bu)}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \alpha' = bu + v, & \beta' = cu, & \gamma' = 2eu - \dfrac{\partial(bu)}{\partial x} - \dfrac{\partial(cu)}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial x}, \end{cases}$$

et v une fonction arbitraire. Si z est une intégrale de $\Omega(z) = 0$, il existe une

fonction φ dont les dérivées sont

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \alpha' p + \beta' q + \gamma' z,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -(\alpha p + \beta q + \gamma z),$$

et en supposant différent de zéro le détermiuant

$$\delta = \alpha\beta' - \alpha'\beta = v^2 - \Delta u^2 \qquad (\Delta = b^2 - ac),$$

on peut déduire

$$p = -\frac{1}{\delta}\left[\beta\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \gamma' z\right) - \beta'\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \gamma z\right)\right],$$

$$q = \frac{1}{\delta}\left[\alpha\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \gamma' z\right) + \alpha'\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \gamma z\right)\right],$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{\delta}\left[\beta\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \gamma' z\right) - \beta'\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \gamma z\right)\right]\right\}$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{\delta}\left[\alpha\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \gamma' z\right) + \alpha'\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \gamma z\right)\right]\right\} = 0,$$

ce qui donne, en faisant les dérivations, en multipliant par $\frac{\delta}{u}$ et en tenant compte des relations (1),

$$a\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y} + c\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$
$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\delta}{u}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\alpha}{\delta}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\beta}{\delta}\right) + \frac{\gamma}{\delta}\right]$$
$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\delta}{u}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\alpha}{\delta}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\beta'}{\delta}\right) - \frac{\gamma}{\delta}\right]$$
$$+ z\frac{\delta}{u}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\delta}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\beta'\gamma - \beta\gamma'}{\delta}\right)\right] = 0.$$

Donc, si

$$(2) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\delta}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\beta'\gamma - \beta\gamma'}{\delta}\right) = 0,$$

la fonction φ satisfait à l'équation

$$(3) \qquad a\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y} + c\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$
$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\delta}{u}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\alpha}{\delta}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\beta}{\delta}\right) + \frac{\gamma}{\delta}\right]$$
$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\delta}{u}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\alpha}{\delta}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\beta'}{\delta}\right) - \frac{\gamma'}{\delta}\right] = 0,$$

et en est l'intégrale générale, et la fonction $\frac{u}{\delta}$ est une solution particulière de l'équation adjointe de (3). On a donc le théorème suivant :

Connaissant une solution de $\Phi(u) = 0$, *toute solution de* (2) (*qui*

n'annule pas $v^2 - \Delta u^2$) *permet de construire une autre équation linéaire homogène du deuxième ordre de même classe que l'équation donnée, dont l'intégrale générale s'obtient de l'intégrale de celle-ci par une quadrature.* L'équation (2) est l'*équation* de *la transformation* et l'équation (3) l'équation *transformée* de $\Omega(z) = 0$ au moyen du couple u, v.

Le cas de $\delta = 0$ donne lieu aux *transformations singulières* qui ne peuvent avoir lieu que dans les cas hyperbolique et parabolique. Pour le type hyperbolique, elles ont été trouvées par M. Darboux; l'auteur trouve aussi celles relatives au type parabolique.

Pour les transformations non singulières du premier ordre il suffit de connaître l'intégrale générale de l'équation de la transformation pour avoir toutes ces transformations.

La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction φ satisfasse à une équation linéaire du deuxième ordre (en supposant le déterminant différent de zéro) est que ses dérivées s'annulent pour une solution particulière de l'équation donnée en z. De ce théorème on déduit la formule donnant l'intégrale générale de l'équation (2), qui est

$$v = \frac{1}{\lambda} \int [\lambda \Phi_2(u) - u\Omega_2(\lambda)]\, dx - [\lambda \Phi_1(u) - u\Omega_1(\lambda)]\, dy$$

λ étant l'intégrale générale de l'équation de la transformation.

Comme cas particuliers, on obtient les résultats de Moutard, de Liouville et de Burgatti; et l'auteur démontre que, si l'on connaît m intégrales particulières de l'équation adjointe de $\Omega(z) = 0$, la même chose a lieu pour toute équation obtenue par des transformations de Liouville. Un théorème analogue a lieu pour l'intégrale générale d'une transformée de Liouville, qui peut s'obtenir par une quadrature de l'intégrale générale de l'équation adjointe. La transformation de Liouville conduit aussi à la construction de toutes les transformations intégrales du premier ordre.

Les transformations singulières sont étudiées à part. Elles n'ont lieu que pour les types hyperbolique et parabolique, et elles donnent un autre moyen d'intégrer l'équation de la transformation. La transformation intégrale du premier ordre de $\Omega(z) = 0$ correspondant à la solution particulière u de l'équation adjointe, s'obtient en faisant, sur une des transformations singulières correspondantes, une transformation différentielle singulière.

Suit l'étude des transformées intégrales d'ordre supérieur. Toute transformée intégrale φ d'ordre m, non singulière, est déterminée par une solution particulière u de l'équation adjointe et par $2m - 1$ solutions particulières de l'équation en z, qui doivent annuler les deux dérivées de φ.

Une transformation intégrale non singulière d'ordre m s'obtient en composant une transformation intégrale non singulière du premier ordre avec une transformation différentielle non singulière d'ordre $m - 1$. Une transformation intégrale et une transformation différentielle sont toujours permutables.

Une transformation intégrale singulière d'une équation du type hyperbolique s'obtient en composant une transformation différentielle (singulière ou non) avec une transformation intégrale singulière du premier ordre. Pour le type parabolique, les transformations composantes d'une transformation singulière sont une transformation non singulière et une singulière du premier ordre.

Pour la construction de l'équation en φ, l'auteur donne une méthode qui fait

connaître $2m - 1$ solutions particulières de l'équation adjointe à celle satisfaite par φ. Puis il démontre que, lorsque z est l'intégrale générale de l'équation primitive, la même chose a lieu pour toute transformée intégrale φ.

Dans le Chapitre IV et dernier, il fait l'étude des transformations inverses des transformations différentielles et intégrales, et trouve une relation entre les équations adjointes de deux transformées différentielles ou intégrales d'ordre quelconque.

Bemporad (*A.*). — [J 4] Sur les groupes de mouvements et de similitudes dans l'espace de 3, 4 et 5 dimensions (1-83).

L'auteur se propose de déterminer les types de groupes continus de mouvements réels de l'espace ordinaire, de l'espace S_4 et pour certains cas relatifs à l'espace S_5.

Il commence par déterminer les types plus généraux de rotations à un paramètre dans des espaces S_{4m}, S_{4m+2}, L_{2m+1} respectivement. On obtient tous les types de rotations infinitésimales réelles de S_{4m+2} en faisant prendre à $h_1, h_2, \ldots, h_{2m}$ dans la transformation

$$Xf = X_{12} + h_1 X_{34} + \ldots + h_{2m} X_{4m+1,4m+2} \quad \left(X_{ik} = x_i \frac{\partial f}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial f}{\partial x_i} \right),$$

tous les systèmes de valeurs

$$1 \geq h_1 \geq h_2 \geq \ldots \geq h_{2m} \geq 0.$$

Pour l'espace S_{4m}, il faut prendre

$$1 \geq h_1 \geq h_2 \geq \ldots \geq h_{2m-1} \geq 0$$

dans les deux transformations

$$X_1 f = X_{12} + h_1 X_{34} + \ldots + h_{2m-1} X_{4m-1,4m},$$
$$X_2 f = X_{12} - h_1 X_{34} + \ldots + h_{2m-1} X_{4m-1,4m}.$$

Pour l'espace S_{2m+1}, on doit faire

$$1 \geq h_1 \geq h_2 \geq \ldots \geq h_{n-1} \geq 0$$

dans

$$X_{12} + h_1 X_{34} + \ldots + h_{n-1} X_{2n-1,2n}.$$

Le mouvement infinitésimal le plus général est, dans un espace pair, une rotation infinitésimale et, dans un espace impair, la transformation

$$\lambda (X_{12} + h_1 X_{34} + \ldots + h_{n-1} X_{2n-1,2n}) + k \frac{\partial f}{\partial x_{2n+1}}.$$

Il y a certaines fonctions invariantives des transformations infinitésimales qui servent pour la détermination des types. Les résultats que l'auteur obtient sont appliqués à l'espace ordinaire, dans lequel on prend pour transformations infi-

nitésimales génératrices du groupe G_7 les rotations

$$X_1 f = y\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$X_2 f = z\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial z},$$

$$X_3 f = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x},$$

la similitude

$$X_4 f = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}$$

et les translations

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Les types sont les suivants :

a. Quatre types à un paramètre :

I. X_4;

II. $X_3 + a\frac{\partial f}{\partial z}$;

III. $\frac{\partial f}{\partial x}$;

IV. $X_3 + cX_4$.

b. Cinq types à deux paramètres :

I. $\left(X_4, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$;

II. $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$;

III. (X_3, X_4);

IV. $\left(X_3 + \frac{\partial f}{\partial z}, X_4\right)$;

V. $\left(X_3 - cX_4, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$.

c. Six types à trois paramètres :

I. (X_1, X_2, X_3);

II. $\left(X_3, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$;

III. $\left(X_3 - a\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$;

IV. $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$;

V. $\left(X_3, X_4, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$;

VI. $\left(X_3 - cX_4, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

d. Cinq types à quatre paramètres :

I. $$\left(X, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right);$$

II. $$(X_1, X_2, X, X);$$

III. $$\left(X, X, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right);$$

IV. $$\left(X, \frac{\partial f}{\partial z}, X, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right);$$

V. $$\left(X - cX, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right);$$

puis les types

$$\left(X, X, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right),$$

$$\left(X_1, X, X_3, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

respectivement à cinq et six paramètres, et enfin le groupe total même G_7 des mouvements et similitudes.

Dans l'espace S_4, le groupe total des mouvements et similitudes est à *onze* paramètres, et dans ce cas aussi l'auteur détermine complètement les types divers.

Pour l'espace S_5, la recherche comprend seulement les groupes à un, deux, trois et quatre paramètres.

Benedetti (*P.*). — [B 4 ref. B 12] Sur la théorie des formes hyperalgébriques (1-113).

Ce travail se rattache à ceux de M. Segre [*Un nuovo campo di ricerche geometriche* (*Atti della R. Accad. di Torino*, t. XXV, p. 276, 430 et 592, et t. XXVI, p. 35)], mais ici les formes hyperalgébriques sont considérées à un point de vue plus général.

Une forme hyperalgébrique est l'expression

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n; \overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}),$$

Φ étant le symbole d'une fonction rationnelle entière et $\overline{x_i}$ la quantité conjuguée de x_i. On suppose que l'expression soit homogène par rapport aux x et aux $\overline{x}$ séparément. Une définition analogue a lieu pour les formes hyperalgébriques à plusieurs séries de variables.

Soient $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m$ un système de formes et A les coefficients de Φ_1, B ceux de Φ_2, ... En faisant sur les variables une transformation de *première espèce* (ou *projectivité*)

$$x_i = a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + \ldots + a_{in} y_n,$$

accompagnée de la transformation conjuguée pour les $\overline{x_i}$, ou bien en faisant une transformation de *deuxième espèce* (ou *antiprojectivité*)

$$x_i = a_{i1} \overline{y_1} + a_{i2} \overline{y_2} + \ldots + a_{in} \overline{y_n},$$

accompagnée aussi de sa conjuguée pour les $\overline{x}$, il peut arriver que, pour une fonction rationnelle

$$\Pi(\mathrm{A}, \overline{\mathrm{A}};\ \mathrm{B}, \overline{\mathrm{B}};\ \ldots;\ x, \overline{x};\ x', \overline{x'};\ \ldots),$$

on ait, dans le premier cas,

$$\begin{aligned}\theta(a_{ik}, \overline{a_{ik}})\,\Pi(\mathrm{A}, \overline{\mathrm{A}};\ \mathrm{B}, \overline{\mathrm{B}};\ \ldots;\ x, \overline{x};\ x', \overline{x'};\ \ldots)\\ = \Pi(\mathrm{A}', \overline{\mathrm{A}'};\ \mathrm{B}', \overline{\mathrm{B}'};\ \ldots;\ y, \overline{y};\ y', \overline{y'};\ \ldots),\end{aligned}$$

et, dans le second,

$$\begin{aligned}\theta(a_{ik}, \overline{a_{ik}})\,\Pi(\mathrm{A}, \overline{\mathrm{A}};\ \mathrm{B}, \overline{\mathrm{B}'};\ \ldots;\ x, \overline{x};\ x', \overline{x'};\ \ldots)\\ = \overline{\Pi(\mathrm{A}', \overline{\mathrm{A}'};\ \mathrm{B}', \overline{\mathrm{B}'};\ \ldots;\ y, \overline{y};\ y', \overline{y'};\ \ldots)}.\end{aligned}$$

Alors on dit, dans le premier cas, que Π est une *fonction invariantive de première espèce* et, dans le second, une fonction *invariantive de deuxième espèce.*

A l'étude des formes hyperalgébriques l'auteur fait précéder un Chapitre relatif aux formes invariantives des formes *algébriques* par rapport aux transformations de première et de seconde espèce, et démontre les propositions suivantes, qui ont lieu aussi pour les formes hyperalgébriques :

Toute fonction invariantive de seconde espèce l'est aussi de première espèce.

Toute fonction invariantive de première espèce l'est aussi de seconde espèce seulement lorsqu'elle coïncide avec la fonction à coefficients conjugués, à moins d'un facteur constant. Cette constante est de module 1.

Pour les formes hyperalgébriques, l'auteur introduit une notation analogue à celle d'Aronhold, et écrit

$$a_x^p\,\overline{a}_{0_{\overline{x}}}^q$$

pour représenter une forme $(p, \overline{q})$ de degré p en x et q en $\overline{x}$, où seulement les produits symboliques de p facteurs a avec q facteurs a_0 sont des quantités effectives. Plusieurs propriétés connues, relatives aux formes algébriques, s'étendent aux formes hyperalgébriques. Par exemple, la fonction $\theta\left(a_{ik}, \overline{a_{ik}}\right)$ est le produit d'une puissance du module de la transformation par une puissance de son conjugué.

Les opérations

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\mathrm{A}_1}\mathrm{A}'_1 + \frac{\partial\Pi}{\partial\mathrm{A}_2}\mathrm{A}'_2 + \ldots,$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\overline{\mathrm{A}}_1}\overline{\mathrm{A}'_1} + \frac{\partial\Pi}{\partial\overline{\mathrm{A}}_2}\overline{\mathrm{A}'_2} + \ldots$$

conservent la propriété invariantive. La même chose a lieu pour les opérations polaires appliquées à la forme $f = a_x^p\,\overline{a}_{0_{\overline{x}}}^q$:

$$\Delta_y^r f = \frac{1}{p(p-1)\ldots(p-r+1)}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}y_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}y_n\right)^r,$$

$$\Delta_{\overline{y}}^r f = \frac{1}{q(q-1)\ldots(q-r+1)}\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{x}_1}\overline{y}_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \overline{x}_n}\overline{y}_n\right)^r.$$

Un invariant d'un système de formes linéaires peut toujours se mettre sous la forme d'une somme de produits de facteurs des types (mn), $(\overline{mn})$, étant m_x et n_x ou m_x et $\overline{n}_x$ ou $\overline{m}_x$ et $\overline{n}_x$ deux formes quelconques du système. De là on déduit la représentation symbolique d'un invariant d'un système de formes hyperalgébriques quelconques.

Pour un covariant, on a la forme

$$\Sigma M (ab)^h (\overline{a_0 b_0})^k a^l_{0_x} a^m_{0_{\overline{x'}}} a^g_n (xx')^p (\overline{xx'})^q \ldots .$$

Pour les opérations qu'on appelle des *composés* (*Scorrimenti*, *Ueberschiebungen*) de deux formes

$$f = a_x^m a_{0_{\bar x}}^n, \qquad \varphi = b_x^p b_{0_{\bar x}}^q,$$

on a

$$(f\varphi)_r = (ab)^r a_x^{m-r} b_x^{p-r} \bar a_{0_{\bar x}}^n \bar b_{0_{\bar x}}^q,$$

$$(f\varphi)_{\bar r} = (\bar a_0 \bar b_0)^r a_x^m b_x^p a_{0_{\bar x}}^{n-r} \bar b_{0_{\bar x}}^{q-r},$$

$$(f\varphi)_{r,\bar s} = (ab)^r (\bar a_0 \bar b_0)^s a_x^{m-r} b_x^{p-r} a_{0_{\bar x}}^{n-s} b_{0_{\bar x}}^{q-s}.$$

Les formes hyperalgébriques binaires peuvent s'interpréter géométriquement sur le plan en faisant correspondre à tout couple x_1, x_2 de variables le point x, y du plan de Gauss qui correspond à $z = \frac{x_1}{x_2}$. Au groupe des transformations linéaires de première espèce des x_1, x_2 correspond alors le groupe des affinités circulaires directes. A une transformation linéaire de seconde espèce correspond une affinité circulaire inverse.

Une forme (1, 1)

$$f = a_{11} x_1 \overline{x}_1 + a_{12} x_1 \overline{x}_2 + a_{21} x_2 \overline{x}_1 + a_{22} x_2 \overline{x}_2,$$

qui peut se représenter par

$$a_x \overline{a}_{\bar x} = b_x \overline{b}_{\bar x} = \ldots,$$

et où par suite il est

$$a_{ik} = a_i \overline{a}_k,$$

est réelle. Pour une telle forme le système complet est formé par la forme elle-même et par l'invariant

$$D = (ff)_{1,\bar 1} = (ab)(\overline{a}\overline{b}),$$

qui est aussi une forme réelle.

L'équation

$$f' = a_x \overline{a}_{\bar y} = a_{11} x_1 \overline{y}_1 + a_{12} x_1 \overline{y}_2 + a_{21} x_2 \overline{y}_1 + a_{22} x_2 \overline{y}_2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$(a_{11} \overline{y}_1 + a_{12} \overline{y}_2) x_1 + (a_{21} \overline{y}_1 + a_{22} \overline{y}_2) x_2 = 0,$$

équivaut aux deux équations

[illegible]

[illegible]

et établit une *antiprojectivité* qui, sous l'hypothèse précédente relative aux [illegible], est une *anti-involution*, et l'affinité circulaire inverse correspondante est une transformation par rayons vecteurs réciproques, par rapport à un cercle réel ou à un cercle imaginaire suivant que $D \lesseqgtr 0$. Les points du cercle représentent les points unis de l'anti-involution qui constituent ce que M. Segre appelle une *chaîne simple* et qui correspondent aux racines de l'équation

[illegible]

Pour la forme $(1, \bar{1})$ non réelle

$$f = a_x \bar{a}_{0_{\bar{x}}} = b_x \bar{b}_{0_{\bar{x}}} = \ldots,$$

le système complet est formé par la forme elle-même et par

[illegible]

et leurs conjuguées.

L'équation

[illegible]

établit une *antiprojectivité* dont les éléments unis sont les racines de $f = 0$, et qui permet de donner l'interprétation des formes invariantives. On voit aisément que $\delta = 0$ exprime que l'antiprojectivité $f' = 0$ est dégénérée; que $\rho = 0$ représente les éléments unis de la *projectivité* $f'f'$, et son annulement identique exprime que f est réelle, ou peut devenir réelle en la multipliant par un facteur constant (de là le nom de *réalisant* que l'auteur propose pour ρ); on voit aussi que $\delta_0 = 0$ est la condition pour que l'antiprojectivité $f' = 0$ soit cyclique de quatrième ordre.

Toutes les formes $(1, \bar{1})$ représentées par

$$f_\lambda = \lambda_1 f + \lambda_2 \bar{f} = \lambda_1 a_x \bar{a}_{\bar{x}} + \lambda_2 a_{x} \bar{a}_{\bar{x}}.$$

où le paramètre $\lambda_1 : \lambda_2$ prend toutes les valeurs réelles et imaginaires, constituent un *faisceau syzygétique*, que l'auteur considère en même temps que le *faisceau d'antiprojectivités*

$$f'_\lambda = \lambda_1 a_x \bar{a}_{x'} + \lambda_2 a_{x'} \bar{a}_x = 0.$$

en en déduisant que l'équation $f = 0$ n'a pas de solution, en a deux ou une seule, suivant que les deux *antiprojectivités dégénérées* du faisceau sont involutives ou ne le sont pas, ou se réduisent à une seule, c'est-à-dire suivant que

$$\Delta [illegible]$$

étant

$$\Delta = \delta\bar{\delta} - \delta\gamma.$$

Dans le faisceau syzygétique, regardé comme une variété rationnelle, les anti-involutions forment une *chaine simple* R. Deux antiprojectivités inverses se correspondent dans l'anti-involution dont la chaine R est fondamentale: elles sont séparées harmoniquement par R.

De la considération du faisceau syzygétique l'auteur déduit aussi des conséquences géométriques, par exemple, que pour toute antiprojectivité du faisceau il y en a une autre du même faisceau, telle que le produit des deux est une involution ; ces deux antiprojectivités se correspondent dans une anti-involution.

Après cela, l'auteur construit le système complet pour quatre formes $(1, \bar{1})$ réelles, puis pour une forme $(1, \bar{1})$ réelle et une forme algébrique quadratique, et aussi pour deux $(1, \bar{1})$ non réelles.

Enfin il passe aux formes ternaires et à la détermination du système complet pour une forme $(1, \bar{1})$ réelle, pour deux de ces formes et pour une forme $(1, \bar{1})$ non réelles.

Giacomini (A.). — [P 6 g] Sur la correspondance entre la géométrie conforme de S_4 et la géométrie projective de l'espace ordinaire (1-33).

La variété des points-sphères de S_4 est quadratique et appartient à l'espace linéaire S_5 formé par les hypersphères de S_4. Toutes et seulement les transformations projectives de l'espace S_5 en lui-même qui transforment en elle-même la quadrique des points, sont celles du groupe *conforme*, obtenu en ajoutant au groupe *principal* de la géométrie métrique toutes les inversions. On en déduit que l'étude de l'espace linéaire de quatre dimensions, pour les propriétés qui ne changent pas dans le groupe conforme, coïncide avec l'étude d'une quadrique à quatre dimensions appartenant à un espace linéaire à cinq dimensions, pour les propriétés qui ne changent pas dans le groupe des transformations projectives transformant la quadrique en elle-même. L'étude de l'espace linéaire à quatre dimensions, pour les propriétés invariantives du groupe principal, coïncide avec l'étude d'une quadrique comme ci-dessus, mais dont un des points reste fixe pour les transformations projectives transformant la quadrique en elle-même. La géométrie de S_4 ayant pour groupe fondamental le groupe conforme coïncide avec la géométrie projective de l'espace ordinaire et la géométrie de S_4 du groupe principal avec celle de l'espace ordinaire dont le groupe fondamental est celui des transformations projectives laissant fixe une droite arbitraire.

Comme exemple des applications, rapportons les deux propositions suivantes :

Étant données six hypersphères deux à deux orthogonales, le plan qui contient trois des centres est orthogonal au plan qui contient les trois autres. Quatre quelconques des centres déterminent un tétraèdre; chacun des quatre plans qu'on peut conduire par les sommets perpendiculairement aux faces opposées, passe par les deux autres centres.

Étant donnés six complexes linéaires deux à deux en involution et une droite

fixe p, si $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_6$ sont les six droites en involution avec p par rapport aux six complexes, la congruence linéaire qui contient p et trois de ces droites est *en involution* avec celle qui contient p et les trois autres (c'est-à-dire tout complexe linéaire qui passe par l'une de ces congruences est en involution avec l'autre). Chacune des quatre congruences linéaires qu'on obtient en excluant deux de ces droites et en faisant passer par p et par une des quatre droites la congruence en involution avec celle qui passe par p et par les trois dernières contient les trois droites exclues.

Rapportons aussi ce qui regarde la notion d'angle. Soient P un point de S_4, P′ et P″ deux points infiniment rapprochés de P, α le rapport anharmonique de PP′, PP″ et des deux rayons de longueur nulle s_1, s_2 appartenant au même faisceau; l'angle de PP′, PP″ est alors

$$\frac{i}{2}\log\alpha.$$

Si par un point T de S_4 on fait passer une sphère tangente en P au plan PP′P″, les quatre plans projetant du point T les quatre rayons PP′, PP″, s_1, s_2 déterminent sur la sphère quatre cercles dont le rapport anharmonique est α et ne dépend par conséquent pas du point T. La définition d'angle est ainsi invariante dans le groupe conforme et l'on peut la transporter à l'espace réglé de la manière suivante :

Soient p une droite et p', p'' deux droites infiniment rapprochées de celle-ci. Il y a une double infinité de congruences linéaires passant par p, p', p'' qui ont en commun une quadrique réglée décomposée en deux faisceaux σ_1, σ_2 contenant la droite p. Étant t une droite quelconque de l'espace, il y a une de ces congruences linéaires qui passe par t, et dans cette congruence il y a un faisceau de séries quadratiques passant par p et par t; à ce faisceau appartiennent la quadrique $(pp't)$ et la quadrique $(pp''t)$, une quadrique dégénérée contenant σ_1 et une contenant σ_2. Le rapport anharmonique α de ces quatre quadriques, qui ne dépend pas de la droite t, sert à définir l'angle des deux *directions* conduisant de p à p' et à p'', qui est donné par

$$\frac{i}{2}\log\alpha.$$

Autres applications regardant les lignes de courbure et les variétés anallagmatiques.

S. Rindi.

RENDICONTI DEL CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO.

Tomo XVI, 1902 (¹) (Iᵉ Partie : *Memorie e Communicazioni*).

Amaldi (*U.*). — Types de potentiels qui, divisés par une fonction fixe, peuvent être ramenés à dépendre de deux seules variables (1-45).

(¹) Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XL_2, p. 135-145.

On sait que M. Levi Civita a déterminé tous les potentiels de l'espace qu'on peut ramener à des fonctions de deux variables; d'autre part, Lord Kelvin a montré que toute transformation par rayons vecteurs réciproques T, change un potentiel en un nouveau potentiel, multiplié par une fonction qui ne dépend que de T. Le rapprochement de ces deux faits a conduit M. Amaldi à se poser le problème suivant, qu'il résout dans le présent Mémoire : *déterminer tous les types de potentiels tels que chacun d'eux, divisé par une fonction fixe,* ϖ (la même pour tous les potentiels d'un même type), *puisse être ramené à une fonction de deux variables.* Son travail comprend cinq Parties.

Dans la première, l'auteur démontre que le groupe continu, formé de toutes les transformations qui changent en elle-même l'équation de Laplace (à un multiplicateur près), est identique au groupe conforme de l'espace, G. Sa démonstration repose sur les méthodes de Lie et procède à la manière de M. Levi Civita.

La seconde Partie associe la recherche de la fonction ϖ à la détermination de tous les groupes g conformes, à un paramètre, contenus dans G; l'ensemble de tous les potentiels jouissant de la propriété en question pour un même groupe g satisfait à une même équation aux dérivées partielles, à deux variables indépendantes; et, si deux groupes g sont équivalents entre eux, une transformation ponctuelle, suivie d'une multiplication change l'un dans l'autre les deux types de potentiel.

Tout se ramène donc à la formation des groupes g; à cet effet, l'auteur abandonne les méthodes de Lie, comme exigeant des calculs trop laborieux; il procède par voie géométrique, en s'appuyant sur une remarque de Klein, d'après laquelle tout groupe conforme de l'espace peut s'obtenir par projection stéréographique d'un groupe de transformations projectives σ qui font revenir sur elle-même une sphère Σ appartenant à un S_4. Or, s'il existe un point double P de σ extérieur à Σ ou situé sur Σ, g sera équivalent à un groupe de similitudes; mais, si P est intérieur à Σ, l'étude de la section de Σ par le plan polaire de P conduit l'auteur à découvrir un groupe G_1 à un paramètre θ, qui conserve Σ; puis, au moyen de coordonnées pentasphériques, il revient à l'espace ordinaire et donne les équations explicites du groupe g correspondant.

Dans un quatrième Chapitre, M. Amaldi montre que ce groupe conserve le faisceau des tores

$$x^2+y^2+z^2+1-2\sqrt{x^2+y^2}\cos\sigma_1=0;$$

les trajectoires du groupe seront les loxodromies des tores définies par l'équation

$$\sigma_2=\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}-\theta\operatorname{arc\,tang}\frac{x^2+y^2+z^2-1}{2z};$$

posons encore

$$\operatorname{tang}\sigma_3=\frac{x^2+y^2+z^2-1}{2z};$$

σ_1 et σ_2 seront les deux nouvelles variables dont dépendront les types de potentiels, divisés au préalable par la fonction fixe $\sqrt{1-\sin\sigma_1\sin\sigma_3}$; ces potentiels pourront s'appeler *potentiels loxodromiques.*

Enfin, dans la dernière Partie, M. Amaldi forme l'équation aux dérivées partielles, aux variables σ_1 et σ_2, qui admet pour solutions les potentiels loxodromiques; ceux d'entre eux qui correspondent à la valeur $\theta=0$ seront les

potentiels loxodromiques *symétriques;* ils seront fournis par l'équation

$$4\xi(1-\xi)\frac{d^2v}{d\xi^2} + 4(1-2\xi)\frac{dv}{d\xi} - \frac{3}{4}\xi v = 0,$$

où l'on a posé

$$\xi = \sin^2\sigma_1.$$

Loria (*G.*). — Au sujet des radiales des courbes planes (46-56).

Soit I le centre de courbure en un point M d'une courbe C; R. Tucker a appelé *radiale* de la courbe C le lieu géométrique Γ des extrémités des vecteurs $\overrightarrow{O\mu}$ équipollents aux vecteurs IM. M. Gino Loria énonce d'abord divers résultats généraux au sujet de l'ordre des radiales; puis il montre comment l'équation intrinsèque de C fournit immédiatement l'équation polaire de Γ; et il étudie diverses courbes telles que l'épicycloïde, la cycloïde, la chaînette d'égale résistance et la tractrice qui ont pour radiales respectives la rosace, le cercle, la droite et la courbe en $\varkappa$ ($\rho = a \tang\omega$). Puis il énonce le problème inverse, qu'on pourrait appeler celui des *antiradiales*, et le résout pour la droite.

Vitali (*G.*). — Sur les équations différentielles linéaires homogènes à coefficients algébriques (57-69).

La Note de M. Vitali a pour origine un Mémoire ([1]) dans lequel M. Appell a étudié les équations différentielles linéaires, à coefficients algébriques de genre p, à singularités régulières et à racines caractéristiques entières. M. Appell avait distingué ces équations en trois espèces; M. Vitali envisage plus spécialement celles du second ordre et de la première espèce, E; et, à leur sujet, il se pose et résout le problème suivant : *étant donnée une équation* E, *aux intégrales* y_1, y_2, *former toutes les équations* E, *aux intégrales* t_1, t_2, *admettant le même groupe.*

Il distingue deux cas, suivant qu'on a $y_1 t_2 - y_2 t_1 \neq 0$ ou $= 0$. Dans le premier cas, il montre que les équations se ramènent à la forme

$$Y'' - \left(\frac{\varphi_1'}{\varphi_1} - 2\varphi\right)Y' + \varphi_1\varphi_2 Y = 0$$

(φ, φ_1, φ_2 dérivées de deux intégrales de première espèce), moyennant une multiplication de la fonction par une exponentielle convenable.

Le second cas ne peut se présenter que pour $p \geq 2$; à ce sujet, M. Vitali donne une forme générale d'équations E, qu'il développe dans le cas d'une relation hyperelliptique, et qui offre alors cette particularité d'être à coefficients rationnels.

Barbieri (*U.*). — Sur la détermination de toutes les surfaces applicables sur une surface donnée (70-99).

L'auteur s'est proposé d'exposer la méthode de Weingarten d'une façon qui

([1]) *Acta math.*, t. XIII, 1890, p. 163-174.

mette mieux en évidence l'enchaînement des idées. Il termine en rattachant ses calculs à l'interprétation géométrique que G. Darboux a donnée de la méthode de Weingarten.

Torelli (*G.*). — Sur quelques théorèmes de M. Poincaré sur les idéaux premiers (100-103) (en français).

L'auteur de cette Note (¹) s'est proposé de généraliser un résultat de H. Poincaré sur la distribution des nombres premiers. Il s'appuie sur deux formules asymptotiques, établies par M. Torelli lui-même, et qui permettent d'évaluer, l'une la totalité des nombres premiers ordinaires, de la forme $My + N$ et ne surpassant pas x, l'autre, la somme des logarithmes népériens de ces nombres. Il en déduit l'évaluation asymptotique des mêmes expressions pour les idéaux premiers relatifs à l'équation $x^p + 1 = 0$ (p réel).

Autonne (*L.*). — Sur l'hermitien (104-128).

Soit

$$H(x, y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} h_{jk} y_j x_k = [h_{jk}]$$

une forme bilinéaire telle que $h_{jk} = \overline{h}_{kj}$ (g et $\overline{g}$ étant des imaginaires conjuguées); si, de plus, la forme est définie et positive, M. L. Autonne l'appelle un *hermitien*, réservant la dénomination d'*hermitienne* à la substitution linéaire associée à la forme. Soit encore

$$A = [a_{jk}], \qquad A' = [a_{kj}], \qquad \overline{A} = [\overline{a}_{jk}];$$

si l'on a

$$\overline{U}' U = E = \sum_{j=1}^{n} y_j x_j,$$

on dira que U est un *hermitien unitaire*.

Ceci posé, dans un premier Chapitre, l'auteur étudie les hermitiennes unitaires et démontre à leur sujet le théorème suivant : *dans l'espace à n coordonnées homogènes $x_1, \ldots, x_n$ les hermitiennes unitaires forment un groupe transitif*.

Le second Chapitre est consacré aux hermitiens généraux; M. L. Autonne étudie en détail leur réduction à une forme canonique; puis il démontre divers théorèmes, dont je citerai les suivants : P *étant une matrice quelconque*, $\overline{P}'P$ *est un hermitien, et, réciproquement, tout hermitien peut s'écrire sous la forme précédente* (*où* P *a été convenablement choisie*). — *Les hermitiennes ne peuvent former un groupe que si elles sont permutables.* Le Mémoire se termine par l'étude des hermitiens réels.

(¹) Lue le 3 avril 1901 à une séance du *Circolo* à laquelle assistait H. Poincaré.

Gerbaldi (*F.*). — Sur le groupe simple de 360 collinéations planes (¹) (129-154).

L'auteur poursuit ses recherches sur le groupe G_{360}; et, afin de simplifier l'étude des résolvantes du 6ᵉ et du 10ᵉ degré, il fait intervenir le sous-groupe octaèdrique G_{24} engendré par les collinéations T et O. Ce sous-groupe admet comme invariants :

$$t = \varepsilon f_1 \ldots \varepsilon f_4 \; [illegible], \qquad p = f f_4 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{A},$$

qui sont respectivement d'ordres 2, 4 et 6; il admet aussi deux autres invariants du sixième ordre, q et r et un invariant du huitième ordre, F; l'auteur les forme tous explicitement. Or, supposons qu'on se donne les invariants A, H, J de G_{1080} et qu'on cherche à calculer p et t; on aboutira à une résolvante de degré 15 (puisqu'il existe 15 sous-groupes G_{24} dans G_{360}), et dont l'auteur indique seulement le terme tout connu, qui représente l'ensemble des coniques octaèdriques T. Si l'on procède de même pour r, on aboutira à une nouvelle résolvante dont le terme tout connu U est un invariant de degré 90 pour G_{360} : égalé à 0, il représente les 45 droites u (²), comptées deux fois chacune.

Après avoir calculé effectivement ces invariants, M. Gerbaldi aborde le réseau linéaire formé par les courbes d'ordre 30, invariantes par G_{360} et passant par les points K [illegible]; son étude l'amène à cette conclusion : par un groupe général de 360 points homologues passent cinq courbes invariantes d'ordre 30, pourvues de 36 points doubles K, et de 180 autres points doubles sur les droites u.

Puis, revenant à l'invariant U, il utilise les calculs qui l'ont fourni pour donner à la résolvante du 6ᵉ degré la forme

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + a'x + b')^2 - kx = 0$$

dont les coefficients sont des fonctions de deux paramètres distincts, l'un d'eux pouvant être pris égal à k.

Cela fait, l'auteur retourne à la résolvante du 10ᵉ degré et montre que la racine carrée de son discriminant se décompose en un produit de deux facteurs qui sont entiers en A, H et J et qui, égalés à 0, représentent, l'un les 45 droites u, comptées chacune 4 fois, et l'autre les 45 coniques $C_{\alpha\beta}$ que G_{360} permute mutuellement.

De Donder (*Th.*) — Étude sur les invariants intégraux (second Mémoire) (155-179).

Poursuivant ses recherches sur les invariants intégraux, l'auteur commence par donner la nomenclature des travaux de Lie et de ses élèves sur cette branche de l'Analyse; ainsi qu'il le fait observer, leur point de vue n'est pas absolument équivalent à celui de H. Poincaré.

(¹) Voir *Bull.*, t. XXXIX_2, p. 134; t. XL_2, p. 64 et p. 115.

(²) Les 45 droites u sont les axes respectifs des 45 homologies $O_{(\alpha\beta,\gamma\delta)}$ (*Bull.*, t. XXXIX_2, p. 135); il existe 36 points par chacun desquels passent cinq droites u; ces points sont au nombre de quatre sur chaque droite u; ce sont précisément les points K.

Puis, l'auteur étudie tous les changements de variables qui conservent soit les équations des caractéristiques, soit les équations canoniques, soit les équations des transformations infinitésimales de contact. Il introduit ensuite un invariant relatif qui généralise celui de Helmholtz-Kelvin, et l'applique au calcul des variations.

Enfin, M. de Donder donne une démonstration nouvelle d'un théorème de H. Poincaré sur la théorie des exposants caractéristiques et des intégrales périodiques; et il termine par une application aux équations linéaires homogènes et à leurs adjointes.

Giudice (*F.*). — Existence, calcul et différences de racines d'équations numériques (180-184).

L'auteur applique l'idée fondamentale de la méthode d'approximation de Newton à la démonstration du théorème de d'Alembert; puis il forme l'équation aux valeurs d'un polynome $f(x) = a_0x^n + \ldots + a_n$ pour les zéros de sa dérivée. Il donne ensuite une borne inférieure des modules des différences des racines de la proposée, et termine, enfin, par deux théorèmes relatifs à la séparation des racines de $f(x)$. L'un d'eux peut s'énoncer ainsi :

Si C est une circonférence de centre a et de rayon $\left|\dfrac{f(a)}{a_0}\right|^{\frac{1}{n}}$, *ou bien toutes les racines de* $f(x) = 0$ *sont situées sur C, ou bien il n'en existe aucune sur C.*

Burali-Forti (*C.*). — Sur les radiales (185-191).

L'auteur montre comment l'étude des radiales, abordée par M. Gino Loria dans un article précédent du même Tome, peut être simplifiée à l'aide de la notation symbolique de Grassmann.

Paci (*P.*). — Généralisation d'un théorème de Gauss (192-195).

Soient S une surface fermée, A un point fixe, M un point variable sur S, (rn) l'angle de $\overrightarrow{MA}$ avec la normale intérieure à S en M, ds l'élément d'aire de S, r la distance MA et φ une fonction des cosinus directeurs de $\overrightarrow{MA}$. M. Paci remarque que l'intégrale

$$\int_S \frac{\varphi \cos(rn)}{r^2}\, ds$$

est indépendante du point A lorsqu'il est intérieur à S, et qu'elle est nulle quand A est extérieur à S. Il applique ce résultat à la détermination de la densité d'une couche ellipsoïdale équipotentielle.

Martinetti (*V.*). — Quelques considérations sur la configuration de Kummer (196-203).

L'auteur introduit la configuration de Kummer en partant de trois complexes linéaires en involution mutuelle; il établit divers résultats au sujet des tétraèdres de la configuration.

Guccia (*G.-B.*). — Sur les courbes algébriques planes (204-208).

M. Guccia énonce une suite de théorèmes sur les systèmes linéaires de courbes planes ayant un point-base fixe d'ordre k.

Veneroni (*E.*). — Sur quelques systèmes de cubiques gauches (209-229).

Soit, dans un espace à trois dimensions, une congruence de courbes C; M. Veneroni appelle *ordre* de la congruence le nombre des courbes C qui passent par un point arbitraire, et *classe* de la congruence, le nombre des courbes C qui admettent une même corde. Il démontre alors divers théorèmes concernant :

1° Les congruences d'ordre 0 et de classe m (quelconque);
2° Les congruences de classe 0 et d'ordre m (quelconque);
3° Les congruences d'ordre 1 et de classe 1;

puis il les applique aux cubiques dans l'hypothèse où m est égal à 1. Dans le premier cas, les cubiques appartiennent à une même quadrique; dans le second, elles passent par quatre points et admettent une droite fixe comme corde. Enfin, le troisième, le plus compliqué d'ailleurs, exige une discussion fondée sur la nature des singularités de la surface lieu des cubiques qui coupent deux fois une droite fixe. Elle conduit à trois types, dont le plus remarquable est formé des cubiques passant par cinq points fixes. L'étude de cette congruence amène l'auteur à formuler la définition suivante de la surface de Weddle : toute surface de Weddle est le lieu des intersections des cubiques passant par cinq points fixes avec celles de leurs cordes qui passent par un sixième point fixe.

Marcolongo (*R.*). — Sur la fonction de Green de degré n pour la sphère (230-235).

Soient P et M deux points intérieurs à une sphère Σ, le premier fixe, et ν la normale intérieure à la sphère; on appelle *fonction de Green de degré n pour* Σ la fonction G_n qui satisfait à l'équation $\Delta_{2n} G_n = 0$ et qui, sur Σ, vérifie les conditions

$$G_n = r^{2n}, \qquad \frac{d^i G_n}{d r^i} = \frac{d^i r^{2n}}{d \nu^i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Désignons par a le rayon de Σ, par ρ la distance de P au centre o, et par r' la distance de M à l'image de P par rapport à Σ; posons

$$x = \frac{\rho r'}{a r};$$

nous aurons

$$G_n = r^{2n} \varphi(x)$$

le produit $x\varphi(x)$ étant un polynome de degré $2n-2$ et satisfaisant à diverses conditions dont l'examen conduit l'auteur à la formule

$$G_n - r^{2n-2} = (-1)^n \frac{(r_1 - r)^n}{r_1} f(r, r_1),$$

$f(r, r_1)$ étant un polynome à coefficients positifs. De ce fait, la fonction G_n satisfait à diverses inégalités que l'auteur développe spécialement dans le cas de $n=2$.

Ferretti (*G.*). — Sur la réduction à l'ordre minimum des systèmes linéaires de courbes planes irréductibles de genre p; en particulier, pour les valeurs 0, 1, 2 du genre (236-279).

Divers géomètres se sont préoccupés de former des systèmes linéaires de courbes planes, d'ordre minimum et birationnellement distincts; mais leurs travaux, reposant sur un Mémoire classique de Nœther, étaient, par là même, sujets à une objection signalée par M. Segre et relative à l'existence d'une transformation quadratique dans certains cas où le triangle fondamental devient infiniment petit. Cette objection se présentait d'ailleurs lorsqu'il s'agissait d'établir que toute transformation de Cremona peut être décomposée en un produit de transformations quadratiques, et ce fut M. Castelnuovo qui la résolut définitivement dans ce cas, par une méthode fondée sur la considération des courbes adjointes d'indices successifs. Dès lors, il était tout indiqué d'appliquer la même méthode au problème énoncé plus haut; et tel est l'objet du Mémoire de M. Ferretti.

Dans un premier Chapitre, il établit que les systèmes adjoints successifs d'un système linéaire de courbes irréductibles C, de genre p, coupent les courbes C en un nombre de points qui décroît au moins de $D-2p+2$ unités (D, degré du système donné) chaque fois que l'indice du système adjoint croît d'une unité.

L'auteur montre ensuite que si le système linéaire, de dimension effective $\geqq 0$, est réduit à l'ordre minimum n, et si, de plus, il est privé d'adjoints d'indices $< j$, ou bien on a $n < 3j-1$, ou bien le système est pourvu d'un point base de multiplicité $\geqq n-2j+1$. La démonstration procède par l'absurde et fait intervenir des transformations de Jonquières, qui, d'ailleurs, jouent un rôle important dans tout le Mémoire. Cette proposition une fois établie, différents autres théorèmes analogues viennent la préciser.

Puis, dans trois Chapitres successifs, l'auteur applique ses résultats aux cas où l'on a $p=0$, 1 ou 2. Dans le premier cas, il trouve que le système peut toujours être ramené, moyennant une transformation de Cremona, à l'un des types canoniques énumérés par G.-B. Guccia; pour $p=1$, la même conclusion s'applique aux systèmes au moins ∞^2; et dans le cas d'un faisceau de courbes elliptiques, il ne peut exister d'autres types de réduction que ceux d'Halphen. Enfin, il ne peut exister aucun type canonique, pour $p=2$, ne coïncidant pas avec ceux de Jung, et dans le cas des réseaux surabondants de courbes de genre 2, l'auteur établit, de même, que l'énumération de MM. Martinetti et de Franchis est complète.

Gigli (*D.*). — Sur les sommes de n entiers distincts pris parmi les nombres 1, 2, ..., m (280-285).

L'auteur établit par récurrence le théorème suivant :

Soient m et n ($\le m$) deux entiers quelconques et N un autre entier tel que

$$\frac{n(n+1)}{2} \le \mathrm{N} \le mn - \frac{n(n-1)}{2};$$

le nombre des combinaisons de n entiers, inférieurs à $m+1$, et tels que leur somme soit égale à N a pour expression le coefficient de $x^{\mathrm{N}-\frac{n(n+1)}{2}}$ dans le développement du quotient

$$\frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})\dots(1-x^{m-n+1})}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^n)}.$$

L'auteur applique ensuite son résultat au cas de $m=10$ (et n quelconque), ainsi qu'aux cas de $m=90$ et $n=3$ et 6.

Guccia (*G.-B.*). — Sur les surfaces algébriques (286-293).

L'auteur énonce une suite de théorèmes qui, dans le cas des surfaces algébriques jouent exactement le même rôle que les théorèmes d'une Note précédente dans le cas des courbes algébriques.

Calapso (*P.*). — Sur la déformation des quadriques (297-326).

Pour étudier le problème de la déformation des quadriques, l'auteur résout d'abord la question préliminaire que voici : *étant donnée une quadrique* Q, *rechercher sur* Q *un système qui reste conjugué après la déformation.* En calculant les symboles de Christoffel, et en se servant des équations de Gauss et de Codazzi, M. Calapso parvient ainsi au système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \alpha}\dfrac{\partial v}{\partial \beta} + \dfrac{\partial u}{\partial \beta}\dfrac{\partial v}{\partial \alpha} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial \alpha}\dfrac{\partial v}{\partial \alpha} - \dfrac{\partial u}{\partial \beta}\dfrac{\partial v}{\partial \beta} = k_1(u^2+v^2) - 2k_2uv + k_3u^2v^2 + k_4, \end{cases}$$

où les k_i sont des constantes qui dépendent des longueurs des demi-axes de Q (supposée pourvue d'un centre).

Lorsqu'il s'agit d'une surface de révolution, le système (1) peut être remplacé par l'équation

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \beta^2} + 4k_1 \operatorname{sh}\Theta \operatorname{ch}\Theta = 0.$$

La fonction Θ détermine d'ailleurs une surface à courbure constante qui, moyennant une transformation de Bäcklund, se ramène à une autre surface à courbure constante, rencontrée dans le même problème par M. Guichard.

Enfin, le travail se termine par une étude de la déformation des paraboloïdes, développée à un point de vue analogue

Piani (*E.*). — Sur les groupes finis de collinéations quaternaires pourvus de cubiques gauches invariantes (327-345).

A la suite des travaux de MM. Kohn, Maschke et Bagnera, l'auteur s'est proposé d'énumérer tous les groupes finis de collinéations quaternaires qui transforment en elle-même une cubique gauche. Or, soit G un tel groupe; il détermine sur la cubique un groupe fini de projectivités binaires qui, dès lors, coïncide nécessairement avec l'un des cinq groupes classiques. L'auteur les étudie successivement, après avoir adopté comme représentation de la courbe les équations suivantes :

$$x_1 = \lambda^3, \quad x_2 = \lambda^2, \quad x_3 = \lambda, \quad x_4 = 1;$$

il n'insiste pas d'ailleurs sur le cas de l'icosaèdre qui fait l'objet d'un autre Mémoire. Ce cas écarté, le plus intéressant est celui du groupe octaédrique; il conduit à une configuration remarquable, formée de deux cubiques appartenant à un même complexe linéaire et possédant chacune un hexagone inscrit invariant H. De plus, parmi les surfaces invariantes par les transformations de G, on peut citer une quadrique, un faisceau de surfaces du quatrième ordre (comprenant deux tétraèdres T) et un réseau de surfaces du quatrième ordre, comprenant notamment : deux surfaces de Weddle, deux surfaces de Kummer (quadruples tétraédroïdes), deux surfaces desmiques et, enfin, quatre surfaces nouvelles, pourvues chacune de six points biplanaires et de quatre points coniques : les premiers sont les sommets des deux hexagones H, les autres sont les sommets des deux tétraèdres T.

Kolossoff (*G.*). — Sur le cas de M. Goriatchoff de la rotation d'un corps pesant autour d'un point fixe (346-348) (Extrait d'une lettre à M. R. Marcolongo; en français.)

L'auteur montre rapidement comment la théorie de Jacobi permet de retrouver les intégrales de Tchapliguine dans le problème du gyroscope pesant, lorsqu'on a A = B = 4C, et lorsque la constante des aires est prise égale à zéro.

Marcolongo (*R.*). — Observations au sujet de la Note de M. Kolossoff « Sur le cas de M. Goriatchoff de la rotation d'un corps pesant autour d'un point fixe » (349-357).

Exposé synthétique et complet du cas d'intégration Goriatchoff-Tchapliguine-Kolossoff.

Carrone (*C.*). — Sur un complexe de droites du quatrième degré (35[illegible]-37[illegible]).

Dans un espace à trois dimensions, considérons quatre faisceaux de droites entre lesquels on a établi des correspondances homographiques; quatre rayons correspondants déterminent une congruence linéaire dont le lieu sera un complexe du quatrième ordre; les droites doubles de ce complexe forment une congruence (3,3) de Roccella. L'auteur étudie en détail ce complexe et cette congruence, dont il donne d'autres modes de génération, en introduisant, notamment, deux cônes du second degré et à deux dimensions appartenant à un espace à cinq dimensions. Certains cas particuliers du complexe jouissent de propriétés remarquables; dans l'un d'eux, le complexe se décompose en un complexe linéaire et en un complexe du troisième ordre étudié par Weiler.

Pennacchietti (G.). — Sur une intégrale d'une classe de problèmes de l'équilibre d'un fil flexible et inextensible (376-381).

Écrivons les équations de l'équilibre d'un fil sous la forme normale

(1) $$\frac{dx}{ds} = \frac{u}{T}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{v}{T}, \quad \frac{dz}{ds} = \frac{w}{T},$$

(2) $$\frac{du}{ds} = -X, \quad \frac{dv}{ds} = -Y, \quad \frac{dw}{ds} = -Z,$$

et proposons-nous de choisir des fonctions

$$A_i, \quad B_i, \quad C_i \qquad (i = 0, 1, 2, 3)$$

de x, y, z, s telles que les équations (2) ajoutées, après multiplications respectives par

$$A_0\,ds + A_1\,dx + A_2\,dy + A_3\,dz, \quad B_0\,ds + B_1\,dx + B_2\,dy + B_3\,dz,$$
$$C_0\,ds + C_1\,dx + C_2\,dy + C_3\,dz,$$

admettent une combinaison intégrable [en vertu de (1)]. En procédant ainsi, M. Pennacchietti obtient un cas d'intégrabilité des équations de l'équilibre d'un fil, qui comprend comme cas particulier celui où les forces appartiennent à un complexe linéaire. Le résultat précédent avait d'ailleurs été obtenu, grâce à une autre méthode, par M. Lagoutinsky.

René Garnier.

ACTA MATHEMATICA.

Tome XXVIII, 1904 [1].

(Niels-Henrik Abel in Memoriam.)

Pringsheim (A.). — Ueber den Diwèrgenz-Charakter gewisser Potenzreihen an der Convergenzgrenze.

---

[1] Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XXXVI_2, p. 185, t. XXXVII_2, p. 5. Les analyses des Tomes XXVI et XXVII seront publiées ultérieurement.

Par analogie avec cette proposition, démontrée par Abel pour x réel, étendue par M. Stolz au cas de x complexe, que si la série convergente $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} C_\nu$ est telle que $\lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|C_\nu|} = 1$, on a

$$\lim_{x=1} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} C_\nu x^\nu = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} C_\nu$$

lorsque x se rapproche du cercle de convergence suivant une courbe non tangente à ce cercle, M. Pringsheim s'est proposé de déterminer la manière dont diverge la série

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} d_\nu x^\nu,$$

quand x tend vers 1, la série $\sum d_\nu$ étant supposée divergente, et telle que $\lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|C_\nu|} = 1$. L'auteur établit d'abord le lemme suivant :

Si l'on pose $x' = 1 - \delta e^{\varphi i}$, et que $0 < \delta \leqq \cos\varphi$, où $|\varphi| < \varphi_0 \leqq \frac{\pi}{2}$, on a

$$\frac{|1-x'|}{1-|x'|} < \frac{2}{\cos\varphi} \leqq \gamma \qquad \left(\gamma = \frac{2}{\cos\varphi_0}\right).$$

L'application de ce lemme conduit à considérer les séries pour lesquelles

$$\lim_{x'=1} \left| \frac{\sum d_\nu x'^\nu}{\sum d_\nu |x'|^\nu} \right| \geqq \alpha > 0,$$

qui seront dites *uniformément divergentes*, et serviront, dans la suite du Mémoire, de terme de comparaison pour évaluer la manière dont divergent d'autres séries. L'auteur déduit ensuite, du lemme fondamental, le théorème suivant :

Si la série $\sum d_\nu x^\nu$ est convergente pour $|x| < 1$, uniformément divergente pour $x = x' = 1$, et si

$$\lim_{n=\infty} \left[\frac{\sum_0^n a_\nu}{\sum_0^n d_\nu} \right] = g$$

(g étant un nombre complexe quelconque), la série $\sum a_\nu x^\nu$ converge aussi

pour $|x| < 1$ *et diverge uniformément pour* $x = x' = 1$, *et l'on a*

$$\lim_{x=1}\left[\frac{\sum_{0}^{\infty} a_\nu x^\nu}{\sum_{0}^{\infty} d_\nu x^\nu}\right] = g.$$

En appliquant ensuite ce théorème, la série du binome étant prise pour terme de comparaison, l'auteur arrive aux relations

$$\lim_{x'=1}(1-x)^p \sum_{0}^{\infty} a_\nu x^\nu = \Gamma(p+1).g, \qquad \text{quand} \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{0}^{n} a_\nu}{n^p} = g;$$

$$\lim_{x=1}(1-x)^p \sum_{0}^{\infty} a_\nu x^\nu = \Gamma(p).g, \qquad \text{quand} \qquad \lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^{p-1}} = g.$$

dont la seconde, bien connue, a été obtenue par M. Appell dans le cas où x' et les a sont des quantités réelles et positives. La considération d'une suite de nombres $\lambda_\nu (\nu = 0, 1, 2, 2, \ldots)$, satisfaisant aux relations

$$\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu = \varepsilon_\nu \frac{\lambda_\nu}{\nu},$$

$$\lambda_{\nu+1}^{-1} - \lambda_\nu^{-1} = \varepsilon_\nu \frac{\lambda_\nu^{-1}}{\nu},$$

où

$$\varepsilon_\nu \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\nu=\infty} \varepsilon_\nu = 0,$$

tels que, de plus, $\lim_{\nu=\infty} \lambda_\nu = \infty$, et que, au moins à partir d'un certain rang, on ait

$$\frac{\lambda_\nu}{\nu} \leq \frac{\lambda_{\nu-1}}{\nu - 1},$$

permet à M. Pringsheim de construire des séries divergentes simples qui deviennent infinies comme $\lim_{\nu=\infty} \lambda_\nu$, et seront utilisées comme termes de comparaison. En désignant alors par r une variable positive continue, et $\lambda(r)$ une fonction positive monotone telle que $\lambda(\nu) = \lambda_\nu$, l'auteur déduit du théorème sur la comparaison, énoncé en premier lieu, le théorème fondamental suivant :

Si l'on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum a_n}{n^p \lambda_n^\alpha} = g,$$

avec les conditions

$$p > 0, \qquad \alpha = -1 \text{ ou } 0$$

ou bien

$$p = 0, \qquad \alpha > -1,$$

la série $\sum a_\nu x^\nu$ *est convergente pour* $|x| < 1$, *et diverge uniformément pour* $x = x' = 1$, *de manière que*

$$\lim_{x'=1} (1 - x')^p \lambda\left(\frac{1}{|1 - x'|}\right)^{-\alpha} \sum_0^\infty a_\nu x'^\nu = \Gamma(p+1) \cdot g.$$

La dernière Partie du Mémoire de M. Pringsheim est consacrée aux séries qui deviennent infinies comme certaines expressions logarithmiques. En posant

$$\log(\log x) = \log_2 x, \qquad \log[\log(\log x)] = \log_3 x, \qquad \ldots,$$

et

$$L_m(r) = r \log r \log_2 r \ldots \log_m r,$$

l'auteur arrive en dernier lieu au théorème suivant :

Si

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n L_{m-1}(n) [\log_m(n)]^q (\log_{m+1})^{q_1} \ldots \log_{m+k} n)^{q_k}}{n^p} = g,$$

m désignant un entier $\geqq 1$, *p une quantité positive et q une quantité différente de* 1, *on a*

$$\lim_{x'=1} (1 - x')^{p-1} L_{m-1}\left(\frac{1}{1 - x'}\right) \log_m \left(\frac{1}{1 - x'}\right)^q \ldots \log_{m+k}\left(\frac{1}{1 - x'}\right)^{q_k} \sum_0^\infty a_\nu x'^\nu = g\Gamma_p,$$

tandis que, pour $p = 0$ (*auquel cas on doit avoir* $q > 1$), *on a*

$$\lim_{x'=1} \log_m \left(\frac{1}{1 - x'}\right)^{q-1} \log_{m+1}\left(\frac{1}{1 - x'}\right)^{q_1} \ldots \log_{m+k}\left(\frac{1}{1 - x'}\right)^{q_k} \sum_0^\infty a_\nu x'^\nu = \frac{g}{1 - q}.$$

Gegenbauer (*L.*). — Note über die symmetrischen Funktionen der zwei algebraischen Gleichungen gemeinsamen Wurzeln.

L'auteur donne d'abord, du plus grand commun diviseur des deux fonctions entières $f(x)$ et $f'(x)$, l'expression

$$\frac{\sum\limits_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}} (x - x_{\lambda_1})(x - x_{\lambda_2}) \ldots (x - x_{\lambda_{n-r}}) \left| S_{i+k}^{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}} \right|}{|S_{i+k}|}$$

$$(i, k = 0, 1, 2, \ldots, n - r),$$

qu'il a obtenue dans un Mémoire précédent, et où $S_\tau^{\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r}}$ désigne la somme des $\tau^{\text{ièmes}}$ puissances des racines de $f(x) = 0$ autres que $x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_{n-r}}$. M. Gegenbauer montre ensuite que toute fonction rationnelle et symétrique des r racines $x_1 \ldots x_r$ communes à deux équations $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$, est

susceptible d'une représentation analogue :

$$\frac{F(x_1 \ldots x_r)}{G(x_1 \ldots x_r)} = \frac{\sum\limits_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r} F(x_1^{\lambda_1}, x_2^{\lambda_2}, \ldots, x_r^{\lambda_r}) \left| S_{i+k}^{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r} \right|}{\sum\limits_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r} G(x_1^{\lambda_1}, x_2^{\lambda_2}, \ldots, x_r^{\lambda_r}) \left| S_{i+k}^{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r} \right|}$$

$$(i, k = 0, 1, 2, \ldots, r-1),$$

et en déduit le théorème suivant :

Si la première des fonctions symétriques des n racines $x_1 \ldots x_r$ de $f(x) = 0$, ***du type***

$$|S_{i+k}| \quad (i, k = 0, 1, 2, \ldots, n-1), \quad |S_{i+k}| \quad (i, k = 0, 1, 2, \ldots, n-2), \quad \ldots$$

qui ne s'annule pas est la $(n-r+1)^{\text{ième}}$, *et si la première de celles du type*

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}} \left| S_{i_1+k_1}^{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}} \right| \left| S_{i+k}^{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}} \right|$$

$$(i, k = 0, 1, 2, \ldots, r-1;\ i_1, k_1 = 0, 1, 2, \ldots, n-\rho-1),$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}} \left| S_{i_2+k_2}^{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}} \right| \left| S_{i+k}^{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}} \right|$$

$$(i, k = 0, 1, 2, \ldots, r-1;\ i_2, k_2 = 0, 1, 2, \ldots, n-\rho-2),$$

. . . .

qui ne s'annule pas est la $(s+1)^{\text{ième}}$, $f(x)$ *a* r *de ses racines distinctes, dont* $(r-s)$ *sont simples.*

Mellin (*Hj.*). — Die Dirichlet'schen Reihen, die zahlentheoretischen Funktionen, und die unundlichen Produkte von endlichem Geschlecht.

L'auteur expose d'abord quelques propriétés des intégrales réciproques :

$$\text{(I)} \qquad \Phi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z)\, x^{-z}\, dz \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = u + iv = |x| e^{i\theta}, \\ -\varphi < \theta < \varphi, \\ \alpha < a < \beta, \end{array} \right.$$

$$\text{(II)} \qquad F(z) = \int_0^{\infty} \Phi(x)\, x^{z-1}\, dx$$

où F(z) est une fonction régulière pour tous les points à distance finie situés dans une bande telle que $\alpha < u < \beta$, et qui, pour les points à l'infini dans cette bande, prend la forme

$$F(u + iv) = e^{-\varphi|v|} f(u, v),$$

φ étant une constante positive non nulle et $f(u, v)$ une fonction dont le produit par $e^{-\varepsilon|v|}$ reste fini quand $|v|$ croît indéfiniment, ε désignant une quantité positive aussi petite que l'on voudra. Après avoir donné des limites λ de convergence

absolue, et l de convergence, d'une série de Dirichlet :

$$S(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{f(n)}{a_n^z}$$

une expression nouvelle, autre que celle déjà donnée par M. Cahen. M. Mellin obtient, en appliquant les formules (I) et (II),

$$(\mathrm{I}') \qquad \Psi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z)S(z)x^{-z}\,dz,$$

$$(\mathrm{II}') \qquad F(z)S(z) = \int_0^{\infty} \Psi(x)x^{z-1}\,dx,$$

en posant

$$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} f(n)\Phi(a_n z).$$

Ces formules sont valables dans la portion commune au demi-plan où est valable la série $S(z)$ et à la bande où la fonction $F(z)$ est régulière. L'auteur se propose ensuite d'obtenir, d'une fonction sommatoire du type

$$F(n) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n),$$

une expression sous la forme de la limite d'une intégrale de la forme (I′), la fonction $f(n)$ étant celle qui figure dans la série de Dirichlet $S(z)$ considérée. A cet effet, et en utilisant une formule, donnée par lui dans un Mémoire antérieur, pour l'expression du logarithme d'un produit infini de genre fini p, M. Mellin arrive à la formule

$$\lim_{\varepsilon=0} \log \frac{\Pi[\rho e^{\pi i - \varepsilon}]}{\Pi[\rho e^{-\pi i + \varepsilon}]} = 2\pi i[f(1) + f(2) + \ldots + f(n)],$$

où

$$\Pi(x) = \prod_{n=1}^{n=\infty} \left\{ \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{-\frac{x}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a_n}\right)^2 + \ldots + \frac{(-1)^p}{p}\left(\frac{x}{a_n}\right)^p} \right\}^{f(n)}$$

et ρ étant compris entre a_n et a_{n+1}. Après avoir déduit du résultat précédent que l'intégrale

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{\sin(\pi-\varepsilon)z}{\sin \pi z} S(z)\frac{\rho^z}{z}\,dz \qquad (b > a)$$

se rapproche d'une limite finie quand ε tend vers zéro, et après avoir donné un exemple particulier auquel s'appliquent les considérations précédentes, l'auteur arrive, en utilisant les propriétés des fonctions eulériennes, à la formule

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} f(\nu) = r(x) + \lim_{m=\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \Gamma\left(1 + \frac{z}{m}\right)S(z)x^z\frac{dz}{z}$$

où l'on doit avoir

$$b > l, \quad a_n < x < a_{n+1}.$$

et où $r(x)$ désigne la somme des résidus de ceux des pôles de la fonction $\frac{x^z}{z}S(z)$ qui sont situés dans la bande définie par la dernière des inégalités précédentes.

Enfin, M. Mellin obtient pour $\sum_{\nu=1}^{\nu=n} f(\nu)$ plusieurs expressions équivalentes, parmi lesquelles la suivante :

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} f(\nu) = \lim_{m=\infty} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!} S(m\nu)x^{m\nu} \qquad (a_n < x < a_{n+1}),$$

déjà obtenue par M. von Koch dans son travail sur la distribution des nombres premiers; et, après l'exposé d'une méthode fournissant une expression asymptotique pour une somme du type

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} S(s, w\nu), \qquad \text{ou} \qquad S(s, u) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{f(n)}{(u+n)^s},$$

le Mémoire de M. Mellin se termine par quelques propositions sur la manière dont se comporte, tant à distance finie qu'à l'infini, le prolongement analytique d'une fonction définie par une série de Dirichlet, propositions obtenues en transformant le produit $\Gamma(s)\,S(s)$ au moyen d'une intégrale multiple.

Scheffers (G.). — Das Abel'sche Theorem und das Lie'sche Theorem über Translationsflächen. (Le théorème d'Abel et le théorème de Lie sur les surfaces de translation.)

Ce Mémoire est consacré à l'étude des surfaces qui peuvent être considérées de quatre manières comme des surfaces de translation, ou, si l'on veut, qui possèdent quatre familles simplement infinies de courbes parallèles. L'auteur montre d'abord que toute surface de translation peut être considérée comme telle de deux manières différentes, que les deux familles de courbes ainsi définies sur la surface sont conjuguées, et enfin que toutes les tangentes que l'on peut mener aux courbes d'une même famille rencontrent le plan de l'infini suivant une seule courbe.

Inversement, si l'on se donne les équations

$$(1) \qquad \varphi_1(\xi_1, \eta_1) = 0, \qquad \varphi_2(\xi_2, \eta_2) = 0$$

de deux courbes situées dans le plan de l'infini, M. Scheffers montre que les surfaces de translation telles que les tangentes aux courbes de la première famille rencontrent le plan de l'infini suivant la courbe $\varphi_1 = 0$, et les tangentes aux courbes de la deuxième famille rencontrent le plan de l'infini suivant la courbe $\varphi_2 = 0$, doivent être des intégrales de l'équation aux dérivées partielles du deuxième ordre obtenue en éliminant les ξ et les η entre les équations (1) et les équations

$$(2) \qquad \begin{cases} p\xi_1 + q\eta_1 = 1, \qquad p\xi_2 + q\eta_2 = 1; \\ \xi_1\xi_2 r + (\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1)s + \eta_1\eta_2 t = 0. \end{cases}$$

Pour résoudre le problème suivant : *Déterminer les surfaces de translation qui possèdent quatre familles de courbes parallèles, de telle sorte que par chaque point de la surface il passe une courbe de chaque famille*, l'auteur est alors conduit à déterminer quatre équations

$$(3)\qquad \varphi_1(\xi_1, \eta_1) = 0, \quad \varphi_2(\xi_2, \eta_2) = 0, \quad \varphi_3(\xi_3, \eta_3) = 0, \quad \varphi_4(\xi_4, \eta_4) = 0,$$

de telle sorte que les deux équations aux dérivées partielles qu'on en peut déduire, par élimination de ξ_1, η_1, ξ_2, η_2 entre les équations (1) et (2), et de ξ_3, η_3, ξ_4, η_4 entre des équations analogues où les indices 1 et 2 sont remplacés par 3 et 4, admettent au moins une surface intégrale commune. La formation de la condition d'intégrabilité, effectuée en remarquant que, si on laisse de côté les surfaces développables, on pourra prendre p et q pour variables indépendantes au lieu de x et y, donne, en désignant par des accents les dérivées par rapport à p :

$$\tau_1'' + \tau_2'' - \tau_3'' + \tau_4'' = 0 \qquad \text{où} \qquad \tau_i = \frac{\eta_i}{\xi_i}.$$

La discussion de cette condition d'intégrabilité conduit M. Scheffers au résultat suivant : *Les quatre paires de variables ξ_i, η_i vérifient une même équation biquadratique en ξ, η, à coefficients constants*. Les quatre courbes définies par les équations (3) doivent donc appartenir à une seule et même courbe du quatrième degré.

Réciproquement, l'auteur montre, en appliquant le théorème d'Abel aux points de rencontre de la droite variable

$$p\xi + q\eta = 1$$

avec une courbe du quatrième degré située dans le plan de l'infini, que, si l'on se donne d'une manière quelconque l'équation de cette courbe

$$(4)\qquad F(\xi, \eta) = 0,$$

il existe une surface de translation possédant quatre familles de courbes parallèles dont les tangentes rencontrent le plan de l'infini suivant la courbe (4). M. Scheffers prouve ensuite directement que la surface la plus générale, jouissant de la propriété précédente, s'obtient en prenant les surfaces semblables des surfaces précédemment obtenues à l'aide du théorème d'Abel, et où $F(\xi, \eta) = 0$ désigne l'équation générale du quatrième degré en ξ, η. Enfin, l'auteur discute les différents cas qui peuvent se présenter suivant que $F(\xi, \eta)$ est, ou non, irréductible, et donne quelques indications sur d'autres démonstrations du même théorème.

Brodén (*T.*). — Sur l'emploi d'un théorème d'Abel dans la théorie de l'intégrale de Dirichlet.

Après avoir rappelé que l'équation

$$(1)\qquad \lim_{\omega=\infty} \int_0^a f(x)\frac{\sin\omega\pi x}{x}\,dx = 0 \qquad [0 < a < 1,\ f(+0) = 0],$$

à laquelle on peut réduire l'équation de Dirichlet, est vérifiée si la fonction $f(x)$

annule la valeur limite

$$(2)\qquad \lim_{\omega=\infty}\int_0^1\left[\sum_{i=k}^{i=m-1}\left\{\frac{f\left(\frac{x}{\omega}+\frac{2i}{\omega}\right)}{x+2i}-\frac{f\left(\frac{x}{\omega}+\frac{2i+1}{\omega}\right)}{x+2i+1}\right\}\right]dx$$

où les entiers k et m satisfont aux inégalités

$$\alpha(\omega)<\frac{2k}{\omega}\leqq\alpha(\omega)+\frac{2}{\omega},\qquad \frac{2m}{\omega}<\varepsilon\leqq\frac{2m+2}{\omega}\qquad(0<\varepsilon<1),$$

$\alpha(\omega)$ étant une fonction positive de ω par laquelle l'une ou l'autre des deux conditions

$$\lim_{\omega=\infty}\omega.\alpha=\infty\qquad\text{ou}\qquad\lim_{\omega=\infty}[g(\alpha)\log(\omega.\alpha)]=0$$

est remplie, et $g(\alpha)$ désignant la limite supérieure du module de $f(x)$ dans l'intervalle $0\ldots\alpha$, l'auteur démontre, en appliquant à la somme qui figure dans l'intégrale (2) le théorème III du Mémoire d'Abel sur la série du binome, que l'équation (1) est bien vérifiée, si, G désignant une quantité positive finie et x étant compris entre 0 et 1, on a

$$-G<\sum_{i=2k}^{i=p}(-1)^i f\left(\frac{x}{\omega}+\frac{i}{\omega}\right)<G$$

quand $2k\leqq p\leqq 2m-1$.

Boutroux (*P.*). — Sur quelques propriétés des fonctions entières.

Cet important Mémoire est divisé en quatre Parties. Dans la première Partie, M. Boutroux se propose d'assigner, au module d'une fonction entière de genre fini, des limites plus précises que celles qui avaient été données précédemment par MM. Hadamard et Borel, afin de pouvoir donner ensuite du module maximum $M(r)$ de la fonction, pour $|z|=r$, une représentation asymptotique aussi exacte que possible. En désignant par r_i le module du $i^{\text{ème}}$ zéro de la fonction entière $G(z)$ à étudier (les zéros étant rangés par ordre de modules croissants), et par $\omega(x)$ une fonction des x holomorphe et positive telle que $\omega(i)=r_i$, l'auteur évalue d'abord des intégrales définies du type

$$\int_m^n[\omega(x)]^{-\lambda}dx\qquad\text{et}\qquad\int_n^\infty[\omega(x)]^{-\lambda}dx$$

qui figureront par la suite dans l'expression d'une limite supérieure du module de $G(z)$. Moyennant certaines hypothèses, l'auteur montre qu'il est permis d'assigner une limite supérieure à chacune des intégrales

$$\int_m^n[\psi(x)]^{-\lambda}dx,\qquad\int_n^\infty[\psi(x)]^{-\lambda}dx,$$

ψ désignant une fonction convenablement choisie, réelle, positive et inférieure à $\omega(x)$ pour x réel et positif, et prouve que si l'ordre ρ de $G(z)$ n'est pas entier, on pourra faire coïncider ψ et ω pour des valeurs de x indéfiniment

croissantes, tandis que les choses se présentent d'une manière différente si ρ est entier.

M. Boutroux obtient ensuite pour la limite supérieure du module de $G(z)$ (cette fonction étant supposée réduite à un produit de facteurs primaires) l'expression

$$\log |G(z)| < gr^p + 2r\int_m^n \frac{dx}{\psi(x)} + \ldots + \frac{r^p}{p}\int_m^n \frac{dx}{\psi^p} + br^{p+1}\int_n^\infty \frac{dx}{\psi^{p+1}},$$

où g et b sont des constantes positives finies, et dont le second membre pourra s'évaluer au moyen des intégrales précédemment étudiées. En supposant alors que l'ordre ρ de $G(z)$ n'est pas entier, l'auteur en déduit

$$|G(z)| < e^{hn},$$

h étant un nombre fini, et n étant défini par l'égalité

$$r = \eta\psi(n) \qquad (n \text{ entier, } \eta \text{ constante positive finie}).$$

Après avoir donné de même de $|G(z)|$ la limite inférieure

$$|G(z)| > e^{hn'},$$

où n' est le nombre des zéros de $G(z)$ dont le module est inférieur à $\eta_1 r$ $\left(\eta_1 < \frac{1}{2}\right)$, et envisagé les cas exceptionnels où l'on peut prendre $n = n'$, l'auteur démontre une proposition relative à des fonctions à croissance régulière, puis prouve le théorème suivant, qui complète une proposition due à M. Borel :

Désignant par n la fonction inverse d'une certaine fonction $\psi(r)$, l'égalité

$$M(r) = e^{hn} \qquad (h \text{ positif, fini})$$

supposée satisfaite à partir d'une certaine valeur de r, entraîne, à partir d'une certaine valeur de i,

$$r_i = h'\psi(i) \qquad (h' \text{ positif, fini}).$$

M. Boutroux déduit des théorèmes précédents plusieurs autres théorèmes relatifs à la croissance des fonctions entières d'ordre toujours non entier, et passe à l'étude des fonctions d'ordre entier : pour ces dernières, il montre que l'inégalité

$$|G(z)| > e^{hn'}$$

subsiste, tandis que l'expression de la limite supérieure devient

$$|G(z)| < e^{hr^p + h_1 n \log n} \qquad (h, h_1 \text{ positifs, finis}).$$

Puis, après avoir précisé une comparaison du module minimum de $G(z)$, à une exponentielle, faite pour la première fois par M. Hadamard, l'auteur met en lumière un cas exceptionnel *où le module maximum d'une fonction entière perd tous les caractères qui permettent de distinguer une fonction de genre p d'une fonction de genre inférieur;* un exemple vient confirmer cette proposition, établie d'abord dans le cas général, *qu'il existe un cas exceptionnel où*

la somme de deux fonctions de genre p paraît se comporter comme une fonction de genre $p+1$. L'ensemble des résultats obtenus par M. Boutroux jette donc un jour nouveau sur la manière différente dont les choses se passent suivant que ρ est entier ou non entier, et sur l'importance de l'étude de la croissance des fonctions entières.

Dans la deuxième Partie du Mémoire, et en vue de pouvoir appliquer les résultats précédents à l'étude des fonctions définies par des équations différentielles, l'auteur étudie la dérivée logarithmique $g(z)$ d'une fonction entière $G(z)$. En suivant une voie analogue à la précédente, mais en restreignant l'étude du mode de croissance de $g(z)$ dans des portions du plan ne renfermant pas de pôles de cette fonction, l'auteur arrive à des résultats semblables à ceux obtenus pour $G(z)$; l'étude des dérivées de $g(z)$ conduit de même à des limites des modules $|g'(z)|$ et $|g''(z)|$ analogues aux précédentes, et permet à M. Boutroux de formuler cette conclusion : que le mode de croissance est bien encore un élément fondamental pour la fonction $g(z)$, indépendant de la disposition particulière des pôles de cette fonction.

Une application importante, consacrée à l'étude, par les méthodes précédentes, de certaines fonctions entières vérifiant une équation différentielle du troisième ordre, et de certaines fonctions méromorphes, solutions d'équations différentielles à points critiques fixes déterminées par M. Painlevé, qui se rattachent à ces fonctions entières, termine cette intéressante Partie du Mémoire.

La troisième Partie du Mémoire de M. Boutroux est consacrée à l'étude des fonctions entières de genre infini, et conduit l'auteur, par l'emploi du développement en produit infini, à des résultats généraux sur le mode de croissance de ces fonctions.

Ces résultats, suivis de l'étude de la dérivée logarithmique d'une fonction de genre infini, permettent ensuite d'étudier le troisième type d'équations à points critiques fixes signalées par M. Painlevé. Enfin, la quatrième Partie, consacrée à l'étude du mode de croissance des intégrales des équations différentielles algébriques du premier ordre, conduit M. Boutroux à partager ces équations en deux classes, suivant qu'elles peuvent, ou non, admettre des intégrales entières (de genre fini), et à définir une classe d'équations

$$y'(a_0 + a_1 y + \ldots + a_{p-1} y^{p-1}) = b_0 + \ldots + b_p y^p$$

dont les intégrales ont un mode de croissance très analogue à celui des fonctions entières. En terminant, M. Boutroux conclut que le mode de croissance obéit à des lois fort simples, qu'il existe entre l'ordre de grandeur d'une fonction entière et la densité de ses zéros une relation étroite, et que, selon l'auteur lui-même, « la relation ainsi observée dans le cas d'une fonction entière n'est peut-être que la manifestation d'une propriété appartenant à des fonctions plus générales. »

Pincherle (S.). — Sur une série d'Abel.

Ce Mémoire est consacré à l'étude de la série

$$\varphi(x+\alpha) = \varphi(x) + \alpha\frac{d\varphi(x+\beta)}{dx} + \frac{\alpha(\alpha-2\beta)}{1.2}\frac{d^2\varphi(x+2\beta)}{dx^2} + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-n\beta)^{n-1}}{n!}\frac{d^n\varphi(x+n\beta)}{dx^n} + \ldots$$

obtenue par Abel en appliquant la transformation de Laplace à un développement de $e^{\alpha x}$ donné par Legendre. L'auteur considère la dérivée qui figure dans le $(n+1)^{\text{ième}}$ terme de la série comme étant le résultat de l'application d'une certaine opération A^n à la fonction $\varphi(x)$. La série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n z_n$$

étant supposée avoir un rayon de convergence ρ non nul, M. Pincherle montre qu'il existe deux classes distinctes $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ de branches de fonctions analytiques monogènes, n'ayant pas d'éléments communs, et qui, substituées dans la série

$$(1) \qquad A(\varphi) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n A^n(\varphi),$$

rendent cette série uniformément convergente, quand elles vérifient en outre certaines conditions supplémentaires. L'ensemble $\mathfrak{M}$ désigne l'ensemble des fonctions entières dont les séries associées ont un rayon de convergence r non nul; les fonctions de cet ensemble qui rendent convergente la série (1) sont alors celles pour lesquelles on a $r < \bar{r}$, $\bar{r}$ désignant la racine positive de l'équation

$$e^{\frac{b}{r}} = r\rho, \qquad \text{où} \qquad b = |\beta|.$$

L'ensemble $\mathfrak{N}$ désignant l'ensemble des fonctions analytiques régulières à l'infini, l'auteur montre de même que la série (1) est convergente quel que soit un élément φ de cet ensemble $\mathfrak{N}$, à la condition que l'on ait $\rho > \frac{1}{b}$ et que x vérifie une certaine inégalité. En développant alors l'opération θ^α, qui consiste à remplacer, dans une fonction donnée, x par $(x+\alpha)$, M. Pincherle obtient la série d'Abel. En considérant la série formée par les coefficients, l'auteur trouve que $\rho = \frac{1}{b}$, et en déduit que

1° *$\bar{r}$ étant la racine positive de l'équation*

$$\frac{b}{r} e^{\frac{b}{r}+1} = 1,$$

toutes les fonctions de $\mathfrak{M}$ pour lesquelles $r < \bar{r}$ appartiennent au champ de validité de la série d'Abel;

2° *L'ensemble $\mathfrak{N}$ appartient tout entier au champ de convergence de la série d'Abel.*

Teixeira (*F. Gomès*). — Note sur deux travaux d'Abel relatifs à l'intégration des différences finies.

En appliquant successivement la formule d'Abel

$$\sum \varphi(x) = \int \varphi(x)\,dx - \frac{1}{2}\varphi(x) + 2\int_0^{\infty} \frac{\varphi\left(x+\frac{t}{2\pi}i\right) - \varphi\left(x-\frac{t}{2\pi}i\right)}{2i}\,\frac{dt}{e^{t}-1} + \mathrm{C}$$

aux cas où

$$\varphi(x) = e^{ux}x^{m} \quad \text{et} \quad \varphi(x) = e^{ux}x^{m-1},$$

l'auteur parvient à la formule

$$\frac{d^m(e^u-1)^{-1}}{du^m} = -\frac{e^u}{(e^u-1)^2}\left[\Delta 0^m - \frac{e^u}{e^u-1}\Delta^2 0^m + \ldots \pm \left(\frac{e^u}{e^u-1}\right)^{m-1}\Delta^m 0^m\right],$$

d'où il déduit la formule d'Herschel qui donne la dérivée d'ordre m d'une fonction quelconque de e^x. Dans une deuxième Partie, M. Gomès Teixeira montre que la série

$$\mathrm{L}_1(x) = \sum_{m=1}^{m=\infty}\left[\frac{1}{m^{\alpha}} - \frac{1}{(m+x)^{\alpha}}\right]$$

est uniformément convergente dans toute aire A ne renfermant aucun des points d'affixe $-1, -2, -3, \ldots$, étudie la fonction $\mathrm{L}_1(x)$ représentée par la somme de cette série, et montre que $\mathrm{L}_1(x-1)$ n'est autre que l'intégrale finie

$$\sum \frac{1}{x^{\alpha}},$$

qu'Abel avait étudiée en la représentant au moyen d'une intégrale définie ordinaire.

Markoff (A.). — Recherches sur les valeurs entières des intégrales et sur l'interpolation.

L'auteur considère une série de fonctions satisfaisant aux inégalités

$$\lambda_1(z) > 0, \quad \begin{vmatrix} \lambda_1(z) & \lambda_1'(z) \\ \lambda_2(z) & \lambda_2'(z) \end{vmatrix} > 0, \quad \ldots, \quad \begin{vmatrix} \lambda_1(z) & \lambda_1'(z) & \ldots & \lambda_1^{(n)}(z) \\ \lambda_2(z) & \lambda_2'(z) & \ldots & \lambda_2^{(n)}(z) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{n+1}(z) & \lambda_{n+1}'(z) & \ldots & \lambda_{n+1}^{(n)}(z) \end{vmatrix} > 0$$

pour toutes les valeurs de z comprises entre a et b, et, après avoir établi plusieurs théorèmes préliminaires, aborde le problème suivant :

Étant donnés les nombres a, b, c, C et les valeurs des intégrales

$$\int_a^b f(z)\lambda_1(z)\,dz = \alpha_1, \qquad \int_a^b f(z)\lambda_2(z)\,dz = \alpha_2, \qquad \ldots,$$
$$\int_a^b f(z)\lambda_n(z)\,dz = \alpha_n.$$

trouver les valeurs extrêmes de l'intégrale

$$(1) \qquad \int_a^b f(z)\lambda_{n+1}(z)\,dz,$$

sous la condition

$$c \leqq f(z) \leqq C.$$

Après avoir résolu le problème pour les cas de $n = 1$ et de $n = 2$, M. Markoff démontre que l'on peut passer du cas de $n = 2m$ au cas de $n = 2m+2$, puis du cas de $n = 2k$ à celui de $n = 2k+1$, et obtient respectivement, pour le maximum et le minimum de l'intégrale (1), les valeurs

$$\int_a^b f_{\max}(z)\lambda_{n+1}(z)\,dz \quad \text{et} \quad \int_a^b f_{\min}(z)\lambda_{n+1}(z)\,dz,$$

où $f_{\max}(z)$ et $f_{\min}(z)$ sont deux fonctions de z n'ayant dans l'intervalle (a, b) que les deux valeurs c et C et changeant n fois de valeur dans cet intervalle; l'auteur détermine au moyen des données les intervalles partiels dans lesquels chacune de ces deux fonctions doit avoir l'une des valeurs c ou C. L'auteur envisage ensuite le cas où les limites de l'intégrale à rendre maximum ou minimum sont a et un nombre v compris entre a et b, tandis que les intégrales figurant dans les données conservent les limites a et b, et où, de plus, la fonction $\lambda_{n+1}(z)$ est remplacée par une fonction $\Omega(z)$ satisfaisant aux inégalités suivantes :

$$\Omega(z) \geqq 0, \qquad \begin{vmatrix} \lambda_1(z), & \lambda_1'(z) \\ \Omega(z), & \Omega'(z) \end{vmatrix} \geqq 0, \qquad \ldots, \qquad \begin{vmatrix} \lambda_1(z) & \lambda_1'(z) & \ldots & \lambda_1^{(n)}(z) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_n(z) & \lambda_n'(z) & \ldots & \lambda_n^{(n)}(z) \\ \Omega(z) & \Omega'(z) & \ldots & \Omega^{(n)}(z) \end{vmatrix} \geqq 0,$$

pour l'intervalle entier (a, b). Dans ce cas, la solution s'obtient en prenant pour $f(z)$ des fonctions qui changent $(n+1)$ fois de valeur dans l'intervalle (a, b), en passant de l'une à l'autre des valeurs c, C; la solution suppose que v ne coïncide pas avec un des points de discontinuité des fonctions $f_{\min}(z)$ ou $f_{\max}(z)$ de la solution précédente. Enfin, en posant

$$c = -1, \qquad C = +1, \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0,$$

M. Markoff applique la solution du premier problème à la détermination des coefficients $p_1, p_2, \ldots, p_n$ de l'expression

$$\Phi(z) = p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_2(z) + \ldots + p_n\lambda_n(z),$$

de manière que l'intégrale

$$\int_a^b |\Omega(z) - \Phi(z)|\,dz$$

soit minimum. Le Mémoire se termine par une généralisation d'une méthode d'interpolation donnée par M. Tchébychef, et par l'extension des résultats

précédents à certains cas où les inégalités précédemment établies avec les λ et leurs dérivées n'ont plus lieu.

Stolz (O.). — Die Bedeutung der Abelschen Abhandlung über die binomische Reihe für die Funktionentheorie. (La signification du théorème d'Abel sur la série du binome, au point de vue de la théorie des fonctions.)

L'auteur rappelle d'abord la solution générale

$$(1) \qquad f(x) = A^{\xi}[\cos\xi(\alpha + 2k\pi) + i\sin\xi(\alpha + 2k\pi)] \times B^{\eta}[\cos\eta(\beta + 2l\pi) + i\sin\eta(\beta + 2l\pi)]$$

(où $x = \xi + i\eta$), qu'Abel a donnée du problème suivant (déjà traité par Cauchy pour x réel) :

Trouver toutes les fonctions continues de la variable complexe x, satisfaisant à l'équation

$$f(x).f(y) = f(x+y)$$

et se réduisant, pour $x = 1$, à un nombre complexe non nul

$$a = A(\cos\alpha + i\sin\alpha) \qquad (A > 0, \; -\pi < \alpha \leqq +\pi).$$

Cette solution contient la constante arbitraire positive B et la constante arbitraire réelle β. L'auteur détermine ces constantes en ajoutant aux conditions du problème celle que la fonction $f(x)$ soit *analytique*, et parvient sans difficulté à la solution

$$f(x) = e^{x\mathrm{L}a} \qquad [\mathrm{L}a = l.a + (\alpha + 2k\pi)i],$$

où k est un entier quelconque. M. Stolz indique ensuite qu'Abel avait déjà déterminé les constantes A, $(\alpha + 2k\pi)$, B, β, de la formule (1), de manière que $f(x)$ soit, pour $|x| < 1$, égal à la somme de la série du binome

$$1 + \frac{x}{1}u + \frac{x(x-1)}{1.2}u^2 + \ldots.$$

Vessiot (E.). — Sur l'intégration des systèmes différentiels qui admettent des groupes continus de transformations.

Dans ce travail, M. Vessiot reprend le problème de l'intégration d'un système différentiel quelconque, sachant seulement qu'il admet un groupe continu, connu, de transformations et parvient, par une méthode différente de celle indiquée par S. Lie sur des exemples particuliers, à décomposer l'intégration du système donné en celle d'un système résolvant (R) qui n'admet plus de groupe de transformations, et en l'intégration d'un système (S) dont toutes les solutions se déduisent les unes des autres par les transformations du groupe donné (G); de plus, ce système (S) est de ceux que M. Vessiot appelle *automorphes*, et dont il sera donné la définition par la suite.

Dans la première Partie du Mémoire, l'auteur donne tout d'abord la forme

générale des systèmes *automorphes*, c'est-à-dire des systèmes dont toutes les solutions se déduisent les unes des autres par les transformations, effectuées sur les fonctions inconnues, d'un groupe ponctuel (G). En étudiant le cas où les fonctions inconnues $x_1, \ldots, x_n$ sont en nombre égal à celui des variables $t_1, \ldots, t_m$, et où les solutions de (S) sont des fonctions indépendantes de $t_1, \ldots, t_m$, M. Vessiot définit des systèmes automorphes, dits de *première espèce*, du type

$$U_s(x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_k^{(k_1, \ldots, k_n)}, \ldots) = \Theta_s(t_1, \ldots, t_n) \qquad (s = 1, 2, \ldots, p)$$

et montre que, quand $m > n$, on peut toujours être ramené, par la séparation d'un certain système complet, au cas où $m \leqq n$ et où m des fonctions inconnues sont indépendantes; en examinant ce dernier cas, l'auteur donne enfin le mode de formation des systèmes automorphes les plus généraux.

Dans un paragraphe suivant, M. Vessiot ramène d'abord l'intégration de tout système automorphe à celle de systèmes automorphes dont les groupes soient *simples* et *primitifs* (cette réduction nécessitant au plus l'intégration d'équations différentielles ordinaires), puis montre que tout système automorphe dont le groupe associé est simple et primitif, est équivalent à un autre système automorphe relatif à un groupe *quelconque* isomorphe holoédriquement au précédent. Cette première Partie du Mémoire se termine par des indications sur les systèmes automorphes relatifs aux quatre grandes classes connues de groupes infinis, simples et primitifs; l'intégration de ces systèmes est ramenée à celle d'équations différentielles ordinaires.

Dans un deuxième Chapitre, M. Vessiot reprend d'abord, par une méthode nouvelle, un problème que Lie avait ramené à l'emploi de la méthode de M. Darboux, et décompose l'intégration des systèmes différentiels qui y sont considérés en celle d'un système résolvant et d'un système automorphe.

Enfin, après avoir traité un deuxième exemple, l'auteur expose une méthode générale de réduction de tout système différentiel admettant un groupe continu connu (fini ou infini), de transformations, à un système résolvant et à un système automorphe. Comme M. Vessiot l'a montré dans la première Partie, les systèmes automorphes ainsi obtenus pourront, pour tous les types de groupes continus simples et primitifs connus, s'intégrer au moyen d'équations différentielles ordinaires; mais l'intégration du système résolvant n'est en rien facilitée par la connaissance du groupe donné (G).

Phragmén (*E.*). — Sur une extension d'un théorème classique de la théorie des fonctions.

Dans ce Mémoire, M. Phragmén applique les propriétés de l'intégrale

$$\Phi(x) = \int_0^{\infty} f(a) e^{-ax} \, da,$$

déjà étudiée par Laplace et Abel dans leurs travaux sur les fonctions déterminantes, à la démonstration de six théorèmes relatifs à la manière dont se comporte, à l'infini, une fonction analytique uniforme $F(x)$, lorsqu'on l'assujettit, dans certaines portions du plan, à être moindre en valeur absolue que certaines expressions exponentielles, et, dans le reste du plan, à être moindre

en valeur absolue qu'une constante donnée. L'auteur résume les six théorèmes obtenus dans le théorème suivant :

Soit $\mathrm{F}(x)$ *une fonction entière satisfaisant aux conditions suivantes :*

1° $|\mathrm{F}(x)| < c_\lambda e^{|x|^{k_\lambda}}$ *dans certains angles de grandeur* α_λ $(k_\lambda \alpha_\lambda < \pi)$;

2° $|\mathrm{F}(x)| < \bar{c}_\nu e^{|e^{\bar{k}_\nu x}|}$ *dans certaines bandes limitées par deux droites parallèles et une droite qui les coupe,* $\bar{k}_\nu$ *étant choisi de manière que* $k_\nu x$ *soit réel sur la droite médiane de la bande, et la largeur* α_ν *de la bande satisfaisant à l'inégalité* $|\bar{k}_\nu| \cdot \bar{\alpha}_\nu < \pi$;

3° $|\mathrm{F}(x)| < c$ *pour toutes les autres valeurs de* x.

c_λ, c_ν, c *sont des constantes, et l'on suppose que, parmi les angles et les bandes considérés, il n'y en ait pas deux qui soient contigus. Cela posé, la fonction* $\mathrm{F}(x)$ *sera nécessairement une constante.*

L'auteur donne ensuite de ce théorème la généralisation suivante :

Soit $\mathrm{F}(x)$ *une fonction analytique uniforme et régulière à l'intérieur d'un cercle* K *donné, et possédant les propriétés suivantes :*

1° $|\mathrm{F}(x)| < c_1 e^{|x|^k}$ *pour tous les points* x *situés à l'extérieur de* K *et à l'intérieur d'un certain angle, l'exposant* k *et la grandeur* α *de l'angle étant assujettis à la condition* $k\alpha < \pi$;

2° $|\mathrm{F}(x)| < c_2$ *pour tous les autres points extérieurs à* K.

Cette fonction $\mathrm{F}(x)$ *sera nécessairement régulière à l'infini.*

Enfin, l'auteur montre l'analogie de la méthode suivie dans ses recherches avec celle employée par M. Cousin dans ses travaux sur les fonctions de plusieurs variables, et donne une démonstration personnelle du théorème fondamental de M. Cousin.

Burnside (W.). — On the reduction of a group of homogeneous linear substitutions of finite order. (Sur la réduction d'un groupe de substitutions linéaires et homogènes d'ordre fini.)

Après avoir établi quelques propriétés de la forme invariante hermitienne relative à un groupe de substitutions linéaires et homogènes d'ordre fini, l'auteur démontre le théorème suivant :

Si un groupe de substitutions linéaires et homogènes est réductible, on peut choisir de nouvelles variables de telle sorte qu'elles soient réparties en séries, les variables de chaque série étant transformées l'une dans l'autre par toute substitution du groupe, tandis que, pour chaque série de variables considérée isolément, le groupe est irréductible.

L'auteur montre ensuite que, si le groupe a été ainsi complètement réduit, les variables étant divisées en ν_1 séries de n_1 variables, ν_2 séries de n_2, ..., de telle sorte que les groupes transformant les ν_i séries de n_i variables soient équivalents et distincts de ceux transformant les ν_k séries de n_k variables $(k \neq i)$, le nombre des formes invariantes hermitiennes du groupe qui sont linéairement indépendantes, est

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \ldots + \nu_i^2 + \ldots.$$

M. W. Burnside étudie enfin la nature de cette complète réduction d'un groupe, dans le cas de groupes de permutations, et arrive à cette conclusion que les seuls groupes distincts irréductibles de substitutions linéaires avec lesquels un groupe abstrait G d'ordre fini est simplement ou multiplement isomorphe, sont les m composantes irréductibles distinctes qui proviennent de la complète réduction de la forme régulière de G.

Tome XXIX (1905).

Hessenberg (G.). — Ueber einen Geometrischen Calcül. (Verknüpfungs-Calcül). [Sur un calcul géométrique (calcul de liaison).]

L'auteur de ce Mémoire développe un calcul géométrique s'appliquant aux points d'une droite, fondé sur le théorème de Desargues et sur les deux propositions suivantes : *par deux points passe une et une seule droite; deux droites se coupent en un et un seul point.* Deux figures composées de points et d'un certain nombre de droites joignant ces points étant dites *de même sorte* lorsqu'elles comprennent le même nombre de points et le même nombre de droites de jonction, l'auteur démontre que, *si une suite de points en ligne droite est l'intersection d'une figure* Φ *par une droite, toute projection de cette suite de points sur une autre droite est l'intersection d'une figure de même sorte que* Φ.

En général, on ne peut pas choisir arbitrairement n points $A_1, \ldots, A_n$ sur une droite a, et les considérer comme étant l'intersection d'une figure Φ comprenant n droites de jonction, avec la droite a; il existe une *liaison* entre les points d'intersection d'une figure par une droite. Dans le cas où la connaissance de n points en ligne droite $A_1, \ldots, A_n$, et de trois seulement des côtés de la figure Φ, permet de déterminer de proche en proche tous les éléments de cette figure, M. Hessenberg dit qu'il existe entre $A_1, \ldots, A_n$ une *liaison projective.* Il résulte alors du premier théorème que la liaison projective existe aussi entre les points $B_1, \ldots, B_n$ de toute projection de $A_1, \ldots, A_n$ sur une droite b.

L'auteur étudie la liaison projective qui existe entre les six points d'intersection d'un quadrilatère complet par une droite, et qui détermine un des points d'intersection au moyen des cinq autres. Si l'on regarde quatre des points d'intersection comme fixes, la liaison projective peut être considérée comme une certaine opération qui, effectuée sur le cinquième point, détermine le sixième; l'auteur, après avoir établi la propriété associative de cette opération, montre que la propriété commutative est une conséquence immédiate du théorème de Pascal, dans le cas particulier où la conique exinscrite à l'hexagone se réduit à deux droites concourantes. En désignant alors par A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2 les points d'intersection des côtés opposés du quadrilatère complet, avec la droite a, et en prenant

$$A_1 = \infty, \qquad A_2 = 0, \qquad B_1 = 1,$$

la liaison projective détermine B_2 au moyen de C et de C_2; B_2 est le *produit* de C_1 par C_2. Cette multiplication est associative, mais non commutative. En prenant ensuite $A_1 = A_2 = \infty$ et $B_1 = 0$, la liaison détermine un point B_2 qui est la *somme* de C_1 et de C_2; cette addition est associative et commutative; enfin toutes ces opérations sont distributives.

L'auteur envisage ensuite, dans un pentagone complet, les divers quadrilatères complets obtenus en laissant de côté un sommet quelconque du pentagone et les liaisons projectives correspondantes; deux quelconques de ces liaisons sont des conséquences des trois autres. De l'étude des systèmes de trois liaisons projectives tels que l'une des liaisons soit une conséquence des deux autres, M. Hessenberg déduit un moyen de former, à partir d'une liaison où deux éléments sont séparés, une autre liaison où ceux-ci forment une paire (correspondant à des côtés opposés du quadrilatère complet).

Le Mémoire se termine enfin par l'étude d'un système de coordonnées projectives où les coordonnées d'un point M sont déterminées par les projections sur une droite fixe a, du point M, à partir de deux centres fixes; l'auteur donne, dans ce système, l'équation de la droite, et celle de la liaison projective entre les six points d'intersection des côtés d'un quadrilatère complet avec la droite a.

Hanni (*L.*). — Ueber die Beziehungen zwischen der Darstellung eines eindeutigen Zweiges einer monogenen Funktion durch Herrn Mittag-Leffler, der Methode der Mittelwerte des Herrn Borel und der Transformation des Herrn Lindelöf. (Sur les relations entre la représentation d'une branche uniforme d'une fonction monogène par M. Mittag-Leffler, la méthode des valeurs moyennes de M. Borel et la transformation de M. Lindelöf.)

L'auteur considère la fonction définie par la série

$$(1)\qquad F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu}$$

convergente dans un cercle de rayon fini, et désigne par A l'étoile principale de Mittag-Leffler relative aux éléments

$$(2)\qquad F(a),\quad F'(a),\quad \ldots,\quad F^{(\nu)}(a),\quad \ldots.$$

Dans un premier Chapitre, M. Hanni compare les représentations fournies par la méthode des valeurs moyennes de M. E. Borel, et les développements dans une étoile de Mittag-Leffler. En posant

$$s_{\nu} = \sum_{r=0}^{\nu} \frac{1}{r!} F^{(r)}(a).(x-a)^{r} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

la valeur moyenne de sommes partielles $s_0, s_1, s_2, \ldots$ sera définie par

$$(3)\qquad m_1 = \lim_{t=+\infty} \frac{C_0(t)\,s_0 + C_1(t)\,s_1 + C_2(t)\,s_2 + \ldots}{C_0(t) + C_1(t) + C_2(t) + \ldots},$$

où les C_i sont des fonctions de t satisfaisant aux conditions énoncées par M. Borel, et que l'auteur assujettit de plus à rendre uniformément convergente la valeur moyenne des sommes partielles de la série

$$(4) \qquad 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

dans tout domaine B' contenu dans un certain domaine B simplement connexe et comprenant un domaine fini en dehors du cercle de rayon 1.

Comme la série (1) peut se transformer dans la série géométrique (4) au moyen de l'intégrale de Cauchy, il existera donc aussi un certain domaine E_1 comprenant un domaine fini hors du cercle de convergence de (1), et tel que $m_1 = FE_1(x)$ dans ce domaine. En posant alors

$$m_1(\nu) = \frac{C_0(\nu)\,s_0 + C_1(\nu)\,s_1 + C_2(\nu)\,s_2 + \ldots}{C_0(\nu) + C_1(\nu) + \ldots}$$

et en remplaçant (3) par la série

$$m_1(0) + \sum_{\nu=0}^{\infty} [m_1(\nu+1) - m_1(\nu)],$$

on obtient la deuxième valeur moyenne

$$m_2 = \lim_{t=+\infty} \frac{C_0(t)\,m_1(0) + C_1(t)\,m_1(1) + C_2(t)\,m_1(2) + \ldots}{C_0(t) + C_1(t) + C_2(t) + \ldots}$$

et ainsi de suite. L'auteur remplace alors m_1 par la série double

$$m_1 = \lim_{t=+\infty} \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \sum_{\lambda_2=\lambda_1}^{\infty} \frac{C_{\lambda_2}(t)}{\varphi(t)} \frac{1}{\lambda_1!} F^{(\lambda_1)}(a)\,(x-a)^{\lambda_1},$$

où $\varphi(t)$ désigne le dénominateur de (3), et enfin montre que, en posant

$$C_\lambda^{(1)}(t) = \sum_{\lambda_2=\lambda}^{\infty} \frac{C_{\lambda_2}(t)}{\varphi(t)},$$

m_1 devient la limite d'une expression de la forme de celles considérées par M. Mittag-Leffler :

$$m_1 = \lim_{t=\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} C_\lambda^{(1)}(t) \frac{1}{\lambda!} F^{(\lambda)}(a)\,(x-a)^{\lambda}.$$

De même m_2, m_3, ... peuvent se transformer d'une manière analogue; d'une manière générale, m_n peut se mettre sous la forme

$$m_n = \lim_{t=\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} C_\lambda^{(n)}(t) \frac{1}{\lambda!} F^{(\lambda)}(a)\,(x-a)^{\lambda}.$$

En intervertissant alors les signes $\sum$ et $\lim\limits_{t=\infty}$, et en posant

$$\lim_{t=\infty} C_\lambda^{(n)}(t) = C_\lambda^{(n)},$$

l'auteur obtient l'expression

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\lambda=0}^{\nu} C_{\lambda}^{n} \frac{1}{\lambda!} F^{\lambda}(a)(x-a)^{\lambda},$$

qui est contenue comme cas particulier dans celles obtenues par M. Mittag-Leffler.

De même, M. Hanni examine ensuite comment certaines représentations en séries n-uples obtenues à l'aide de la méthode des valeurs moyennes, peuvent se ramener aux représentations données par M. Mittag-Leffler pour $FA^{\left(\frac{1}{n}\right)}(x)$.

Dans un deuxième Chapitre sont exposées les relations qui unissent la transformation de Lindelöf et les développements dans une étoile de Mittag-Leffler. L'auteur y parvient de deux manières différentes, soit en appliquant à l'étoile A une transformation qui l'applique conformément sur un cercle, soit en partant de cette propriété qu'une série double peut être convergente, ainsi que la série des sommes des termes contenus dans une même colonne, sans que les lignes soient convergentes. En définitive, la transformation de Lindelöf conduit à envisager des séries contenues comme cas particuliers dans les séries n-uples de M. Mittag-Leffler.

Le Mémoire se termine par l'examen des relations qui existent entre la transformation de Lindelöf et la méthode des valeurs moyennes, et de la manière dont on peut, dans un cas particulier, obtenir par l'application successive d'une identité due à Markoff, les résultats auxquels conduisent ces deux méthodes.

Gullstrand (*A.*) — Zur Kenntnis der Kreispunkte. (Contribution à l'étude des ombilics.)

Ce Mémoire est consacré à l'étude des ombilics. L'auteur envisage d'abord l'élément de surface dans le voisinage d'un point ordinaire, discute la disposition des lignes de courbure en ce point, puis passe au cas où le point est un ombilic d'ordre n [contact d'ordre $(n+1)$ avec la sphère]. Les formules ainsi obtenues comprennent les formules tout d'abord établies pour le point ordinaire, qui s'obtiennent en faisant dans les formules relatives à un ombilic, $n = 0$. M. Gullstrand étudie ensuite successivement en détail le cas où l'ordre de l'ombilic est égal à 1, et déduit les divers cas qui peuvent se présenter, relativement à la disposition des lignes de courbure, de la considération d'une équation différentielle qui doit être vérifiée par toute ligne de courbure passant par un ombilic.

Cette étude est suivie de celle des ombilics d'ordre 2 qui possèdent deux plans de symétrie; enfin, l'auteur, après avoir donné des indications sur le cas général d'un ombilic d'ordre n, montre qu'il existe deux sortes de lignes lieux d'ombilics. Celles de la première sorte se composent d'une infinité d'ombilics du premier ordre par chacun desquels passent deux lignes de courbure orthogonales et faisant avec la ligne lieu d'ombilics un angle fini; celles de la seconde sorte sont situées sur des surfaces de révolution, et sont à courbure sphérique constante.

Mittag-Leffler (*G.*). — Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction homogène (cinquième Note).

M. Mittag-Leffler rappelle d'abord que les travaux de M. Borel et de M. Phragmèn ont fixé une étoile dans l'intérieur de laquelle converge l'intégrale de Laplace-Abel et en dehors de laquelle cette intégrale ne peut être convergente, et se propose de généraliser l'intégrale de Laplace-Abel de la manière suivante. En désignant par K_0, K_1, K_2, ... des constantes telles que la limite supérieure des valeurs limites des nombres $\left|\sqrt[\nu]{K_\nu}\right|$ soit finie, et en posant

$$F_\alpha(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{K_\nu}{(\alpha\nu)!} x^\nu \qquad (\alpha > 0),$$

l'auteur considère l'intégrale

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-\omega} F_\alpha(\omega^\alpha x)\, d\omega$$

et démontre, dans ce Mémoire, le théorème suivant :

L'intégrale $f(x)$ possède par rapport à x une étoile de convergence $B^{(\alpha)}$ *inscrite dans* A *et tendant indéfiniment vers* A *quand* α *tend vers* o. *L'égalité* $FB^{(\alpha)}(x) = f(x)$ *a lieu partout à l'intérieur de* $B^{(\alpha)}$.

A désigne l'étoile principale définie par les constantes K_0, K_1, K_2, ... et circonscrite au cercle de convergence de la série $K_0 + K_1 x + K_2 x^2 + \ldots$.

Pour démontrer le théorème en question, M. Mittag-Leffler démontre d'abord le théorème suivant :

L'intégrale $f(x_0)$ étant convergente, $f(x)$ est uniformément convergente pour le domaine θx_0, tel que $o < \theta_0 \leqq \theta \leqq 1$.

La démonstration de ce théorème est analogue à celle donnée par M. Phragmén pour la même question relative à l'intégrale de Laplace-Abel.

L'auteur définit ensuite une étoile $B^{(\alpha)}$ formée de tous les points obtenus en faisant parcourir à x_0 tous les points à l'intérieur de A pour lesquels le domaine

$$R\left[\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right] > 1 \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\alpha\dfrac{\pi}{2} < \arg\left(\dfrac{x_0}{x}\right) < \alpha\dfrac{\pi}{2} & (\text{si } o < \alpha < 2) \\ -\pi < \arg\left(\dfrac{x_0}{x}\right) < \pi & (\text{si } \alpha \geqq 2) \end{array} \right.$$

est situé à l'intérieur de A, $R(u)$ désignant la partie réelle de u.

Puis M. Mittag-Leffler démontre que $f(x)$ n'est jamais convergente en dehors de $B^{(\alpha)}$. La suite du Mémoire est alors consacrée à démontrer que $f(x)$ converge partout à l'intérieur de $B^{(\alpha)}$; M. Mittag-Leffler étudie d'abord la fonction

$$E_\alpha(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{(\alpha\nu)!}$$

au moyen de l'intégrale

$$\int_R \frac{1}{e^{2\pi i z} - 1}\, \frac{x^z}{(\alpha z)!}\, dz$$

prise le long d'un rectangle symétrique par rapport à l'axe des x et coupant

cet axe aux points [illegible] et n [illegible]. De cette étude résulte que, si α est compris entre 0 et 2, $|E_\alpha(x)|$ s'approche indéfiniment de 0 avec $\frac{1}{|x|}$ quand x tend vers l'infini dans un angle intérieur à l'angle

$$2\pi - \alpha\frac{\pi}{2} > \varphi > \alpha\frac{\pi}{2}.$$

Si $|x|$ augmente indéfiniment le long d'un des deux vecteurs $\varphi = \pm\alpha\frac{\pi}{2}$, $|E_\alpha(x)|$ tend indéfiniment vers $\frac{1}{\alpha}$; enfin, si $|x|$ augmente indéfiniment dans un angle intérieur à l'angle

$$\alpha\frac{\pi}{2} > \varphi > -\alpha\frac{\pi}{2},$$

$|E_\alpha(x)|$ augmente au delà de toute limite.

En utilisant une expression de $\frac{1}{z!}$ donnée par Hankel, l'auteur étudie ensuite le cas où $\alpha \geqq 2$, et en déduit que $|E_\alpha(x)|$ tend vers l'infini quand $|x|$ tend vers l'infini, x décrivant un vecteur quelconque issu de l'origine, *sauf si x tend vers l'infini le long de l'axe réel et négatif*.

Après l'examen de diverses autres propriétés de $E_\alpha(x)$, parmi lesquelles celle d'être, pour α rationnel, solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels, M. Mittag-Leffler reprend l'étude de l'intégrale $f(x)$, tout d'abord en faisant $F_\alpha(x) = E_\alpha(x)$. Cette étude se partage en deux cas, suivant que l'on a $\alpha \geqq 2$ ou $0 < \alpha < 2$, et permet enfin de démontrer, dans le cas général où $F_\alpha(x)$ n'est plus nécessairement égal à $E_\alpha(x)$, la convergence de $f(x)$ dans l'étoile $B^{(\alpha)}$.

L'auteur donne ensuite de l'intégrale $f(x)$ une expression ayant même forme que celle donnée pour l'intégrale de Laplace-Abel par M. Borel, et transforme cette expression de plusieurs manières différentes; la dernière Partie du Mémoire contient d'autres représentations sous forme de limites de sommes, ou sous forme d'intégrales définies, dans le cas où $B^{(\alpha)}$ n'est plus assujettie à être une étoile de convergence pour $f(x)$.

Lindelöf (*E.*). — Remarques sur un théorème fondamental de la théorie des ensembles. (Extraits de deux lettres adressées à M. Mittag-Leffler.)

La première lettre est relative à la démonstration de la première partie du théorème de Cantor-Bendixson, à savoir que tout ensemble fermé non dénombrable se compose d'un ensemble parfait et d'un ensemble dénombrable. M. Lindelöf considère d'abord un ensemble non dénombrable quelconque (P) situé dans une région limitée T d'un espace à n dimensions, et démontre successivement :

1° *Que la région* T *comprend au moins un point de condensation de l'ensemble* (P);

2° *Que l'ensemble* C *des points de condensation de* (P) *est un ensemble fermé;*

3° *Que l'ensemble* (R) *des points de* (P) *non contenus dans* C *est dénombrable ;*

4° *Que l'ensemble* C *est parfait.*

On en déduit, dans le cas où (P) est fermé, la démonstration de la première partie du théorème de Cantor-Bendixson.

La deuxième lettre est consacrée à une nouvelle démonstration du théorème de Cantor-Bendixson, au moyen du théorème suivant :

Étant donné un ensemble quelconque de points (P), *situé dans un espace à un nombre fini de dimensions, si à chaque point* P *on fait correspondre une sphère ayant ce point pour centre, on pourra choisir une infinité dénombrable de ces sphères, de telle sorte que tout point de l'ensemble donné soit intérieur à l'une d'elles.*

Wiman (*A.*). — Ueber den Fundamentalsatz in der Theorie der Funktionen $E_\alpha(x)$. [Sur le théorème fondamental de la théorie des fonctions $E_\alpha(x)$.]

L'auteur se propose d'établir le théorème fondamental de M. Mittag-Leffler, relatif à la croissance de la fonction $E_\alpha(x)$, dans le cas où α est rationnel, en utilisant l'équation différentielle linéaire à laquelle elle satisfait. Cette équation devient, dans le cas où $\alpha = \frac{1}{k}$ (k entier), en posant $y = E_\alpha(x)$,

$$\frac{dy}{dx} - kx^{k-1}y = k\sum_{\nu=1}^{\nu=k-1} \frac{x^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)};$$

en l'intégrant par la méthode habituelle et en remarquant que, pour $x = 0$, $y = 1$, M. Wiman obtient

$$E_{\frac{1}{k}}(x) = e^{x^k}\left[1 + \int_0^x k\,e^{-z^k} \sum_{\nu=1}^{\nu=k-1} \frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}\,dz\right].$$

En discutant ce résultat, l'auteur distingue trois cas. Si l'on a $-\frac{\pi}{2k} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2k}$, alors $\lim\limits_{x=\infty} E_{\frac{1}{k}}(x) = k e^{x^k}$. Si l'un ou l'autre des deux cas

$$\frac{4\mu-1}{2k}\pi \leqq \varphi \leqq \frac{4\mu+1}{2k}\pi \qquad [\mu = 1, 2, \ldots, (k-1)]$$

ou

$$\frac{4\mu+1}{2k}\pi < \varphi < \frac{4\mu+3}{2k}\pi \qquad (x = re^{i\varphi})$$

se présente, on a

$$\lim_{x=\infty} E_{\frac{1}{k}}(x) = 0.$$

M. Wiman donne plusieurs représentations asymptotiques de $E_{\frac{1}{k}}(x)$ au moyen de séries semi-convergentes, et montre enfin que le cas où α est rationnel se

ramène au cas précédent où $\alpha = \frac{1}{k}$, au moyen de l'identité

$$E_{\frac{h}{k}}(x) = \frac{1}{h}\left[E_{\frac{1}{k}}\left(x^{\frac{1}{h}}\right) + E_{\frac{1}{k}}\left(\omega x^{\frac{1}{h}}\right) + \ldots + E_{\frac{1}{k}}\left(\omega^{h-1} x^{\frac{1}{h}}\right)\right],$$

où $\omega = e^{\frac{2\pi i}{h}}$.

Malmquist (*J.*). — Étude d'une fonction entière.

Par analogie avec la fonction $E_\alpha(x)$, l'auteur recherche une fonction entière de la forme

$$\sum \frac{x^\nu}{\Gamma(1+\nu\alpha_\nu)}$$

qui ne devienne infinie que le long d'un seul vecteur issu de l'origine, α_ν désignant une fonction de ν qui tend vers zéro avec $\frac{1}{\nu}$. En posant

$$\alpha_\nu = \frac{1}{(\log\nu)^\alpha} \qquad (0 < \alpha < 1),$$

M. Malmquist démontre que la fonction entière

$$G(x) = \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{x^{\nu-2}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{(\log\nu)^\alpha}\right)}$$

tend vers zéro, si x tend vers l'infini le long d'un vecteur issu de l'origine, ne coïncidant pas avec l'axe réel et positif. Dans ce but, l'auteur considère, au lieu de $G(x)$, l'intégrale

$$\int_R \frac{1}{e^{2\pi i z}-1}\,\frac{x^{z-2}}{\Gamma\left(1+\frac{z}{(\log z)^\alpha}\right)}\,dz$$

prise le long d'un rectangle ayant pour sommets les points

$$2-\varepsilon-ih, \qquad 2-\varepsilon+ih, \qquad n+\varepsilon+ih, \qquad n+\varepsilon-ih,$$

et cherche à faire croître h et n, de telle sorte que, dans l'égalité

$$\int_R = \int_{2-\varepsilon-ih}^{n+\varepsilon-ih} + \int_{n+\varepsilon-ih}^{n+\varepsilon+ih} + \int_{n+\varepsilon+ih}^{2-\varepsilon+ih} + \int_{2-\varepsilon+ih}^{2-\varepsilon-ih},$$

les trois premières intégrales tendent vers zéro.

Cette condition peut être réalisée si l'on a $0 < \varphi < 2\pi$, où $x = re^{i\varphi}$; $G(x)$ est alors égal à la limite, pour $h = \infty$, de la quatrième intégrale, et M. Malmquist démontre que

$$|G(x)| < r^{-\varepsilon} M(\varphi) \qquad \text{si} \qquad 0 < \varphi < 2\pi,$$

$M(\varphi)$ ayant la propriété d'être plus petit qu'un nombre fixe pour toutes les

valeurs de φ satisfaisant à la condition $\varepsilon_1 < \varphi < 2\pi - \varepsilon_1$, ε_1 étant une quantité positive. G(x) *tend donc uniformément vers zéro quand x s'éloigne à l'infini dans un angle déterminé par l'inégalité*

$$\varepsilon < \varphi < 2\pi - \varepsilon,$$

ε *étant un nombre positif arbitrairement petit.*

Wiman (*A.*). — Ueber die Nullstellen der Funktionen E$\alpha(x)$. [Sur les zéros des fonctions E$\alpha(x)$.]

Pour étudier la position et la condensation des zéros de la fonction $E_\alpha(x)$, l'auteur utilise les représentations de cette fonction données par M. Mittag-Leffler dans un Mémoire précédent. Dans le cas où $\alpha \geqq 2$, la discussion de M. Wiman montre que la fonction $E_\alpha(x)$ n'a pas de racines imaginaires; l'expression

$$\frac{r^{\frac{1}{\alpha}} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}{\pi}$$

représente une limite inférieure du nombre des racines négatives dont le module est inférieur à r. Quand $0 < \alpha < 2$, l'auteur montre que, pour des valeurs indéfiniment croissantes de r, les zéros de $E_\alpha(x)$ se rapprochent indéfiniment de la courbe

$$r^{\frac{1}{\alpha}} \sin\frac{\delta}{\alpha} = \log r - \log[\Gamma(-\alpha)],$$

où

$$\varphi = \frac{\alpha}{2}\pi + \delta, \qquad x = re^{i\varphi}.$$

Si $\alpha < 1$, les zéros se rapprochent de plus en plus, pour des valeurs croissantes de r, de la droite $\varphi = \frac{\alpha\pi}{2}$, lorsqu'ils sont au-dessus de l'axe des x. Si $\alpha > 1$, la distance des zéros à cette même droite croît au delà de toute limite avec r. L'auteur envisage enfin le cas où α est complexe. Les zéros se comportent d'une manière analogue, avec cette différence que l'équation $\varphi =$ const. représente maintenant une spirale logarithmique.

Poincaré (*H.*). — Sur la méthode horistique de Gyldèn.

Ce Mémoire est un examen critique de l'Ouvrage de Gyldèn : *Nouvelles recherches sur les séries employées dans les théories des planètes.* Dans l'analyse du Chapitre I de l'Ouvrage de Gyldèn, relatif à l'équation

$$\text{(1)} \qquad \frac{d^2\rho}{dv^2} + (1-\alpha)\rho - \beta\rho^3 = -\gamma \cos v,$$

Poincaré rappelle d'abord les résultats connus concernant cette équation, et montre que les conclusions de Gyldèn sont en désaccord avec ces résultats bien démontrés. Dans une première méthode où Gyldèn a employé la méthode des coefficients indéterminés, l'erreur provient de ce qu'il néglige des termes de

même ordre que ceux qu'il conserve; une deuxième méthode, basée sur l'emploi des fonctions elliptiques, conduit en première approximation au même résultat que la méthode de Delaunay. Mais ensuite Gyldèn veut tenir compte des termes négligés dans cette première approximation, et montrer que les solutions asymptotiques auxquelles conduisent, dans certains cas, les méthodes de première approximation, sont dues uniquement « à la manière d'aborder les approximations », et disparaissent en deuxième approximation. L'auteur rappelle que cela est impossible, une solution périodique ne pouvant disparaître que si l'un des exposants caractéristiques vient à s'annuler lorsqu'on a fait varier l'équation, et que cela ne peut avoir lieu ici, ces exposants restant réels et positifs. Poincaré donne encore ici la cause de l'erreur de Gyldèn : ce dernier applique une méthode d'approximations successives qui conduit, non à une solution de (1), mais à une suite divergente. Puis l'auteur analyse une autre méthode où Gyldèn développe la solution de (1) suivant les puissances de γ, et fait disparaître les termes séculaires par un artifice légitime, conduisant à des développements convergents, mais ne fournissant pas en réalité une approximation meilleure que la méthode de Delaunay. L'auteur examine encore les principes de la méthode horistique dans l'application qu'en fait Gyldèn à l'équation

$$\frac{d^2 z}{du^2} + z\left(1 + z^2 + \frac{d^2 z}{du^2}\right) = \Omega$$

et montre que, indépendamment d'une erreur commise par ce dernier sur l'ordre de grandeur des termes qu'il néglige, si Gyldèn avait calculé les termes exacts, les coefficients χ et χ' de la solution prise sous la forme

$$z = \chi \cos u + \chi' \cos(u + \omega)$$

ne seraient pas limités.

En définitive, Poincaré conclut que, en aucun cas, le phénomène que Gyldèn appelle *horistique* ne peut avoir lieu, que la conclusion de Gyldèn relative à l'absence de libration est inexacte, et qu'enfin ceux des résultats obtenus par cet astronome dans l'Ouvrage analysé, qui sont exacts, auraient pu s'obtenir d'une manière plus rapide à l'aide des méthodes anciennes.

Brodèn (T.). — Ueber eine Verallgemeinerung des Riemann'schen Problems in der Theorie der linearen Differentialgleichungen. (Sur une généralisation du problème de Riemann dans la théorie des équations différentielles linéaires.)

M. Brodèn étudie le problème suivant : « Dans quel cas, étant donné un groupe G de σ substitutions linéaires à n variables, et σ points $e_1, e_2, \ldots, e_\sigma$ du plan de la variable x, pourra-t-on trouver une équation différentielle linéaire et homogène régulière au sens de Fuchs, dont le groupe G soit le groupe de monodromie, et les points e_i les points de ramification des intégrales ? » L'auteur étudie d'abord quelques propriétés des coefficients des substitutions linéaires hyperboliques de déterminant 1, puis modifie les séries ξ de Poincaré, de manière à écarter certaines des restrictions relatives à la convergence de ces dernières dans le cas où les substitutions du groupe g de Poincaré sont paraboliques. En prenant ensuite pour les intégrales $y_1, \ldots, y_n$ des quotients dont les

numérateurs sont formés avec ces séries ξ modifiées, et dont les dénominateurs sont des fonctions thétafuchsiennes, l'auteur montre que la question de l'existence de l'équation différentielle d'ordre n répondant aux conditions posées au début, dépend de la solution de la même question dans le cas de $n = 2$.

Maillet (*E.*). — Sur les nombres e et π et les équations transcendantes.

L'auteur étend d'abord les méthodes de Hilbert et Hurwitz pour établir la transcendance de e et de π à la démonstration de plusieurs théorèmes qu'il résume dans les trois suivants :

1. *Les puissances entières ou fractionnaires de e ne peuvent être racines d'aucune équation*

$$(1) \qquad \sum_{0}^{\infty} C_{\alpha} x^{\omega_\alpha} = 0$$

quand $\frac{1}{C_n}$ *croît suffisamment vite avec n* $\left(C_{\alpha} \textit{ rationnel}, \omega_n = \frac{\chi_n}{q}, \textit{ où } \chi_n \textit{ est un entier donné croissant en fonction de n, et q entier} \right)$ *pour un mode de croissance donné de* χ_n.

2. *Il en est de même pour les équations*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} C_{\alpha} e^{\omega_\alpha} = 0$$

$\left(\omega_\alpha \textit{ étant positif ou négatif, et de la forme } \frac{\chi_n}{q}, \chi_n \textit{ et q entiers} \right)$, *pourvu que* $\frac{1}{C_\alpha}$ *croisse suffisamment vite avec* $|\alpha|$ *et que le mode de croissance de* χ_α *soit donné.*

3. *Les puissances négatives rationnelles de e ne sont pas racines des équations*

$$(2) \qquad \sum_{0}^{\infty} C_n x^{\omega_n} = 0$$

dont le premier membre converge pour $0 < x < k < 1$, *quand* ω_α *croît suffisamment vite avec n, pour un mode de variation donné des* C_n.

M. Maillet établit ensuite un lemme qui permet, moyennant un choix convenable de la loi de décroissance des coefficients C_n, de comparer les racines de l'équation

$$\sum_{0}^{n} C_{\alpha} x^{\omega_\alpha} = 0$$

à celles de l'équation (2), puis établit la réciproque de ce lemme et démontre

que, dans une équation du type (2), on pourra toujours choisir pour les C_n un mode assez rapide de décroissance pour que π ne puisse être racine de l'équation. L'auteur généralise ensuite les résultats de la manière suivante :

$t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ étant des entiers fonctions données de n et tels que la série $\sum \frac{a_n}{t_n} x^n$ soit convergente quels que soient les entiers positifs $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, quand $|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_n|, \ldots$ ont une limite supérieure finie A et si $t_1, \ldots, t_n, \ldots$ croissent suffisamment vite avec n, aucun nombre fonction algébrique à coefficients entiers d'un nombre non algébrique ζ n'est racine d'une des équations

$$\sum_0^{\infty} \frac{a_n}{t_n} x^n = 0.$$

M. Maillet applique ensuite à un exemple la méthode de Hilbert et Hurwitz généralisée, en précisant la nature de ζ, pour obtenir une limite supérieure du coefficient de x^{n+1}, puis montre que, pour chaque nombre ζ, algébrique ou non, il existe une infinité d'ensembles C de nombres qui ne sont pas racines d'équations de la forme

$$\sum_0^{\infty} C_n x^n = 0.$$

Dans la dernière Partie, l'auteur met en lumière les analogies qui existent entre les équations du type (2) et les équations algébriques, au point de vue du nombre de leurs racines réelles, donne au moyen du nombre des racines de certaines équations binomes une valeur approchée du nombre des racines de (2) quand le mode de décroissance des C est suffisamment rapide, et prouve que ces équations n'ont aucune racine algébrique, tandis que l'ensemble des racines transcendantes de toutes ces équations a la puissance du continu.

Lerch (M.). — Essai sur le calcul du nombre des classes de formes quadratiques binaires aux coefficients entiers.

L'auteur rappelle d'abord quelques résultats connus concernant le signe $\left(\frac{p}{q}\right)$ de Legendre, les discriminants des formes quadratiques et les recherches de Kronecker et de Lejeune-Dirichlet sur le calcul du nombre des classes de formes quadratiques binaires correspondant à un discriminant donné. Il part ensuite de l'équation de Dirichlet

$$\sum_{(a,b,c)} \sum_{m,n} \left(\frac{Q^2}{am^2+bmn+cn^2}\right) F(am^2+bmn+cn^2) = \tau \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right)\left(\frac{Q^2}{k}\right) F(hk),$$

où D_0 est le discriminant fondamental correspondant à D, de sorte que $D = D_0 Q^2$, où $\tau = 1$ pour $D > 0$, $\tau = 6$ pour $D = -3$ et $\tau = 4$ pour $D = -4$, puis $\tau = 2$ pour $D < -4$, et enfin $F(z)$ étant une fonction quelconque assurant seulement la convergence absolue des deux séries à double entrée. X étant une quantité positive, l'auteur prend $F(z) = 1$ pour $z \leqq X$ et $F(z) = 0$ pour $z > X$, puis divise par X les deux membres de l'équation de Dirichlet et passe à la limite

pour X infini, en envisageant successivement les deux cas $D < 0$ et $D > 0$, $Q = 1$; le passage au cas général où $D > 0$ sans que $Q = 1$ se fait au moyen d'une identité relative à la fonction numérique $\mu(n)$ de Möbius. Pour un discriminant positif fondamental ($Q = 1$), l'auteur obtient, pour le nombre $Cl(D)$ des classes de formes quadratiques binaires, les expressions suivantes :

$$1^\circ\ Cl(D) \log E(D) = \frac{2\sqrt{D}}{\sqrt{\pi}} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n} \int_{n\sqrt{\frac{u\pi}{D}}}^{\infty} e^{-x^2}\, dx + \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \int_{\frac{n^2\pi}{Du}}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x},$$

u étant une quantité positive arbitraire, et où

$$E(D) = \frac{T + U\sqrt{D}}{2},$$

T et U désignant la solution fondamentale de l'équation de Fermat

$$T^2 - DU^2 = 4;$$

2° En prenant $u = \sqrt{2D}$, l'expression

$$\frac{1}{2} Cl(D) \log E(D) = \sqrt{D} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n} \frac{1}{e^{\frac{2n\pi}{u}} + 1} + \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \log \frac{1 + e^{-\frac{nu\pi}{D}}}{1 - e^{-\frac{nu\pi}{D}}};$$

3° Enfin, en prenant $u = \sqrt{D}$, l'expression suivante peut être employée pour des valeurs pas trop grandes de D :

$$\frac{1}{2} Cl(D) \log E(D) = \frac{\pi}{2} u \sum_{1}^{D-1} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{h^2}{D^2} - \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{D}{m}\right) \log \left(1 - e^{-\frac{2mu\pi}{D}}\right)$$

$$- \sqrt{D} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{D}{m}\right) \frac{1}{m} \frac{1}{e^{\frac{2m\pi}{u}} - 1}.$$

Enfin l'auteur termine en donnant, pour le nombre $Cl(-\Delta)$ des classes dans le cas où le discriminant est négatif, un certain nombre d'expressions au moyen de séries semi-convergentes, parmi lesquelles la formule

$$\frac{2}{\pi} Cl(-\Delta) = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \frac{1}{\nu} \frac{\Gamma(\xi)^2}{\Gamma\left(\xi + \frac{2\nu x}{\Delta}\right) \Gamma\left(\xi - \frac{2\nu x}{\Delta}\right)},$$

où $\xi = \frac{1}{2}$, $0 < x < 1$.

P. Drouin.

QUATERLY JOURNAL OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS (¹).

Tome XXXVIII, 1907.

Glaisher (*J.-W.-L.*). — On the representations of a number as the sum of two, four, six, eight, ten, and twelve squares. (Sur les représentations d'un nombre comme somme de deux, quatre, six, huit, dix et douze carrés.) Pages 1-62.

Les formules contenues dans ce travail reposent sur les formules elliptiques

$$\rho^{\frac12} = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{n^2}, \qquad k^{\frac12}\rho^{\frac12} = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{\frac14 m^2},$$

où $\rho = \frac{2K}{\pi}$, k, K, q ayant les significations ordinaires. On en déduit que le nombre de représentations $R_i(n)$ d'un entier n comme somme de i carrés est égal au coefficient de q^n dans le développement de $\rho^{\frac12 i}$ suivant les puissances de q, et que le nombre de représentations $R'_{r,s}(n)$ d'un entier n comme somme de r carrés impairs et de s pairs, les carrés impairs étant placés les premiers, est égal au coefficient de $q^{\frac{n}{4}}$ dans le développement de $k^{\frac{r}{2}}\rho^{\frac{r+s}{2}}$. Le nombre $R_{r,s}(n)$ de représentations de n comme somme de r carrés impairs et de s pairs, sans restriction d'ordre, est d'ailleurs

$$R_{r,s}(n) = \frac{(r+s)!}{r!\,s!} R'_{r,s}(n).$$

Deux représentations $x^2+y^2+\ldots$ et $x'^2+y'^2+\ldots$ ne sont considérées comme identiques que si $x = x'$, $y = y'$, ... Ainsi x^2+y^2 n'est pas identique à y^2+x^2 (sauf si $x = y$); x^2+y^2 n'est pas non plus identique à $(-x)^2+y^2$ (sauf si $x = 0$), etc.

On considère les fonctions arithmétiques suivantes :

$$\sigma_t(n) = \Sigma d^t, \qquad \zeta_t(n) = \Sigma(-1)^{d-1} d^t,$$
$$\zeta'_t(n) = \Sigma(-1)^{d'-1} d^t, \qquad \xi_t(n) = \Sigma(-1)^{d+d'} d^t,$$

où la sommation s'étend à tous les diviseurs d de l'entier n, et où $d' = \frac{n}{d}$, et les suivantes :

$$\Delta_t(n) = \Sigma\delta^t, \qquad \Delta'_t(n) = \Sigma\delta'^t,$$

$$E_t(n) = \Sigma(-1)^{\frac12(\delta-1)}\delta^t, \qquad E'_t(n) = \Sigma(-1)^{\frac12(\delta-1)}\delta'^t,$$

où la sommation s'étend à tous les diviseurs impairs δ de n, et où $\delta' = \frac{n}{\delta}$.

(¹) Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XLI_2, p. 5

Enfin, on considère aussi les fonctions $\lambda(m)$, $P(m)$, $\varphi(m)$, $\Omega(m)$ définies dans des Mémoires précédents [1].

Le Mémoire contient un grand nombre de formules que nous ne pouvons toutes donner ici. Un certain nombre d'entre elles étaient d'ailleurs déjà connues. En voici quelques-unes choisies comme exemples :

$$R_{1,1}(4n+1) = 4E_0(4n+1),$$
$$R_{0,2}(4n) = 4E_0(n),$$
$$R_{0,4}(4n) = (-1)^{n-1}\, 8\,\xi(n),$$
$$R_{1,3}(4n+1) = 8\Delta(4n+1),$$
$$R_{2,2}(4n+2) = 24\Delta(2n+1),$$
$$R_{3,1}(4n+3) = 8\Delta(4n+3),$$
$$R_{0,6}(4n) = R^{6}(n) = 4[4E'_2(n) - E_2(n)],$$
$$R_{0,8}(4n) = R^{8}(n) = (-1)^{n-1}\, 16\,\xi_3(n).$$

Pour les représentations d'un nombre comme somme de 10 carrés, on introduit une nouvelle fonction arithmétique $\chi_4(n)$ égale au quart de la somme des quatrièmes puissances des entiers complexes $a+bi$ qui ont n comme norme, en particulier $\chi_4(4n+3) = 0$. Cette fonction peut s'exprimer au moyen des facteurs premiers de n. Elle peut aussi se calculer par des formules de récurrence.

Elle est régulière, c'est à dire que $\chi_4(nn') = \chi_4(n)\,\chi_4(n')$ lorsque n et n' sont premiers entre eux.

On a

$$R^{10}(n) = R_{0,10}(4n) = \frac{4}{5}[E_4(n) + 16E'_4(n) + 8\chi_4(n)],$$
$$R^{10}(4n+1) = \frac{4}{5}[17E_4(4n+1) + 8\chi_4(4n+1)],$$
$$R^{10}(4n+3) = -12E_4(4n+3),$$
$$R_{\,}(4n+1) = \frac{63}{5}[E(4n+1) - \chi_4(4n+1)].$$

. . . .

On a encore

$$R^{12}(2n) = -8\xi_5(2n),$$
$$R^{12}(2n+1) = 8[\Delta(2n+1) + 2\Omega(2n+1)],$$

. . . .

Il est intéressant de remarquer que, dans les formules relatives à 2, 4, 6, 8, 12 carrés, n'interviennent que les diviseurs réels de n, tandis que dans celles relatives à 10 carrés interviennent en général les diviseurs complexes.

Basset (*A.-B.*). — On the singularities of surfaces. (Sur les singularités des surfaces.) Pages 63-83.

Une surface a-t-elle un nombre fini de singularités simples? Y a-t-il des

---

[1] Voir *Bulletin*, t. XXXIV$_2$, p. 98.

équations analogues à celles de Plücker? L'auteur étudie ces questions sans faire usage de la transformation birationnelle, employée par les mathématiciens qui s'en sont déjà occupés. Il donne, pour les douze premiers degrés, un tableau du nombre maximum de points singuliers que peut avoir une surface qui n'a pas de point biplanaire. (*A suivre.*) — Liste de Mémoires se rapportant à la question.

Heawood (P.-J.). — Geometrical relations between the roots of $f(x) = 0$, and $f'(x) = 0$. (Relations géométriques entre les racines de $f(x) = 0$ et $f'(x) = 0$.) Pages 84-107.

D'abord si $f(x)$ est du troisième degré, ses racines étant distinctes, soient P, Q, R les affixes de ces racines. Les affixes des racines de $f'(x) = 0$ sont les foyers de l'ellipse tangente aux côtés du triangle PQR en leurs milieux. Dans le cas général, en supposant que $f(x)$ soit de degré n et ait n' racines distinctes, les affixes des racines de $f'(x) = 0$ sont les foyers d'une courbe de classe $n' - 1$, et touchant toutes les segments joignant deux à deux les affixes de $f(x) = 0$.

Lorsque $n' = n$, les points de contact sont au milieu de ces segments.

Il y a d'autres propositions d'un autre caractère. Connaissant deux racines de $f(x) = 0$, on peut en déduire un cercle à l'intérieur duquel on trouve forcément une racine de $f'(x) = 0$. Si, par exemple, les deux racines de $f(x) = 0$ sont ± 1, le cercle a comme centre O et comme rayon $\cot \frac{\pi}{n}$.

On peut même remplacer ce cercle par une courbe n'ayant pas de point extérieur à lui. Enfin on peut trouver une courbe à l'intérieur de laquelle se trouvent toutes les racines de l'équation dérivée.

Burnes (E.-W.). — The binomial theorem for a complex variable and complex index. (La formule du binome pour une variable et un exposant complexes.) Pages 108-115.

L'auteur démontre par une méthode nouvelle et relativement facile les résultats d'Abel; c'est-à-dire que la série binomiale pour $(1 + x)^{s}$ est valable quand $|x| < 1$, ou quand $|x| = 1$, $|\arg x| < \pi$ et $R(s) > -1$, ou enfin lorsque $x = -1$ et $R(s) > 0$.

Burnes (E.-W.). — The use of factorial serie in an asymptotic expansion. (Emploi de la série factorielle dans un développement asymptotique.) Pages 116-140.

La série employée est la série

$$S(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n - s)}{\Gamma(n + 1)(n + \theta)^{\beta}},$$

convergente si $R(\beta + s) > 0$. La fonction $S(s)$ est uniforme et $S(s)\Gamma(-s)$

a comme seules singularités à distance finie les pôles

$$-\beta - n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Posant $s = u + iv$, l'expression $S(s)\,e^{\frac{1}{2}\pi(1-\varepsilon)|v|}$, où ε est positif, tend vers zéro lorsque $|v|$ croît indéfiniment. Cette propriété a ceci de remarquable, qu'elle n'est plus vraie si l'on remplace $S(s)$ par un des termes de son développement en série : *a fortiori* si l'on remplace $S(s)$ par la série des modules de ces termes.

L'auteur applique ces résultats à la recherche d'une expression asymptotique pour la fonction

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(n+1)(n+\beta)^s},$$

où $R(x) > 0$, expression qu'il avait déjà obtenue par une autre méthode.

L'auteur donne ensuite une autre preuve de la propriété que $S(s)\,e^{\frac{1}{2}\pi(1-\varepsilon)|v|}$ tend vers zéro. Cette preuve dépend des propriétés de la fonction $F_\rho(x)$ définie pour $|x| < 1$ par la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)\,x^n}{\Gamma(\rho+n+1)}.$$

C'est une fonction multiforme, avec $x = 1$ comme seule singularité à distance finie. Aux environs de ce point, on a

$$F_\rho(x) = \Gamma(1-\rho)\,\frac{(1-x)^{\rho-1}}{x^\rho} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{x^\rho\, n!\,\Gamma(\rho-n)(\rho-n-1)}.$$

Ce résultat est obtenu en considérant l'équation différentielle à laquelle satisfait $F_\rho(x)$. On en déduit aussi un développement pour $F_\rho(x)$ valable pour $|x| > 1$.

Dickson (L.-E.). — The abstract form of the special linear homogeneous group in an arbitrary field. (La forme abstraite du groupe spécial linéaire homogène dans un champ arbitraire.) Pages 141-144.

Le groupe $SLH(n, F)$ de toutes les substitutions linéaires homogènes sur n variables de déterminant unité dans le champ F est simplement isomorphe au groupe abstrait engendré par les opérateurs

$$B_{ij\lambda} \qquad (i, j = 1, \ldots, n;\ i \neq j;\ \lambda \text{ parcourant le champ F})$$

assujettis aux relations générales :

$$B_{ij\lambda}B_{ij\mu} = B_{ij,\lambda+\mu}, \qquad B_{ij0} = 1,$$

$B_{ij\lambda}$ échangeable avec $B_{kl\mu}$, $B_{ik\mu}$ et $B_{kj\mu}$,

$$B_{ik\lambda}^{-1}B_{kj\mu}^{-1}B_{ik\lambda}B_{kj\mu} = B_{ij,\lambda\mu},$$

$$B_{ij\lambda}B_{ji\rho}B_{ij\sigma} = B_{[illegible]}\,B_{[illegible]}\,B_{[illegible]}\,B_{[illegible]} \qquad (\kappa = \lambda + \rho + \lambda\rho\sigma = 0).$$

où i, j, k, l sont quatre entiers distincts, n; λ, μ, ν, assujettis à une condition seulement dans les dernières relations.

Dickson (L.-E.). — The abstract form of the abelian linear groups. (La forme abstraite des groupes abéliens linéaires.) Pages 145-158.

Le groupe $SA(2m, F)$ de toutes les transformations abéliennes spéciales, linéaires sur $2m$ variables dans le champ F est simplement isomorphe au groupe abstrait G engendré par $L_{i\lambda}$, $L'_{i\lambda}$, $Q_{ij\lambda}$, $N_{ij\lambda}$, $S_{ij\lambda}$ où λ parcourt le champ E, où les indices i, j vont de 1 à m $(i \neq j)$, les générateurs étant assujettis à quatorze relations qu'il nous parait inutile d'énumérer ici.

Basset (A.-B.). — On the singularities of surfaces. (Sur les singularités des surfaces.) Pages 159-177. (Suite d'un Mémoire précédent.)

Étude des courbes nodales. Cayley et Salmon avaient déjà remarqué l'importance de la présence sur ces courbes des *points-pinces* (pinch points), c'est-à-dire des points où les deux plans tangents coïncident. L'auteur montre l'importance d'une autre espèce de points singuliers, les *flecnodal points*. Ce sont les points de la courbe nodale tels qu'en coupant la surface par un plan passant par ce point, l'intersection présente en ce point un point double qui soit en même temps un point d'inflexion. L'auteur détermine le nombre de ces points.

Lorsque, tout le long d'une courbe double, les plans tangents coïncident, on a une *courbe de rebroussement* (cuspidal curve). Un plan passant par un point de cette courbe coupe la surface suivant une courbe ayant en ce point un point de rebroussement.

Si ce point est en plus un point d'inflexion, c'est un point singulier de la courbe que l'auteur appelle *point tacnodal*. Parmi les théorèmes qu'il donne à ce sujet on peut remarquer le suivant :

Sur une courbe de rebroussement située sur une surface du $n^{ième}$ ordre, il y a n points tacnodaux.

Cette courbe réduit la classe de la surface de $4n - 12$. Il y a une autre espèce de points singuliers sur une courbe de rebroussement. Supposons, par exemple, une conique de rebroussement sur une quartique; le plan de cette conique coupe encore la surface suivant une droite, et les deux points où cette droite rencontre la conique sont des points de cette espèce. Mais la théorie générale de ces points n'est pas faite.

Suit une liste de Mémoires relatifs aux quartiques ayant une conique nodale.

Glaisher (J.-W.-L.). — On the representations of a number as the sum of fourteen and sixteen squares. (Sur les représentations d'un nombre comme somme de quatorze et seize carrés.) Pages 178-236.

Les méthodes appliquées par l'auteur dans des Mémoires précédents (*voir* plus haut) au problème de la décomposition des entiers en 2, 4, 6, 8, 10, 12 carrés, le sont ici pour 14 et 16 carrés. Il s'introduit dans le cas de 14 carrés une nouvelle fonction arithmétique W(n) définie par

$$k^2 k'^2 \varphi^7 = 16 \sum_1^\infty W(n) q^n,$$

et dans le cas de 16 carrés une fonction $\Theta(n)$ définie par

$$k^2 k'^2 \varphi^8 = 16 \sum_1^\infty \Theta(n) q^n.$$

On peut d'ailleurs remplacer ces fonctions par d'autres liées à elles. L'intéressant est de réduire autant que possible le nombre de ces fonctions qui ne sont pas définies d'une façon purement arithmétique.

C'est ce que fait l'auteur dans une addition au Mémoire en donnant la définition arithmétique suivante de $\Theta(n)$. Soit $n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ une représentation de n par une somme de 4 carrés. Soit

$$A = \Sigma \{ [a^6] - 5 [a^4 b^2] + 30 [a^2 b^2 c^2] \},$$

dans laquelle $[a^6]$ est la fonction symétrique, somme des termes semblables à a^6, et de même pour $[a^4 b^2]$ et $[a^2 b^2 c^2]$; et dans laquelle le signe Σ est étendu à toutes les représentations de n.

Ceci posé, on a

$$\Theta(n) = \frac{1}{8} A \quad \text{ou} \quad \frac{1}{24} A,$$

suivant que n est impair ou pair.

Muir (Thomas). — A fourth list of writings on determinants. (Une quatrième liste d'écrits sur les déterminants.) Pages 237-264.

Cette liste, établie par ordre chronologique, contient environ 300 titres s'ajoutant aux 1700 déjà collationnés.

Elliott (E.-B.). — A pascalian theorem as to pentagons. (Un théorème pascalien pour les pentagones.) Pages 265-268.

Un théorème de Jacobi Harley-Cayley relatif à la résolvante du sixième degré la plus simple d'une équation du cinquième degré, montre qu'étant donnés cinq points sur une conique, il existe un sixième point dont la relation aux cinq premiers est projective, et qui ne change pas si l'on permute circulairement les cinq points donnés ou qu'on change leur ordre. Recherchant ce point, l'auteur arrive au résultat suivant :

Soit un pentagone $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ inscrit dans une conique. On joint $A_{r-1} A_{r+1}$ et $A_{r-2} A_{r+2}$ (bien entendu A_{h+5} est supposé identique à A_h), puis on joint le

point d'intersection de ces deux droites à A_r; *cette nouvelle droite coupe la conique en un point autre que* A_r, *soit* B_r. *Soit* R_{rs} *le point d'intersection de* A_rA_s *et* B_rB_s. *Ceci posé, la droite* $R_{r,s+1}R_{[illegible]}$ *passe par* $A_{[illegible]}$. *De plus, les cinq droites ainsi définies coupent la conique en un même point.*

Hardy (*G.-H.*). — On certain oscillating series. (Sur certaines séries oscillantes.) Pages 269-288.

L'auteur démontre le théorème suivant :

Les deux séries Σa_n *et* Σb_n ($b_n = a_{\sqrt[k]{n}}$ lorsque n est une puissance $k^{\text{ième}}$ parfaite, $b_n = 0$ dans le cas contraire) *sont sommables par la méthode de Cesàro en même temps, et leurs sommes sont les mêmes.*

Il en résulte qu'un certain théorème de M. L. Fejér : *Si* Σa_n *est sommable par la méthode de Cesàro et a une somme s,* $\Sigma a_n x^{n^k}$ (k entier > 0) *est convergente pour* $|x| < 1$ *et tend vers s lorsque x tend vers* 1, n'est qu'un corollaire d'un théorème dû à M. Frobenius et dont l'énoncé est le même sauf que k est égal à 1.

On pourrait essayer de remplacer dans l'énoncé de M. Fejér n^k par $\psi(n)$, $\psi(n)$ étant une fonction arithmétique de n, croissant constamment avec n; mais alors le théorème n'est plus toujours vrai. L'auteur prend comme exemple la série $F_a(x) = \Sigma(-1)^n x^{a^n}$. La valeur de $F_a(x)$ oscille autour de $\frac{1}{2}$ lorsque x tend vers 1. L'auteur arrive à ce résultat en partant de la relation fonctionnelle $F_a(x) + F_a(x^a) = x$. L'auteur donne une autre expression de $F_a(x)$, puis développe des considérations analogues pour la fonction Σx^{a^n}. Cette dernière, lorsque x s'approche de 1 est égale à $\frac{-\log(1-x)}{\log a} + \lambda(x)$, $\lambda(x)$ oscillant entre des limites finies. Toutes ces considérations sont généralisées pour des fonctions satisfaisant à $f(x) + f(ax) = g(x)$, puis on considère comme exemple le cas où $g(x) = \frac{1}{1+x}$. Enfin, l'auteur étudie encore la série

$$F(x) = \Sigma(-1)^n x^n,$$

lorsque x s'approche de 1 par valeurs réelles plus petites que 1, la série oscille entre 0 et 1. En résumé, il semble que les séries de la forme $\Sigma(-1)^n x^{\psi(n)}$, x tendant vers 1 par valeurs réelles < 1, tendent vers $\frac{1}{2}$ lorsque la croissance de $\psi(n)$ ne dépasse pas certaines limites, et, dans le cas contraire, oscillent entre des limites comprises entre 0 et 1, ces limites étant d'autant plus distantes que la croissance de $\psi(n)$ est plus rapide.

Glaisher (*J.-W.-L.*). — On the representations of a number as the sum of eighteen squares. (Sur les représentations d'un nombre comme somme de dix-huit carrés.) Pages 289-351.

Ce Mémoire est la continuation des deux dont il a été parlé plus haut et

relatifs aux représentations par des sommes de 2, 4, ..., 16 carrés. Les méthodes y sont les mêmes. On y introduit deux nouvelles fonctions arithmétiques $\chi_8(n)$ et $G(n)$ définies par

$$(4k^2k'^2 + k^4k'^4)\varrho = 64\sum_1^{\infty}\chi_8(n)q^n,$$

$$k^2k'^2(k'^2 - k^2)\varrho = 16\sum_1^{\infty}G(n)q^n.$$

$\chi_8(n)$ peut aussi être définie comme le huitième de la somme des huitièmes puissances des entiers complexes qui ont n pour norme, de façon que

$$\chi_8(4k+3) = 0$$

(théorème non démontré dans ce Mémoire). Les formules obtenues sont nombreuses et ne peuvent trouver place ici. On peut signaler les formules suivantes qui sont curieuses :

$$R_{14,4}(8n+2) = 1530\,R_{18,0}(8n+2),$$
$$10\,R_{10,8}(8n+6) = 143\,R_{14,4}(8n+6).$$

[La signification de $R_{r,s}(n)$ a été donnée plus haut.]

Le Mémoire se termine par des formules de récurrence et des tables pour les fonctions $\chi_8(n)$ et $G(n)$ et pour d'autres fonctions liées aux précédentes. Une addition au Mémoire donne la comparaison entre certaines formules de l'auteur et des formules données par Liouville.

Jourdain (Philip-E.-B.). — On the comparison of aggregates. (Sur la comparaison des ensembles.) Pages 352-366.

Ce Mémoire a pour but de passer en revue les résultats obtenus jusqu'à maintenant dans la question de la comparaison de deux ensembles.

La conclusion est la suivante : Considérant deux ensembles M, N ayant des nombres cardinaux m, n (ce qui, si l'on n'admet pas que tout ensemble ait un nombre cardinal, constitue tout au moins le cas particulier le plus intéressant), ou bien on peut dire si m et n sont égaux ou inégaux et quel est le plus grand des deux, ou bien c'est qu'aucune partie de M n'est de même puissance que N ni aucune partie de N de même puissance que M. Que ce dernier cas soit impossible, équivaut à l'axiome de Zermelo ou à tel autre équivalent.

Basset (A.-B.). — The mixed transformation of Lagrange's equations. (La transformation mixte des équations de Lagrange.) Pages 367-373.

L'auteur avait, dès 1887, donné les équations de la Dynamique sous une forme mixte entre celle de Lagrange et celle d'Hamilton, mais il pouvait sembler que ces équations ne s'appliquaient qu'au cas où le système possède des coordonnées cinosthéniques, c'est-à-dire n'entrant pas explicitement dans les expressions de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. L'auteur montre qu'il n'en est rien et donne une démonstration simplifiée de ces équations.

Thomson (A.-V.-H.). — On point reciprocation. (Sur la transformation par polaires réciproques.) Pages 374-381.

Formules relatives à la transformation par polaires réciproques, la conique directrice étant un cercle. On peut, par ces formules, transformer des propriétés métriques. On trouve ainsi, par exemple, que le lieu des foyers des coniques tangentes à quatre droites est une cubique circulaire. Il y a des considérations analogues dans l'espace.

Harold Hilton. — An application of Cayley's colour-groups. (Une application des groupes en couleur de Cayley.) Pages 382-384.

Exemples de représentations de groupes de genre un sur une surface de même genre par un diagramme à deux couleurs.

E. CAHEN.

ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA (1).

Serie III, Tomo XV, 1908.

Cerruti (V.). — Le matematiche pure e miste nei primi dodici Congressi della Società italiana per il progresso delle Scienze. [Les mathématiques pures et mixtes dans les douze premiers Congrès de la Société italienne pour le progrès des Sciences] (1-20).

Discours prononcé à Parme le 24 septembre 1907 à l'occasion du premier Congrès nouveau de la *Società italiana per il progresso delle Scienze*. Au moment où cette Société reprend son activité, Cerruti fait l'historique des travaux mathématiques qui furent présentés dans les Congrès tenus par la Société entre 1839 et 1847 par divers savants dont les noms méritent d'être tirés d'un oubli immérité.

L'auteur cite et analyse, entre autres travaux, ceux de Félix Chio et de Menabrea sur la série de Lagrange, de Minich et de Trudi sur les fonctions elliptiques ou abéliennes, de Frisiani sur le problème de Pfaff, de Lavagna sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre à un nombre quelconque de variables, de Tardy sur les différentielles à indices quelconques. En mathématiques appliquées, Cerruti cite en premier lieu les célèbres travaux de Mossotti sur l'éther et la matière, la théorie de la lumière, la capillarité, les diélectriques, ainsi que ceux de Plana sur la distribution de l'électricité à la surface

(1) Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XL_2, p. 121-135.

des conducteurs. Divers travaux relatifs à l'hydraulique sont ensuite mentionnés ainsi que les travaux de physique mathématique de Codazza. Au Congrès de Turin (1840), Babbage présenta sa célèbre machine à calculer, dont une étude détaillée fut faite par Menabrea.

Le travail contient une bibliographie détaillée des œuvres qui y sont mentionnées.

Lauricella (*G.*). — Sulle equazioni integrali. [Sur les équations intégrales] (21-45).

Dans cette Communication faite au Congrès de Parme (1907), l'auteur donne un magnifique exposé concernant l'origine, le but et les applications de la théorie des équations intégrales, et il met en relief les principaux résultats établis jusqu'alors dans cette théorie.

Les principaux travaux analysés par Lauricella dans cette conférence sont ceux de MM. Volterra, Le Roux, Fredholm, Plemelj, Hilbert, Schmidt, Pincherle, Picard. L'auteur insiste sur les applications de la théorie de Fredholm à la physique mathématique. L'artifice imaginé par Fredholm pour la solution du problème de Dirichlet s'applique à la plupart des problèmes au contour de la physique mathématique. Il peut se résumer, dit l'auteur, dans les trois opérations suivantes : 1° construire une équation de Fredholm de deuxième espèce, ou un système de pareilles équations, convenant au problème posé; 2° déduire systématiquement pour cette équation la fonction caractéristique (ou noyau) de certaines solutions particulières du problème, analogues à l'intégrale $\frac{1}{r}$ de l'équation de Laplace pour le problème de Dirichlet; 3° démontrer que l'équation intégrale homogène, correspondant à l'équation de Fredholm, ou sa conjuguée (obtenue par la permutation de x et de y dans le noyau) n'admettent aucune solution différente de zéro.

La théorie de Fredholm permet alors d'établir l'existence de la solution de l'équation intégrale et de résoudre le problème au contour proposé par un potentiel de double couche, ou un potentiel généralisé de double couche, ayant pour densité cette solution. L'auteur montre comment la méthode doit être modifiée lorsque l'équation homogène déduite de l'équation intégrale considérée admet une ou plusieurs solutions non identiquement nulles.

Enfin, Lauricella, à propos du problème de l'équilibre des corps élastiques isotropes pour des efforts donnés à la surface, montre l'intérêt qu'il y aurait, pour la physique mathématique, à étudier aussi des équations intégrales de la forme

$$\varphi(x) + \int_a^b \left[\mathrm{H}(x,y)\,\varphi(y) + \mathrm{K}(x,y)\,\frac{d\varphi}{dy} \right] dy = \psi(x),$$

où $\varphi(x)$ est la fonction inconnue, équations dont un cas particulier a été traité par M. Picard, à propos du problème des températures stationnaires.

Tonelli (*L.*). — I polinomi d'approssimazione di Tchebycheff. [Les polynomes d'approximation de Tchebycheff] (47-120).

Le travail est divisé en trois Parties.

Première Partie. — L'auteur expose d'abord brièvement la théorie des polynomes de Tchebycheff pour les fonctions d'une variable réelle. Cette étude est faite d'après un Mémoire de M. Kirchberger et d'après l'exposé de la méthode de Tchebycheff donné par M. Borel dans ses *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes* (p. 82). Étant donnée une fonction $f(x)$ définie et continue dans l'intervalle a, b et un polynome $P_n(x)$ de degré n à coefficients $p_0, p_1, \ldots, p_n$ indéterminés, soit $m(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ la borne supérieure de la différence $|f(x) - P_n(x)|$ dans l'intervalle a, b. Lorsque les coefficients p_i varient, l'ensemble des nombres $m(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ admet une borne inférieure μ positive ou nulle. Si cette borne est atteinte pour certaines valeurs des coefficients p_i, le polynome $\Pi_n(x)$ obtenu en donnant ces valeurs aux coefficients de $P_n(x)$ s'appelle *polynome d'approximation de Tchebycheff* de la fonction $f(x)$. Rappelons simplement ici que le polynome de Tchebycheff de degré n au plus existe toujours et est unique.

M. Tonelli passe ensuite à l'extension de la méthode de Tchebycheff au cas d'une fonction $f(x, y)$ de deux variables, définie et continue dans un domaine borné A. La définition des polynomes de Tchebycheff (que nous appellerons *polynomes* T) est analogue à celle donnée plus haut pour le cas d'une variable. Après avoir établi l'existence d'au moins un polynome T de degré au plus égal à n, l'auteur démontre qu'ici, contrairement à ce qui avait lieu dans le cas d'une variable, il existe en général plus d'un polynome T de degré $\leq n$; l'existence de deux pareils polynomes entraine d'ailleurs l'existence d'une infinité d'autres polynomes T de degré n.

Les polynomes T de degré n, en nombre infini, d'une fonction donnée $f(x, y)$ possèdent la propriété suivante : *il existe au moins $n + 2$ points du domaine* A *tels que, en ces points, tous les polynomes* T *de degré n diffèrent de $f(x, y)$ d'une quantité égale en valeur absolue au nombre* μ (défini comme plus haut). Les polynomes T de degré n forment une famille de fonctions *également* continues; les propriétés établies par Arzelà au sujet de pareilles familles de fonctions permettent d'établir l'existence, dans la famille considérée, d'une fonction limite supérieure $U(x, y)$ et d'une fonction limite inférieure $V(x, y)$: *Par un point quelconque compris entre* $U(x, y)$ *et* $V(x, y)$ *passe toujours un polynome* T *de la famille considérée.* Dans le cas où $U(x, y)$ et $V(x, y)$ coïncident, il y a un seul polynome T de degré n. L'auteur donne encore, sous une autre forme, la condition pour qu'il existe un seul polynome T de degré n.

La correspondance entre la fonction $f(x, y)$ et ses polynomes d'approximation est continue, c'est-à-dire que, étant donné un nombre positif η arbitrairement petit, on peut lui faire correspondre un nombre ε tel que l'inégalité

$$|f(x, y) - g(x, y)| < \varepsilon,$$

vérifiée dans tout le domaine A, entraine

$$|\Pi_n(x, y) - \Pi'_n(x, y)| < \eta,$$

où $f(x, y)$ et $g(x, y)$ sont deux fonctions continues données, Π'_n un quelconque des polynomes T de degré n relatifs à $g(x, y)$ et Π_n un polynome T convenablement choisi relatif à $f(x, y)$.

En se servant du théorème de Weierstrass sur la représentation approchée des fonctions continues par des polynomes, on peut voir que la série de poly-

nomes

$$\Pi_0(x, y) + [\Pi_1(x, y) - \Pi_0(x, y)] + \ldots + [\Pi_n(x, y) - \Pi_{n-1}(x, y)] + \ldots,$$

où $\Pi_n(x, y)$ est un quelconque des polynomes T de degré n relatifs à $f(x, y)$, converge uniformément vers $f(x, y)$ dans tout le domaine A. Il existe en général une infinité de pareilles séries, puisqu'il y a une infinité de polynomes Π_n. Toutes ces séries possèdent la propriété d'être celles qui ont la convergence la plus rapide parmi toutes les séries de polynomes de degrés croissants convergeant uniformément vers $f(x, y)$ dans le domaine A.

Deuxième Partie. — M. Tonelli étend la méthode de Tchebycheff à la représentation approchée des fonctions continues d'une ou de deux variables, possédant la période 2π par rapport à chacune des variables, à l'aide de polynomes trigonométriques. Dans le cas de deux variables, par exemple, un polynome trigonométrique d'ordre n est un polynome de la forme

$$\sum_{s=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{n}(a_{rs}\cos rx\cos sy + b_{rs}\sin rx\cos sy + a'_{rs}\cos rx\sin sy + b'_{rs}\sin rx\sin sy),$$

les nombres r et s étant tels que $r + s \leqq n$.

On établit alors comme dans la première Partie la définition des polynomes trigonométriques de Tchebycheff, les propriétés et le calcul de ces polynomes. On en déduit les mêmes conséquences que plus haut relativement à la représentation de la fonction $f(x, y)$ par une série de polynomes trigonométriques de degrés croissants uniformément convergente et de convergence la plus rapide possible.

Troisième Partie. — Il s'agit ici d'une fonction continue $f(x)$ de la variable complexe x définie dans un domaine fermé A. L'auteur établit pour la fonction $f(x)$ l'existence d'un polynome $T_n(x)$ de Tchebycheff, *et d'un seul*, de degré n au plus. La correspondance entre $f(x)$ et $T_n(x)$ est continue. Si maintenant on suppose la fonction $f(x)$ holomorphe dans le domaine A, on peut représenter $f(x)$, à moins de ε près, dans le domaine A par un polynome. Il en résulte que l'on peut représenter $f(x)$, et d'une seule façon, par une série de polynomes de degrés croissants convergeant uniformément vers $f(x)$ dans le domaine A et telle que la somme des n premiers termes soit un polynome de degré n donnant pour $f(x)$ l'approximation la meilleure parmi tous les polynomes de degré n. Cette partie du Mémoire de M. Tonelli est analysée avec plus de détail dans les *Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe* de M. Paul Montel (p. 66).

Fubini (*G.*). — Sul principio di minimo di Dirichlet. [Sur le principe de minimum de Dirichlet] (121-125).

Cette Note a pour but l'exposé des méthodes récentes qui ont permis de rendre rigoureuse la méthode de démonstration connue sous le nom de *principe de Dirichlet* relativement à l'existence des solutions de certains problèmes de la physique mathématique et du calcul des variations. L'auteur met en relief le rôle joué par l'*intégrale de Lebesgue* dans ces procédés de démonstration récents.

Tedone (*O.*). — Sui metodi della fisica-matematica. [Sur les méthodes de la physique mathématique] (127-141).

Dans cette conférence lue au Congrès de Parme (1907), M. Tedone envisage surtout le problème de l'intégration des équations de l'équilibre élastique pour un corps isotrope. Il étudie l'influence exercée sur les recherches relatives à ce problème, aux diverses époques, par les idées générales qui avaient cours à ces époques relativement aux méthodes d'intégration de la physique mathématique. Son historique du problème de l'équilibre élastique s'étend depuis Navier et Lamé jusqu'aux travaux les plus récents qui comprennent en particulier ceux de l'auteur.

Sannia (*G.*). — Nuova esposizione della geometria infinitesimale delle congruenze rettilinee. [Nouvel exposé de la géométrie infinitésimale des congruences de droites] (143-185).

Dans l'étude des congruences de droites, le point de vue généralement adopté est celui de Kummer consistant à définir une droite quelconque g de la congruence par les coordonnées x, y, z du point où cette droite coupe une *surface de départ* S choisie arbitrairement et par les cosinus directeurs X, Y, Z de la droite g. Ces six quantités x, y, z, X, Y, Z sont fonctions de deux paramètres u, v. Les trois dernières sont les coordonnées d'un point qui est l'*image sphérique* de la droite g et les coordonnées u, v définissent, sur la sphère de rayon 1 ayant pour centre l'origine, un réseau de coordonnées curvilignes, qui est l'*image sphérique* de la congruence. Kummer introduit comme *formes fondamentales* de la congruence les formes quadratiques différentielles

$$\Sigma dX^2 \quad \text{et} \quad \Sigma dx\, dX.$$

Ceci rappelé, M. Sannia remarque que la première seule de ces formes a une définition *intrinsèque*, indépendante de la surface choisie comme surface de départ; c'est pourquoi il se propose dans ce travail de remplacer la deuxième forme de Kummer par une forme ayant aussi un sens intrinsèque. Désignons par $d\sigma$ la plus courte distance entre deux droites infiniment voisines g, g' correspondant la première aux valeurs u, v, la seconde aux valeurs $u+du$, $v+dv$ des paramètres, et par ds' l'élément linéaire de l'image sphérique : M. Sannia prend pour deuxième forme fondamentale la quantité $-d\sigma\, ds'$, c'est-à-dire le *moment* des deux droites infiniment voisines. Soient

$$(1) \qquad ds'^2 = \Sigma dX^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$
$$(2) \qquad -d\sigma\,ds' = D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2$$

les deux formes fondamentales ainsi adoptées. La théorie des congruences présente alors une analogie complète avec la théorie des surfaces en coordonnées curvilignes et l'auteur reprend à ce point de vue l'étude des propriétés connues des congruences.

Une notion nouvelle introduite par l'auteur dans cette étude est celle de l'*indicatrice* analogue à l'indicatrice qu'on introduit dans l'étude de la courbure des surfaces : toutes les surfaces de la congruence contenant les deux droites infiniment voisines g, g' se raccordent tout le long de g, et le para-

mètre de distribution de g (commun à toutes ces surfaces) a pour expression

$$p = \frac{d\sigma}{ds'} = - \frac{D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2},$$

formule analogue à celle qui donne la courbure des sections normales d'une surface; dans un plan normal à g, on peut donc décrire une conique indicatrice donnant une représentation géométrique de la variation de p lorsque, g restant fixe, la génératrice g' infiniment voisine de g varie. Le parallélisme entre les deux théories peut se poursuivre et l'on définira ainsi les *surfaces asymptotiques* de la congruence (ce sont les développables de la congruence), les systèmes de surfaces conjuguées, les surfaces principales, les paramètres principaux de la congruence (analogues aux rayons de courbure principaux).

Les deux formes (1), (2) ne peuvent pas être choisies arbitrairement. M. Sannia donne les relations aux dérivées partielles qui doivent exister entre les coefficients de deux formes pour que ces deux formes puissent être les deux formes fondamentales (1) et (2) d'une congruence.

Indiquons pour terminer les titres de quelques autres questions étudiées, toujours au même point de vue, par M. Sannia dans son travail : congruences paraboliques, isotropes (Ribaucour), normales; congruences ayant une image sphérique donnée; théorèmes de Malus-Dupin et de Beltrami; congruences rapportées à leurs surfaces développables, ou à un système conjugué de surfaces, ou à leurs surfaces principales.

Levi (B.). — Antinomie logiche? [Antinomies logiques?] (187-216).

Il est impossible de *démontrer* que jamais les lois de la logique ne peuvent conduire à des contradictions, car une pareille démonstration devant être conduite elle-même d'après les règles de la logique, on admettrait *a priori*, en la faisant, que ces règles sont compatibles.

Après avoir fait cette réserve d'ordre général, l'auteur examine dans son travail comment on peut résoudre les antinomies logiques bien connues qui se sont présentées dans la théorie des ensembles : antinomies de Richard, de Burali-Forti, de Russell, antinomie relative à la puissance du « tout ». L'auteur ne pense pas que, pour éviter ces antinomies, il soit nécessaire d'écarter de l'étude des ensembles certains groupes, certaines classes d'individus ou de déclarer que certaines propositions sont incapables de définir une classe : une pareille exclusion ne saurait en effet être que provisoire, les groupes qu'on se refuse ainsi à qualifier d'ensembles devront porter un nouveau nom, et la difficulté reste entière.

Le point de vue de M. Beppo Levi consiste surtout dans la distinction des objets du discours en *idées primitives* et *idées définies* à l'aide de ces idées primitives. Une idée est *primitive* quand le sens du symbole qui représente cette idée dans le discours est indéterminé : ce qui est fixé, c'est seulement la dépendance entre idées primitives, dépendance qui est exprimée par des *postulats*. Une idée *définie* ou *dérivée* est au contraire une idée dont le symbole représentatif a un sens parfaitement déterminé quand on a fixé le sens des idées prises comme primitives. Toute proposition d'une théorie s'exprime nécessairement à l'aide des idées primitives de cette théorie et des lois de la logique; il

n'y a pas lieu de s'étonner que deux idées primitives liées par des postulats choisis sans précaution puissent conduire à des contradictions. M. Beppo Levi précise aussi la nature de l'opération qu'il appelle *procédé d'élémentation univoque*, et qui consiste à faire correspondre un individu à un ensemble : il montre qu'un pareil procédé ne peut jamais embrasser la totalité des ensembles C'est dans cette remarque et dans la distinction, expliquée plus haut, des idées en deux catégories que M. Beppo Levi trouve le moyen de résoudre les antinomies de la théorie des ensembles.

Scorza (*G.*). — Le varietà a curve sezioni ellittiche. [Les variétés à courbes sections elliptiques] (217-273).

Soit V_k^r une variété irréductible d'ordre n et de dimensions k d'un espace S_r à r dimensions. L'auteur recherche celles de ces variétés qui sont coupées suivant des courbes elliptiques par les espaces S_{r-k+1} pris dans S_r. Les travaux de MM. Castelnuovo et Enriques pour le cas de $k = 2$ ou $k = 3$ font prévoir qu'en augmentant k le nombre des cas possibles doit aller en diminuant. Le travail de l'auteur confirme cette précision. Ses résultats, combinés avec ceux des auteurs précités, donnent la propriété suivante :

Toute variété irréductible V_k^r, non conique, de S_r admettant pour courbes sections des courbes elliptiques appartient à l'un des trois types suivants :

a. Variété ∞^1 elliptique de S_{k-1}.

b. Forme cubique de S_{k+1}.

c. Variété rationnelle projection d'une variété normale non conique W_k^r d'un espace à $n+k-2$ dimensions, avec k quelconque si $r = 4$ et $k \leqq 6$ si $r \leqq 6$.

L'auteur énumère ensuite toutes les variétés normales W_k^r de l'espace S_{n+k-2}.

Nielsen (*N.*). — Sur la convergence uniforme d'une classe de séries infinies (275-282) [en français].

L'auteur démontre la proposition suivante :

Étant donnée une suite de fonctions $f_n(x)$, supposons que la série $\Sigma \,|\, f_n(x) - f_n(x+1) \,|$ soit uniformément convergente quand x varie dans un certain domaine. Supposons en outre la série Σa_n convergente. La série $\Sigma a_n f_n(x)$ est alors uniformément convergente dans le domaine.

M. Nielsen applique cette proposition à l'étude des séries de Dirichlet $\sum \frac{c_n}{\lambda_n^x}$ et il en déduit la convergence uniforme de la série dans un certain domaine intérieur au domaine de convergence.

Une seconde application concerne les séries de factorielles

$$\sum \frac{n!\, c_n}{x(x+1)\ldots(x+n)}$$

et les séries de coefficients binomiaux

$$\sum c_n \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{1.2\ldots n}$$

pour lesquelles il démontre également la convergence uniforme, et par suite l'analyticité de la somme, dans un certain domaine.

Burgatti (*P.*). — Sulla teoria dell'equazione a derivate parziali. [Sur la théorie des équations aux dérivées partielles] (283-292).

Conférence du Congrès de Parme (1907) dans laquelle M. Burgatti donne un aperçu de l'état actuel de la théorie des équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque à un nombre quelconque de variables. Il s'occupe surtout des théorèmes d'existence (Sophie Kowalewska, Riquier, Delassus), de ce qu'on doit entendre par intégrale générale (Darboux, Goursat, Borel), des méthodes d'intégration de Laplace et de M. Darboux, des méthodes de transformation (Sophus Lie, Bäcklund).

Amaldi (*U.*). — Sui principali resultati ottenuti nella teoria dei gruppi continui dopo la morte di Sophus Lie (1898-1907). [Sur les principaux résultats obtenus dans la théorie des groupes continus après la mort de Sophus Lie] (1898-1907) (293-328).

Rapport lu au Congrès de Parme (1907).

En exposant d'abord les travaux relatifs à la théorie générale des groupes continus finis, l'auteur remarque que cette partie de la théorie n'a subi aucune transformation essentielle après les travaux de Lie : la plupart des résultats nouveaux obtenus par des méthodes nouvelles pouvaient aussi être obtenus sans difficulté par les méthodes de Lie. La détermination de classes particulières de groupes continus finis a donné lieu au contraire à un très grand nombre de travaux analysés par l'auteur et relatifs aux groupes projectifs, aux groupes crémoniens, aux espaces admettant des groupes continus de mouvements, à divers groupes particuliers, enfin aux équations ou aux systèmes différentiels admettant un groupe continu fini.

Dans la théorie des groupes continus *infinis*, on a aussi déterminé certaines classes particulières de pareils groupes, que l'auteur énumère, mais en outre la théorie générale a été l'objet de travaux peu nombreux, mais fondamentaux, et c'est dans ce domaine qu'on peut noter les progrès les plus importants de la théorie des groupes continus depuis 1898. L'auteur analyse à ce sujet les travaux de M. Medolaghi, de M. Vessiot et enfin les recherches fondamentales de M. Cartan sur la structure des groupes infinis, recherches indépendantes des principes déjà établis par Lie relativement aux groupes infinis.

Sbrana (*U.*). — Sulla deformazione infinitesima delle ipersuperficie [Sur la déformation infinitésimale des hypersurfaces] (329-348).

Lorsque n est supérieur à 3, une surface V_{n-1} de l'espace euclidien à n dimen-

sions S_n n'admet pas en général de déformations infinitésimales. L'auteur étudie les surfaces spéciales pour lesquelles il existe des déformations infinitésimales. Ces surfaces doivent être les enveloppes de ∞^1 ou de ∞^2 hyperplans. Dans le premier cas, les déformations infinitésimales de la surface dépendent d'une fonction arbitraire. Dans le second cas, l'auteur montre que la recherche des surfaces répondant à la question revient à la recherche et à l'intégration de toutes les équations de Laplace à deux variables ayant leurs invariants égaux et admettant en outre un groupe de n solutions $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vérifiant la relation

$$X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2 = 1.$$

S. Lattès.

ACTA MATHEMATICA (1).

Tome 30, 1906.

Baire (R.). — Sur la représentation des fonctions discontinues. (Première Partie.)

Dans un premier Chapitre, l'auteur définit d'abord diverses classes de fonctions de la manière suivante :

1° Une fonction continue appartient à la classe 0;

2° Une fonction appartient à la classe $\alpha (\alpha > 0)$, si elle est la limite d'une suite de fonctions appartenant à des classes inférieures à α, et si elle ne fait pas partie de l'une de ces classes.

Cette classification est justifiée par le théorème suivant, que démontre l'auteur :

Une fonction bornée de classe $\leqq \alpha$ peut être considérée comme la limite d'une suite de fonctions de classes $< \alpha$, dont chacune d'elles est comprise entre les bornes de la fonction limite.

Le théorème est ensuite étendu au cas général de fonctions non bornées.

Un deuxième Chapitre est consacré à l'énoncé de propositions relatives aux ensembles de points à n dimensions, puis, dans le Chapitre III, l'auteur passe à l'étude des fonctions de classe 1. M. Baire rappelle d'abord sa définition de la semi-continuité, puis donne cette généralisation d'un théorème énoncé par lui antérieurement :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction définie sur un ensemble fermé P *soit de classe $\leqq 1$ est qu'elle soit ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait contenu dans* P.

Il en résulte que, si une fonction n'est pas de classe $\leqq 1$, il existe un ensemble parfait sur lequel elle est totalement discontinue; l'auteur montre que toute

(1) Voir *Bull. des Sc. math.*, 1917, p. 72.

fonction définie sur un ensemble fermé P est de classe $\leqq 1$, et généralise cette proposition dans le théorème suivant :

Soient $f_1, f_2, \ldots, f_h$ *des fonctions de classes* $\leqq 1$ *respectivement définies sur les ensembles fermés* $P_1, P_2, \ldots, P_h$. *Prenons une fonction* f *égale à* f_i *aux points de* P_i *qui ne font pas partie de* $P_1, P_2, \ldots, P_{i-1}$; *la fonction* f *définie sur la réunion* $M(P_1, P_2, \ldots, P_h)$ *des ensembles* $P_1, P_2, \ldots, P_h$ *est de classe* $\leqq 1$.

L'auteur considère ensuite une fonction f définie sur un ensemble quelconque P : pour qu'on puisse compléter la définition de f aux points de l'ensemble fermé P_0 (formé par la réunion de P et de son dérivé d'ordre 1) où elle n'est pas définie, de manière à obtenir une fonction de classe $\leqq 1$, *il faut et il suffit que* f *soit ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait.*

En désignant par $m[f, H]$ la borne inférieure d'une fonction f définie sur un ensemble H, par $M'[f, H]$ la borne supérieure des nombres λ tels que, H étant un ensemble parfait, l'ensemble des points de H où $f > \lambda$ soit de deuxième catégorie, par $m'[f, H]$ un nombre tel que l'ensemble des points où $f < m'[f, H]$ soit de première catégorie dans H tandis que l'ensemble des points

$$f < m'[f, H] + \varepsilon$$

soit de deuxième catégorie ($\varepsilon > 0$), et en posant

$$\omega'(f, H) = M'[f, H] - m'[f, H],$$

M. Baire démontre que : *Si* f *satisfait à l'équation*

$$m[\omega'(f, H, A), H, A] = 0,$$

il y a un ensemble de première catégorie H *tel qu'en tout point de* H — H, f *est continue par rapport à* H — H.

L'auteur exprime la condition $m[\omega'(f, H, A), H, A] = 0$, où A est un point quelconque de H, par la notation $m[\omega'(f)] = 0$; le théorème précédent se conserve à la limite, c'est-à-dire que, *si sur un ensemble parfait* P, *une suite de fonctions* $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ *a une limite* f, *et si chacune des fonctions* f_i *satisfait à la condition* $m[\omega'(f_i)] = 0$, *il en est de même de* f.

Dans le Chapitre V, M. Baire commence l'étude des fonctions de classe 2 et 3 en établissant d'abord le théorème suivant :

$P_1, P_2, \ldots, P_i, \ldots$ *désignant une infinité dénombrable d'ensembles fermés continus dans l'ensemble fermé* P_0, f_i *étant une fonction de classe* $\leqq 2$ *définie sur* P_i, *la fonction* f *qui est égale à* f_1 *sur* P_1, *à* f_i ($i = 2, 3, \ldots$) *aux points de* P_i *ne faisant partie d'aucun des ensembles* $P_1, P_2, \ldots, P_{i-1}$, *et enfin à* f_0 *aux points de* P_0 *ne faisant partie d'aucun des ensembles* $P_1, P_2, \ldots$, *est de classe* $\leqq 2$ *sur* P_0.

Enfin, après avoir étudié les ensembles de points représentables par des fractions continues assujetties à certaines conditions, l'auteur démontre l'existence effective des fonctions de classes 2 et 3.

Bisconcini (*G.*). — Sur le problème des trois corps. Trajectoires

le long desquelles deux au moins des trois corps se choquent. Conditions qui entraînent un choc.

L'auteur fait d'abord, sur les équations du mouvement relatif de deux des trois corps, P_1, P_2, par rapport au corps P_0, une transformation destinée à mettre en évidence les composantes (en coordonnées polaires) de la vitesse relative du point P_1. En supposant alors que $\lim\limits_{t=t_1} P_0P_1 = 0$, M. Bisconcini montre que les composantes de la vitesse absolue de P_2 restent finies; en appelant ρ_1, θ_1, φ_1 les coordonnées polaires relatives de P_1, et R_1, Θ_1, Φ_1 les variables conjuguées obtenues en prolongeant la transformation ponctuelle par une transformation de contact ordinaire, l'auteur montre de plus que

1° *Pour* $\lim\limits_{t=t_1} P_0P_1 = 0$, *les fonctions*

$$\sqrt{\rho_1}\,R_1, \qquad \frac{\Theta_1}{\sqrt{\rho_1}}, \qquad \frac{\Phi_1}{\sqrt{\rho_1}\sin^2\theta_1}$$

ne peuvent croître indéfiniment;

2° *La fonction* $R_1 = \dfrac{d\rho_1}{dt}$ *ne peut s'annuler dans le voisinage de* t_1;

3° *Dans le voisinage de* t_1, *la limite inférieure des valeurs de* $\rho_1 R_1^2$ *ne peut pas être zéro.*

Par de nouveaux changements de variables, l'auteur donne aux équations du mouvement relatif une forme analogue à celle qui, dans le cas du problème restreint, forme la base des travaux de M. Levi-Cività. La variable indépendante qui figure dans ce système est $r = \sqrt{\rho_1}$; à l'hypothèse du choc $\left(\lim\limits_{t=t_1} r = 0\right)$, l'auteur adjoint alors cette nouvelle hypothèse, purement intuitive, que la vitesse angulaire $\dfrac{d\theta_1}{dt}$ reste finie au moment du choc; cette hypothèse permet de démontrer les théorèmes suivants :

1° *Le système d'équations différentielles* (s) *dont dépend le mouvement, admet, dans le domaine de* $r = 0$, $\infty^{[illegible]}$ *intégrales holomorphes, où* $\dfrac{d\theta_1}{dt}$ *et* $\dfrac{d\varphi_1}{dt}$ [*qui figurent parmi les nouvelles fonctions inconnues du système* (s)], *se réduisent à* 0 *pour* $r = 0$, *tandis que les autres inconnues prennent des valeurs constantes arbitraires.*

2° *Le système* (s) *n'admet pas d'autres intégrales pour lesquelles* $\dfrac{d\theta_1}{dt}$ *et* $\dfrac{d\varphi_1}{dt}$ *soient nuls pour* $r = 0$.

Il en résulte que, dans le domaine de $r = 0$, le système (s) ne peut admettre que des solutions holomorphes; M. Bisconcini montre qu'on peut établir une correspondance univoque entre les trajectoires de choc et les intégrales de (s) holomorphes dans le voisinage de $r = 0$. Dans un dernier paragraphe, M. Bisconcini envisage les conditions de choc, obtenues en éliminant les constantes arbitraires entre les intégrales holomorphes au voisinage de $r = 0$; ces conditions, comme l'avait prévu M. Painlevé, sont au nombre de deux, et l'auteur en donne des développements approchés selon les puissances de r.

Meyer (*W.-F.*). — Eine auf unendliche Produkte sich beziehende Fehlerabschätzungsregel. (Sur une formule de reste relative aux produits infinis.)

L'auteur démontre d'abord la proposition auxiliaire suivante :

g étant une quantité réelle, positive, différente de 1, *si*

$$|\mathrm{L}g| < \gamma \quad \text{et} \quad 0 < \gamma < 2,$$

on a

$$|g - 1| < e^{\gamma} - 1 < \frac{\gamma}{1 - \frac{\gamma}{2}}.$$

Les v_i étant supposés réels, l'auteur considère ensuite le produit infini absolument convergent

$$\Pi = (1 + v_0)(1 + v_1)(1 + v_2)\ldots(1 + v_n)\ldots,$$

dans lequel on suppose $|v_n| < 1$ à partir de $n = \nu$, et appelle *produits restants* les quantités du type

$$\mathrm{P}_{\nu,p} = (1 + v_\nu)(1 + v_{\nu+1})\ldots(1 + v_{\nu+p-1}).$$

En appliquant la proposition énoncée au début, il obtient

$$|\mathrm{P}_{\nu,p} - 1| < \frac{\frac{1}{1-u}\mathrm{R}_\nu}{1 - \frac{1}{2}\frac{1}{(1-u)}\mathrm{R}_\nu},$$

R_ν désignant la limite supérieure en dessous de laquelle restent toutes les expressions

$$|v_\nu| + |v_{\nu+1}| + \ldots + |v_{\nu+p-1}|,$$

quelle que soit la valeur de p, et u la limite en-dessous de laquelle, à partir de $n = \nu$, restent les quantités $|v_n|$. M. Meyer obtient ensuite une expression de forme un peu plus compliquée, dans le cas où, la série des $|v_i|$ n'étant plus convergente, celle des v_i^2 converge néanmoins encore, puis donne d'autres limites des produits $\mathrm{P}_{\nu,p}$, pour le cas où les v sont complexes.

Bjerknes (*V.*). — Recherches sur les champs de force hydrodynamiques.

Ce Mémoire contient une généralisation de l'analogie hydrodynamique des phénomènes électriques et magnétiques découverte par C.-A. Bjerknes (sphères pulsantes dans un fluide indéfini). L'auteur, au lieu de considérer le champ hydrodynamique produit par des solides dans un fluide, envisage le mouvement de corps fluides dans un fluide indéfini. Il décompose en deux la vitesse d'un point matériel, et appelle respectivement les deux composantes *vitesse d'énergie* et *vitesse induite*, puis forme les équations de ces deux mouvements, dont la superposition constitue le mouvement vrai du système fluide, satisfaisant aux

équations du mouvement des fluides parfaits. Le *mouvement induit* s'étend en général à tout le fluide et est de nature hydrodynamique proprement dite. Le *mouvement d'énergie* peut n'exister que dans les parties limitées du fluide; ses équations contiennent, outre les composantes de la force extérieure, celles d'une autre force fictive, dite *force d'énergie hydrodynamique*.

En désignant par $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ les composantes de la quantité de mouvement par unité de volume, dans le mouvement induit, l'auteur démontre que le vecteur

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

est indépendant du temps; son intégrale de surface, le *tourbillon dynamique*, est aussi indépendante du temps. Ensuite, M. V. Bjerknes établit que la vitesse d'énergie n'existe jamais dans une partie du fluide qui soit homogène, incompressible, non soumise aux forces extérieures, si à l'origine des temps la vitesse d'énergie était nulle dans cette portion du fluide, et le tourbillon dynamique du mouvement induit, nul dans tout l'espace.

L'auteur considère alors un système fluide où certaines parties limitées (corps) et en nombre fini possèdent seules la vitesse d'énergie, tandis que le fluide illimité restant, ou *fluide fondamental*, ne peut acquérir à aucun instant de vitesse d'énergie.

Les théorèmes précédents fournissent les conditions que doivent remplir les diverses portions du fluide pour qu'il en soit ainsi. M. Bjerknes développe alors une analogie géométrique entre le mouvement de ce système fluide et le champ magnétique d'un système de corps possédant une polarisation magnétique intrinsèque, parcourus par des courants électriques permanents, et possédant une perméabilité différente de celle du milieu extérieur.

De même, M. Bjerknes compare ces équations à celles régissant le champ électrique d'un système de corps, puis montre que l'analogie se restreint exclusivement au cas des champs stationnaires; elle ne peut rendre compte des phénomènes électriques ou magnétiques variables.

L'auteur envisage ensuite les forces agissant sur les corps fluides dans le champ hydrodynamique, et fait ressortir leur analogie avec les forces pondéromotrices qui agissent sur les corps dans les champs électromagnétiques. Les actions à distance (apparentes) dans le mouvement hydrodynamique et les mouvements vibratoires du système fluide, sont étudiés dans la fin du Mémoire.

Helge von Koch. — Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes.

L'auteur s'est proposé de définir *géométriquement* une courbe continue n'admettant de tangente en aucun point. L'auteur désigne par Ω l'opération qui consiste à remplacer un segment de droite AB par un contour polygonal défini de la manière suivante : On partage AB en trois segments égaux, on construit un triangle équilatéral sur le segment médian, à gauche de AB (parcouru dans le sens AB), puis on remplace AB par le contour formé du premier tiers de AB, des deux côtés du triangle équilatéral ne coïncidant pas avec le deuxième tiers de AB et du troisième segment sur AB. En appliquant au segment AB successivement une infinité de fois cette opération Ω, l'auteur démontre qu'à la limite on obtient un arc de courbe *continu*, *simple* (ou de Jordan) et n'admet-

tant de tangente en aucun point. Ensuite, M. Helge von Koch démontre que la longueur de la courbe comprise entre deux de ses points quelconques est infinie : cela résulte de ce qu'en appliquant l'opération Ω à une ligne polygonale quelconque, sa longueur se trouve multipliée par $\frac{4}{3}$.

Par contre, l'aire comprise entre AB et la courbe a évidemment une valeur finie; l'auteur l'obtient en faisant la somme des aires comprises entre deux des contours polygonaux consécutifs.

Ensuite, l'auteur exprime les coordonnées d'un point de cette courbe en fonction uniforme d'un paramètre, puis, au moyen d'une transformation simple, la remplace par une courbe où l'ordonnée est une fonction uniforme de l'abscisse.

En dernier lieu, M. Helge von Koch généralise les résultats précédents, en partageant AB en trois segments qui ne sont plus égaux, mais proportionnels à trois grandeurs quelconques a, b, c, et en suivant pour le reste la même méthode que précédemment.

Jensen (*J.-L.-W.-V.*). — Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes.

L'auteur appelle *convexe*, dans un intervalle, toute fonction satisfaisant à l'inégalité

$$(1) \qquad \varphi(x) + \varphi(y) \geq 2\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

(l'inégalité ne se réduisant pas constamment à l'égalité). Si la fonction satisfait à une inégalité analogue, mais dont le sens est renversé, elle est dite *concave*.

La proposition est ensuite généralisée de la manière suivante : n désignant un entier positif, et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n valeurs situées dans l'intervalle où la fonction est convexe, on peut remplacer (1) par l'inégalité

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\varphi(x_\nu).$$

M. Jensen démontre que toute fonction qui est à la fois *convexe* et *continue* vérifie l'inégalité

$$\varphi\left[\frac{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu}\right] \leq \frac{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \varphi(x_\nu)}{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu},$$

les a_ν étant des nombres positifs quelconques, et donne diverses applications de cette dernière inégalité. En particulier, si $a_1, \ldots, a_n$ sont des constantes positives dont la somme est 1, et si

$$\sum_{\nu} b_{\nu_1}, \quad \sum_{\nu} b_{\nu_2}, \quad \ldots, \quad \sum_{\nu} b_{\nu_n}$$

sont des séries convergentes à termes positifs, la série

$$\sum_{\nu} b_{\nu_1}^{\alpha_1} \cdot b_{\nu_2}^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot b_{\nu_n}^{\alpha_n}$$

est aussi convergente.

D'autre part, $f(x)$ et $a(x)$ étant des fonctions intégrables de 0 à 1, et $a(x)$ étant une fonction positive, on a, pour toute fonction *convexe* et *continue* dans l'intervalle formé par les limites supérieures et inférieures de $f(x)$ quand x varie de 0 à 1, l'inégalité

$$\varphi\left[\frac{\int_0^1 a(x) f(x)\,dx}{\int_0^1 a(x)\,dx}\right] \leqq \frac{\int_0^1 a(x)\varphi[f(x)]\,dx}{\int_0^1 a(x)\,dx}.$$

M. Jensen démontre encore les théorèmes suivants :

1° *Une fonction convexe qui a une limite supérieure finie dans un intervalle est continue dans cet intervalle;*

2° *Une fonction convexe qui a une limite supérieure finie a une fonction dérivée à droite $\varphi'_{+}(x)$ et une à gauche $\varphi'_{-}(x)$ dans cet intervalle; la différence*

$$\varphi'_{+}(x) - \varphi'_{-}(x)$$

est toujours positive ou nulle.

Landau (*E.*). — Ueber einen Satz von Herrn Phragmén. (Sur un théorème de M. Phragmén.)

En désignant par $l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots$ une suite de grandeurs positives croissant avec n au delà de toute limite, par $c_1, \ldots, c_n, \ldots$ une suite de grandeurs quelconques, et enfin en supposant que la fonction

$$f(t) = \sum c_n,$$

où la sommation s'étend à toutes les valeurs de n pour lesquelles $l_n \leqq t$ se laisse mettre sous la forme

$$f(t) = ct + t^{\gamma}\Psi(t) \qquad (0 < \gamma < 1),$$

où c et γ sont des constantes et Ψ une fonction conservant une valeur finie pour toute valeur de t, M. Phragmén, étendant une proposition de Dirichlet, a démontré que la différence

$$\varphi(\rho) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{l_n^{1+\rho}} - \frac{c}{\rho}$$

est développable en une série qui converge au moins dans l'intervalle

$$0 < \rho < \frac{1}{2}(1-\gamma).$$

Dans le présent travail, M. Landau démontre que cet intervalle peut être élargi ; la série converge tant que

$$0 < \rho < (1-\gamma).$$

$\zeta(\rho)$ est alors régulière dans tout le demi-plan $R(\rho) > (\gamma - 1)$, excepté au point $\rho = 0$, si $c \neq 0$, et l'on peut en suivre le prolongement le long de la droite $R(\rho) = 0$ [$R(\rho)$ désigne la partie réelle de ρ].

Lerch (*M.*). — Essais sur le calcul du nombre des classes de formes quadratiques binaires aux coefficients entiers. (*Suite.*)

Ce travail est la fin d'un Mémoire commencé dans le Tome 29 ; l'auteur expose, dans le Chapitre III, les résultats de nature algébrique qui lient la théorie de l'équation binome et le calcul du nombre des classes de formes quadratiques binaires. Il retrouve ainsi, par une autre méthode, un grand nombre de résultats déjà obtenus par J. Liouville, O. Schemmel, A. Berger et H. Weber, puis ceux obtenus par M. Hurvitz dans le Tome 19 des *Acta mathematica*. La longueur des calculs développés dans ce Chapitre ne permet pas d'en donner une analyse succincte ; dans le Chapitre IV, l'auteur considère une formule qui est un cas particulier d'une formule de transformation qui a été donnée par Kronecker, et qui s'écrit

$$\left\{\begin{aligned}&\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(\xi+m)}\,\frac{e^{2\eta_0\pi i+\frac{2\pi i}{w}(\xi_0-\eta_0 w)(\xi+m)}}{e^{\frac{2\pi i}{w}(\xi+m)+2\eta_0\pi i}-1}\\ &+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(\eta_0+n)}\,\frac{e^{\frac{2\pi i}{n}(\xi+(\eta_0 w-\xi_0))(\eta_0+n)}}{e^{\frac{2 w\pi i}{}(\eta_0+n)+2\xi\pi i}-1}\end{aligned}\right\} = \frac{2\pi i\, e^{\ldots}}{(e^{\ldots}-1)(e^{\ldots}-1)},$$

où

$$0 \leq \xi_0 < 1, \qquad 0 \leq \eta_0 < 1,$$

et en donne une nouvelle démonstration fondée sur la considération de l'intégrale

$$\int \frac{e^{2\pi i x(u_1 v_1 + u_2 v_2)}\,dx}{(e^{2\pi i(v_1 x - w_1)}-1)(e^{2\pi i(v_2 x - w_2)}-1)(x+a)}$$

prise le long d'un contour fermé ne passant par aucun des pôles de la fonction sous le signe $\int$, et où u_1, u_2 sont deux quantités réelles comprises entre 0 et 1, v_1, v_2 deux quantités complexes dont le rapport n'est pas réel. Dans la dernière Partie du Mémoire, l'auteur transforme cette formule et en tire diverses formules relatives au calcul du nombre des classes, parmi lesquelles la suivante :

$$\mathrm{Cl}(D)\log E(D) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\log\frac{1+e^{-\frac{n\pi}{\nu}}}{1-e^{-\frac{n\pi}{\nu}}} + 2\sqrt{D}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n}\,\frac{1}{e^{\frac{2n\nu\pi}{D}}-1}$$

(les notations ayant la même signification que celles employées dans la première Partie du Mémoire, t. 29).

Richard (J.). — Lettre à M. le rédacteur de la *Revue générale des Sciences*.

L'auteur, à propos des contradictions que présente la théorie des ensembles, montre une semblable contradiction dans la théorie du continu, et prouve qu'en réalité cette contradiction n'est qu'apparente.

Ta Bromwich (T. J.). — On the roots of the characteristic equation of a linear substitution. (Sur les racines de l'équation caractéristique d'une substitution linéaire.)

L'auteur considère l'équation en λ :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

et cherche de nouvelles limites pour les parties imaginaires et les parties réelles des racines. Les limites obtenues pour les parties réelles sont les mêmes que celles données par Bendixson et Hirsch, tandis que celles obtenues pour les parties imaginaires sont plus resserrées que celles obtenues par Hirsch.

Levi-Cività (T.). — Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps.

M. Levi-Cività considère le mouvement d'un point P attiré par deux centres S et J tournant uniformément autour de leur centre de gravité commun et étudie les trajectoires de P dans une région limitée D entourant le point S. Pour cela, l'auteur transforme le système canonique dont dépend le mouvement du système en un autre système qui se ramène facilement à un système *régulier* au point S. L'auteur cherche ensuite la forme d'une intégrale complète du système transformé, puis démontre que les intégrales canoniques qu'on en pourrait déduire par la méthode de Jacobi sont effectivement valables au point S. Toutes les trajectoires possibles à l'intérieur de D peuvent se mettre sous forme holomorphe; de plus, tout arc ne passant pas exactement en S en reste toujours (tant qu'il reste dans D) à une distance finie. La distance minimum de S à un arc de trajectoire A peut s'exprimer en fonction, uniforme dans D, d'un quelconque des états de mouvement sur l'arc A. Si cette distance n'est pas nulle, le mouvement se poursuit régulièrement dans D. Mais l'auteur fait remarquer que rien ne prouve que le corps P, sortant de D par un arc A ne rencontrant pas S, n'y puisse rentrer par un autre arc passant par le point S, ou que cela ne puisse avoir lieu après un certain nombre de sorties du point P, du domaine D, et de rentrées dans ce domaine.

L'auteur termine en montrant qu'on peut trouver une intégrale autre que celle des forces vives, fonction uniforme des coordonnées, mais *dans le domaine* D seulement : il n'y a donc pas contradiction avec le théorème de Poincaré sur la non-existence d'intégrales uniformes *dans tout l'espace*.

König (*J.*). — Sur les fondements de la théorie des ensembles et le problème du continu.

L'auteur démontre que le continu ne peut pas être bien ordonné, en partant implicitement de cette hypothèse, qu'on doit définir un être mathématique, pour en démontrer l'existence, et en s'appuyant sur les axiomes suivants :

a. Notre conscience est le théâtre de processus constituant la pensée scientifique, et, parmi ces processus, il en est qui correspondent univoquement aux processus par lesquels on forme une suite de symboles qui déterminent univoquement les éléments du continu et les distinguent les uns des autres;

b. Les concepts de suite arbitraire (de type ω) de nombres entiers positifs *et celui de* l'ensemble de toutes ces suites *sont exempts de contradictions logiques;*

c. Ou un élément quelconque du continu a une définition finie, ou il a une définition qui n'est pas finie.

L'hypothèse, d'après laquelle on admettrait que le continu est bien ordonné, conduirait alors à admettre que, dans une suite de nombres ordinaux, il y en a un qui est le premier de la suite, et dont la définition ne peut être finie, ce qui est impossible.

Fatou (*P.*). — Séries trigonométriques et séries de Taylor.

Ce Mémoire est divisé en deux Parties; dans la première Partie, l'auteur montre que l'intégrale de Poisson

$$F(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - u) + r^2} f(u)\, du$$

définit toujours une fonction harmonique dans la circonférence de rayon 1, quand $f(u)$ est une fonction *sommable* au sens de M. Lebesgue, mais que quand le point (r, θ) se rapproche d'un point de la circonférence, la fonction $F(r, \theta)$ ne tend pas nécessairement vers une valeur déterminée. M. Fatou arrive ensuite à la conclusion suivante :

L'intégrale de Poisson, correspondant à une fonction périodique, bornée et sommable, représente une fonction harmonique qui, en tous les points de la circonférence (sauf peut-être aux points d'un ensemble de mesure nulle), prend une valeur déterminée lorsqu'on tend vers l'un de ces points suivant une courbe non tangente à la circonférence.

L'auteur démontre également l'existence de fonctions analytiques uniformes possédant, sur une coupure, une infinité non dénombrable de zéros qui peut être dense dans tout intervalle.

M. Fatou étudie, dans la deuxième Partie du Mémoire, la convergence des séries trigonométriques données par la loi de leurs coefficients, et parvient au théorème suivant :

Si na_n et nb_n tendent vers o avec $\frac{1}{n}$, l'ensemble des points de divergence

de la série

$$\sum_1^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

est de mesure nulle?

Envisageant les séries de Taylor, l'auteur démontre les résultats suivants :

1° *Si une série de Taylor (ou la partie réelle d'une série de Taylor) est convergente en tous les points d'un arc* S *du cercle de convergence, il existe, dans tout intervalle de* S, *des points où la série prend une valeur bien déterminée suivant tous les chemins qui y aboutissent;*

2° *Si la série de Taylor*

$$\varphi(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z_n + \ldots$$

a un rayon de convergence égal à 1, *et si* c_n *tend vers* 0 *avec* $\frac{1}{n}$, *la série est convergente en tout point régulier du cercle de convergence.*

Dans une Note qui termine ce travail, M. Fatou donne une nouvelle démonstration du théorème de Cantor sur l'impossibilité de la convergence en tout point d'une série trigonométrique dont les coefficients ne tendent pas vers 0, puis démontre que, si la série

$$\sum_1^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

est absolument convergente en tous les points d'un intervalle, les séries

$$\sum_1^{\infty} a_n \quad \text{et} \quad \sum_1^{\infty} b_n$$

sont aussi absolument convergentes.

DROUIN.



COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, publiés par MM. les SECRÉTAIRES PERPÉTUELS.

Tome 162 (1er semestre 1916).

Humbert (*G.*) (A 2815, 2830). — Sur les fractions continues et les formes quadratiques binaires indéfinies. (23-26).

Appell (*P.*) (B 2000). — Sur les liaisons cachées et les forces gyroscopiques apparentes dans les systèmes non holonomes. (27-29).

Sparre (*M. de*) (B 1650). — Sur la trajectoire des projectiles lancés avec une grande vitesse initiale sous un angle de projection voisin de 45°. (33-36).

Humbert (*P.*) (B 2470). — Simplification d'une formule de M. Liapounoff. (41-43).

Darboux (*G.*) (A 7210). — Sur une extension des théorèmes de Poncelet relatifs aux polygones inscrits ou circonscrits à des coniques. (57-61).

Humbert (*G.*) (A 2815, 2830). — Sur les réduites d'Hermite. (67-73).

Darboux (*G.*) (A 7210). — Sur une extension des théorèmes de Poncelet relatifs à des polygones inscrits ou circonscrits à des coniques. (101-105).

Plâtrier (*Ch.*) (A 4470). — Sur des solutions de certaines équations intégrales linéaires de troisième espèce considérées comme limites d'équations de deuxième espèce. (118-120).

Angelesco (A 3260, 4420). — Sur une classe de polynomes à une variable. (121-123).

Priwaloff (*J.*) (A 5610, 0430). — Sur la convergence des séries trigonométriques conjuguées. (123-126).

Delaunay (*B.*) (A 2800). — La solution générale de l'équation $X^3\rho + Y^3 = 1$. (150-151).

Julia (*G.*) (A 2830). — Sur les formes quadratiques binaires positives. (151-154).

Fréchet (*M.*) (A 0430, 3210). — L'écart de deux fonctions quelconques. (154-155).

Liljeström (*A.*) (B 0410). — Sur la différence entre le centre de gravité et le centre d'inertie. (155-157).

Mouret (*G.*) (B 2810). — Sur le débit des déversoirs à mince paroi lorsque la nappe est noyée en dessous et le pied de la nappe recouvert par le ressaut. (157-160).

Esclangon (*E.*) (B 1650, 2860). — Sur les trajectoires aériennes des projectiles. (160-163).

Dejust (*J.*) (B 2820). — Sur la détermination de la surface rationnelle des aubes d'une turbine hydraulique. (163-165).

Mesnager (B 3250). — Sur le problème de la plaque mince rectangulaire encastrée. (165-168).

Brodetsky (*S.*) (A 4850). — Sur une analogie entre les équations linéaires différentielles et les équations algébriques. (191-194).

Fontené (*G.*) (A 7210). — Sur une extension du théorème de Poncelet relatif à des polygones inscrits ou circonscrits à des coniques. (213-214).

Darboux (*G.*) (A 7210). — Remarques sur une Note de M. Fontené. (214-217).

Stoïlow (*S.*) (A 4840). — Sur l'intégration des équations linéaires par les équations d'approximations successives. (217-220).

Dejust (*J.*) (B 2820). — Sur le tracé des aubes d'une turbine hydraulique dans laquelle la pression décroît linéairement le long des trajectoires relatives des filets liquides. (220-222).

Gronwall (*T.-H.*) (A 3620). — Sur la déformation dans la représentation conforme. (249-252).

Khintchine (*A.*) (A 3210, 3260). — Sur une extension de l'intégrale de M. Denjoy. (287-291).

Appell (*P.*) (A 7610). — Sur certains polygones dont les sommets décrivent des courbes algébriques et dont les côtés enveloppent des courbes algébriques. (306-308).

Guichard (*C.*) (A 8450). — Sur les réseaux plans qui peuvent, d'une infinité de manières, être considérés comme la projection orthogonale des lignes de courbure d'une surface. (308-312).

Goursat (*E.*) (A 5230, 5240). — Sur la classe de certaines expressions différentielles. (313-315).

Gronwall (*T.-H.*) (A 3620). — Sur la déformation dans la représentation conforme sous des conditions restrictives. (316-318).

Jekhowsky (*B.*) (A 4420). — Les fonctions de Bessel de plusieurs variables exprimées par des fonctions de Bessel d'une variable. (318-319).

Julia (*G.*) (A 2840). — Sur la réduction des formes quadratiques positives. (320-322).

Alexandroff (*P.*) (A 0430). — Sur la puissance des ensembles mesurables B. (323-325).

Lebon (*E.*) (A 2810). — Sur une nouvelle Table des diviseurs d'un nombre. (346-348).

Rabut (*Ch.*) (A 8020). — Nouveaux invariants inversifs. (348-351).

Denjoy (*A.*) (A 0430, 3210). — Sur la dérivation et son calcul inverse. (377-380).

Young (*M*me *G.-C.*) (A 0430, 3210). — Sur les nombres dérivés d'une fonction. (380-382).

Le Pen (*M.*) et *Villey* (*J.*) (B 0170). — Sur la mesure de la puissance des moteurs au banc-balance. (383-385).

Gronwall (*T.-H.*) (A 4460). — Sur une équation fonctionnelle dans la théorie cinétique des gaz. (415-418).

Riquier (A 4830). — Sur les systèmes partiels du premier ordre auxquels s'applique la méthode d'intégration de Jacobi, et sur le prolongement analytique de leurs intégrales. (418-421).

Ford (*Lester R.*) (A 2800). — Sur l'approximation des irrationnelles complexes. (459-461).

Buhl (*A.*) (A 4060, 8460). — Sur les applications géométriques du théorème d'Abel et de la formule de Stokes. (461-463).

Hardy (*G.-H.*) (A 3220). — Sur la sommation des séries de Dirichlet. (463-466).

Sparre (*M. de*) (B 1650, 2860). — Sur l'influence des conditions atmosphériques sur les projeetiles à très grande portée. (496-498).

Julia (*G.*) (A 2840). — Sur la réduction des formes quadratiques quaternaires positives. (498-501).

Guichard (*C.*) (A 8830). — Sur les réseaux plans qui sont à la fois projection orthogonale d'un réseau O et projection orthogonale d'un réseau G. (548-551).

Cerf (A 4840). — Sur les transformations des équations aux dérivées partielles. (552-554).

Levi-Civita (*T.*) (B 1610). — Sur la régularisation du problème des trois corps. (625-628).

Sierpinski (*W.*) (A 0430). — Sur une courbe cantorienne qui contient une image biunivoque et continue de toute courbe donnée. (629-632).

Baticle (*E.*) (B 3660). — Calcul de la poussée exercée sur un mur de soutènement à parement intérieur plan par un massif pulvérulent à surface libre plane. (632-634).

Kogbetliantz (*E.*) (A 3220, 5610). — Sur les séries de Sturm-Liouville simplement sommables. (673-676).

Bilimovitch (*A.*) (B 2000). — Sur les trajectoires d'un système non holonome. (681-683).

Humbert (*G.*) (A 1210, 2830). — Sur certains groupes à cercle principal liés aux formes quadratiques d'Hermite. (697-702).

Sierpinski (*W.*) (A 0430). — Théorie des ensembles; sur une propriété générale des ensembles de points. (716-717).

Guichard (*C.*) (A 8455). — Sur les congruences C dont l'une des surfaces focales est une quadrique (741-746).

Kampé de Fériet (*J.*) (A 5620). — Sur une équation intégrale de seconde espèce admettant les fonctions hypersphériques comme solutions fondamentales. (747-750).

Tome 163 (2e semestre 1916).

Garnier (*R.*) (A 4820). — Étude de l'intégrale générale de l'équation (VI) de M. Painlevé dans le voisinage de ses singularités transcendantes. (8-10).

Akimoff (*M.*) (A 4420). — Transcendantes de Fourier-Bessel à plusieurs variables. (26-29).

Petrovitch (*M.*) (A 3240, 3210). — Relations d'inégalité entre les moyennes arithmétiques et géométriques. (81-84).

Mesnager (B 3250). — Sens des déplacements des points d'une plaque rectangulaire. (84-87).

Camichel (*C.*) (B 2800). — Sur les coups de bélier; examen de l'état d'une conduite. (150-152).

Appell (*P.*) (A 2815, 3630). — Sur les développements de la racine carrée d'un polynome en fractions continues. (183-186).

Petrovitch (*M.*) (A 4830). — Théorème de la moyenne relatif aux intégrales d'une équation importante aux dérivées partielles. (190-192).

Giraud (*G.*) (A 1230, 4070). — Sur les formes quadratiques et les fonctions hyperabéliennes. (193-195).

Liljeström (A 4060). — Sur un théorème géométrique utile pour l'étude de l'inversion directe des intégrales abéliennes. (195-197).

Garnier (*R.*) (A 4820). — Sur une méthode nouvelle pour résoudre le problème de Riemann. (198-200).

Birkeland (*R.*) (B 2810). — Développements sur le mouvement d'un fluide parallèle à un plan fixe. (200-202).

Camichel (*C.*) (B 2800). — Amplitude des harmoniques impairs dans les coups de bélier. (224-226).

Lebon (*E.*) (A 2810). — Sur une nouvelle Table de diviseurs des nombres. (259-261).

Godeaux (*L.*) (A 7640). — Sur les involutions appartenant aux surfaces algébriques. (261-263).

Eydoux (*D.*) (B 2800). — Sur les modifications des coups de bélier dans les conduites d'épaisseur et de diamètre variables. (265-269).

Picard (*E.*) (A 1210, 4440, 2840). — Sur certains sous-groupes des groupes hyperfuchsiens correspondant aux formes quadratiques ternaires à indéterminées conjuguées. (284-289).

Picard (*E.*) (A 1210, 3640). — Sur des fonctions de deux variables complexes restant invariables par les substitutions d'un groupe discontinu. (317-319).

Eydoux (*D.*) (B 2810). — Sur la transmission des coups de bélier dans les conduites présentant des bifurcations. Application aux cheminées d'équilibre. (346-349).

Humbert (*G.*) (A 2890). — Sur quelques fonctions numériques remarquables. (412-418).

Young (*W.-H.*) (A 5610). — Les séries trigonométriques et les moyennes de Cesaro. (427-430).

Pompeiu (*D.*) (A 0430, 3220). — Sur les séries à termes positifs et sur les fonctions dérivées. (430-432).

Menchoff (*D.*) (A 3610). — Sur l'unicité du développement trigonométrique. (433-436).

Vallée Poussin (*C. de la*) (A 3610). — Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. (471-473).

Jordan (*C.*) (A 0010 B 0010). — Notice nécrologique sur M. Léauté. (501-502).

Young (*W.-H.*) et Mme *Grace Chisholm Young* (A 0430). — Sur la frontière normale d'une région ou d'un ensemble. (509-511).

Kœnigs (*G.*) (A 8420). — Sur un mouvement plan particulier à deux paramètres. (511-514).

Guichard (*C.*) (A 8860, 8870). — Sur les systèmes triples orthogonaux, tels qu'un système de courbes de Lamé soit formé de lignes sphériques, le lieu des centres des sphères qui les contiennent étant une sphère ou un paraboloïde de révolution. (548-552).

Hartmann (*L.*) (B 1620, 3210). — Variation systématique de la valeur de la force vive dans le choc élastique des corps. (559-562).

Guillery (*R.*) (B 0420). — Système nouveau de transmission par joint à billes. (562-564).

Borel (*E.*) (A 0420). — Sur l'approximation des nombres incommensurables pour des nombres rationnels. (596-598).

Julia (*G.*) (A 1210, 2830). — Sur quelques propriétés du groupe fuchsien formé par des substitutions modulaires qui n'altèrent pas une forme d'Hermite indéfinie. (599-600).

Kogbetliantz (*E.*) (A 4420). — Sur les séries de fonctions ultrasphériques. (601-603).

Kœnigs (*G.*) (A 8420). — Sur les propriétés du second ordre des mouvements plans à deux paramètres. (603-606).

Vergne (*H.*) (B 2100). — Sur une méthode de calcul des perturbations d'un mouvement connu. (606-608).

Picard (*E.*) (A 8040). — Sur les intégrales de différentielles totales relatives aux surfaces algébriques régulières. (637-642).

Guichard (*C.*) (A 8860, 8870). — Sur les réseaux K d'une quadrique de révolution. (649-653).

Kœnigs (*G.*) (A 8420). — Sur la forme géométrique générale des propriétés du second ordre des mouvements plans à deux paramètres. (658-660).

Mesnager (B 3250). — Formule de la plaque mince encastrée sur un contour rectangulaire plan. (661-663).

Sierpinski (*W.*) (A 0430). — Sur le rôle de l'axiome de M. Zermelo dans l'Analyse moderne. (688-691).

Julia (*G.*) (A 1210, 2830). — Sur les formes de Dirichlet et sur les substitutions loxodromiques du groupe de Picard. (691-694).

Brillouin (*M.*) (B 2400). — Solution fondamentale (sources) dans un liquide pesant à surface libre. (694-696).

Baticle (B 3280). — Sur le calcul des voûtes épaisses soumises à une pression uniforme. (696-700).

Globa-Mikhaïlenko (*B.*) (B 2470). — Sur une nouvelle figure d'équilibre d'une masse fluide en rotation. (700-703).

Mesnager (B 3250). — Formules de la plaque mince encastrée sur un contour rectangulaire plan. (748-750).

Sparre (*de*) (B 2810). — Au sujet des coups de bélier dans une conduite forcée, formée de deux sections de diamètres différents. (959-963).

Mangeot (*S.*) (A 8440, 8450). — Sur une construction de la sphère osculatrice et du rayon de torsion en un point de la courbe d'intersection de deux surfaces données. (973-975).

Young (*W.-H.*) (A 5610). — Sur les conditions de convergence des séries de Fourier. (975-978).

Baticle (A 4470, B 3280). — Sur l'application de la théorie des équations intégrales à certains calculs relatifs à la stabilité des constructions (problème à une dimension). (978-980).

C. Guichard.

ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA [1].

Serie III, Tomo XVI, 1909.

Wright (*J.-E.*).— Corresponding dynamical Systems. [Systèmes dynamiques correspondants.] (1-26).

Soient deux systèmes dynamiques holonomes dont les mouvements sont donnés par les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_r} = X_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

pour le premier système et

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial x'_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_r} = Y_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

pour le second système. On a posé

$$\dot{x}_r = \frac{dx_r}{dt}, \qquad x'_r = \frac{dx_r}{dt_1}.$$

Il peut se faire qu'on puisse choisir t_1 en fonction de t de manière que les deux systèmes admettent les mêmes trajectoires. L'auteur donne sous une forme simple les conditions de possibilité d'une pareille correspondance entre les deux systèmes, question déjà étudiée par M. Painlevé et par M. Levi-Cività.

---

[1] Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XLI_2, 1917, p. 93-101.

Beloch (*M.*). — Sulle trasformazioni birazionali nello spazio. [Sur les transformations birationnelles dans l'espace.] (27-63).

Soit un système *homaloïde* de surfaces φ, c'est à dire un système linéaire de ∞^3 surfaces

$$\Sigma\lambda_i\varphi_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

tel que trois surfaces quelconques du système aient un seul point variable commun. Le système précédent permet de définir une transformation birationnelle donnée par les formules

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 : \varphi_4$$

où les φ sont des polynomes homogènes par rapport aux x, d'un même degré μ.

L'auteur introduit dans son étude la notion de *surfaces adjointes d'indice quelconque* h ($h = 1, 2, 3, \ldots$) d'un système linéaire : ce sont les surfaces d'ordre $\mu - 4h$ passant, avec l'ordre de multiplicité $i - h$, par toute courbe fondamentale du système d'ordre i de multiplicité, et avec l'ordre de multiplicité $\alpha - 2h$ par tout point fondamental d'ordre α de multiplicité. L'auteur énonce, d'après M. Castelnuovo, les deux théorèmes suivants :

« I. Un système homaloïde ne possède de surface adjointe d'aucun indice.

« II. Tout système homaloïde d'ordre $\mu = 4k$ possède :

« *a*. Ou bien une courbe fondamentale d'ordre de multiplicité $i \geqq k + 1$ et d'ordre $\geqq 15$;

« *b*. Ou bien un point fondamental d'ordre de multiplicité $\alpha \geqq 2k + 1$. » On a des théorèmes analogues pour les systèmes homaloïdes d'ordre

$$\mu = 4k + 1, \qquad 4k + 2, \qquad 4k + 3.$$

Dans ces divers cas, l'auteur détermine des limites pour les ordres de multiplicité des autres courbes fondamentales et des autres points fondamentaux et il étudie plus particulièrement quelques-unes des transformations birationnelles correspondant au type *a* ou au type *b*.

Manfredini (*G.*). — Sulla deformazione delle quadriche generali. Inversione di un teorema di Darboux ed estensione dei teoremi di Guichard sulle quadriche di rotazione. [Sur la déformation des quadriques générales. Inversion d'un théorème de Darboux et extension des théorèmes de Guichard relatifs aux quadriques de révolution.] (69-122).

L'auteur se pose le problème suivant, dans le but d'établir la réciproque d'un théorème de Darboux sur la déformation des quadriques (*Comptes rendus Acad. Sc.*, 1899) :

« Soient P et P′ les points de contact d'une surface enveloppe de sphères à deux paramètres avec l'une des sphères de la famille. Quelles sont les surfaces enveloppes de sphères pour lesquelles les deux nappes (P) et (P′) décrites par P et P′ se correspondent toujours d'une façon conforme lorsqu'on déforme d'une façon quelconque la surface (S), enveloppe du plan passant par le centre de la sphère et par les points P et P′? »

Le résultat est le suivant. La surface (S) doit être applicable sur une quadrique à courbure totale positive. En outre, lorsque la surface (S) se déforme, la courbure moyenne de la nappe (P) et la courbure moyenne de la nappe (P′) demeurent l'une et l'autre invariables.

Cette dernière proposition généralise les théorèmes de M. Guichard relatifs aux surfaces applicables sur les quadriques de révolution.

Amoroso (L.). — Ricerche intorno alle equazioni integrali lineari di prima specie. [Recherches sur les équations intégrales linéaires de première espèce.] (123-140).

Soient C une ligne fermée de longueur 1, x l'abscisse curviligne d'un point de la ligne, $U(x, y)$ une fonction continue et uniforme des points de la ligne, c'est-à-dire une fonction continue telle qu'à tout couple de deux points pris sur la ligne et définis respectivement par les abscisses curvilignes x et y corresponde une valeur et une seule de $U(x, y)$. L'auteur donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une fonction $f(x)$ des points de la ligne uniforme et continue en vérifiant l'équation intégrale de première espèce

$$\int_C f(x)\,U(x,y)\,dx = h(y),$$

où $h(y)$ est une fonction donnée.

Ce problème est lié étroitement au suivant : « Déterminer les conditions auxquelles doit satisfaire une fonction arbitraire $f(y)$ pour qu'elle puisse être représentée par une série de la forme

$$a_0 + a_1\varphi_1(y) + a_2\varphi_2(y) + \ldots + a_n\varphi_n(y) + \ldots,$$

où $\varphi_1(y), \varphi_2(y), \ldots, \varphi_n(y), \ldots$ sont des fonctions uniformes données des points de C. » Ces conditions s'expriment par l'orthogonalité de $f(x)$ avec toutes les fonctions d'un certain système (θ) qu'on déduit du système (φ) des fonctions données.

Fubini (G.). — Sulle rappresentazioni che conservano le ipersfere. [Sur les représentations qui conservent les hypersphères.] (141-160).

Une hypersphère dans un espace quelconque est une hypersurface dont les points sont à une distance géodésique constante d'un point fixe. Étant donnés les éléments linéaires

$$\Sigma a_{ik}\,dx_i\,dx_k, \qquad \Sigma b_{ik}\,dy_i\,dy_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

de deux métriques, l'auteur cherche dans quels cas on peut établir entre les deux géométries une correspondance de contact telle qu'aux hypersphères de la première géométrie correspondent les hypersphères de la seconde. Soient x_1, x_2, ..., x_n les coordonnées du centre et x_{n+1} le rayon de la première hypersphère, y_1, y_2, ..., y_n les coordonnées du centre et y_{n+1} le rayon de la seconde sphère. A la transformation de contact considérée correspondra une transformation de la forme

$$x_i = X_i(y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Pour qu'une pareille transformation provienne d'une transformation de contact des deux espaces, il faut et il suffit qu'elle définisse une correspondance conforme entre les deux espaces ayant pour éléments linéaires respectifs

$$\Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k - dx_{n+1}^2$$

et

$$\Sigma b_{ik}\, dy_i\, dy_k - dy_{n+1}^2.$$

L'auteur traite ensuite en détail le cas de $n = 2$, c'est-à-dire qu'il cherche les couples de surfaces telles qu'il existe entre ces surfaces une correspondance de contact qui transforme les cercles géodésiques en cercles géodésiques.

Si l'on se limite aux surfaces réelles, les deux surfaces ou bien sont semblables, ou bien sont l'une et l'autre à courbure constante.

Levi (*E.-E.*). — Caratterische multiple e Problema di Cauchy. [Caractéristiques multiples et problème de Cauchy.] (161-201).

Soit

$$F(x, y, z, p_{1,0}, \ldots, p_{i,k}, \ldots, p_{1,n}) = 0 \quad \left(p_{ik} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i\, \partial y^k}\right)$$

une équation aux dérivées partielles d'ordre n à deux variables indépendantes. Les caractéristiques d'ordre n s'obtiennent à l'aide de l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial p_{n,0}} \lambda^n + \frac{\partial F}{\partial p_{n-1,0}} \lambda^{n-1} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial p_{0,n}} = 0.$$

L'auteur étudie le cas où cette équation a des racines doubles ou triples et il aboutit aux conclusions suivantes :

I. Il existe trois types de caractéristiques doubles.

Type A_2. — La caractéristique d'ordre n est contenue dans deux caractéristiques d'ordre $n+1$, et deux seulement, distinctes ou confondues.

Type B_2. — La caractéristique d'ordre n est contenue dans une double infinité de caractéristiques d'ordre $n-1$, et en général elle est contenue dans un ensemble de caractéristiques d'ordre $n+h$ dépendant de $2h$ constantes arbitraires.

Type C_2. — Les caractéristiques d'ordre $n+1$ contenant la caractéristique d'ordre n dépendent d'une fonction arbitraire.

Deux surfaces intégrales ayant un contact d'ordre $n+h+1$ en un point d'une caractéristique B_2 ont au moins un contact d'ordre $n+h$ en tous les

points de cette caractéristique. Ceci n'a pas lieu pour les caractéristiques C_2. Quant aux caractéristiques A_2, elles appartiennent en général à deux surfaces intégrales au plus.

II. Une caractéristique B_2 ou C_2 appartient toujours à une infinité de surfaces intégrales analytiques dans le voisinage de cette caractéristique.

III. Si dans un certain champ Δ de l'espace l'équation a toujours une caractéristique double, elle est toujours du type A_2 ou du type B_2. Si dans Δ toutes les caractéristiques sont réelles, et si un certain nombre d'entre elles sont doubles et du type B_2, les autres étant simples, le problème de Cauchy est résoluble au point de vue des variables réelles.

Sibirani (*F.*). — Sulla rappresentazione approssimata delle funzioni. [Sur la représentation approchée des fonctions.] (203-221).

M. Tonelli a étudié (*Annali di Matematica*, t. XV) la représentation approchée d'une fonction de une ou de deux variables à l'aide des polynomes de Tchebycheff et la représentation analogue d'une fonction par des polynomes trigonométriques. L'auteur remarque qu'un polynome entier de degré n à deux variables est une combinaison linéaire des fonctions $x^n, y^2, x^{n-1}y, x^{n-2}y^2, \ldots$; de même un polynome trigonométrique d'ordre n est une combinaison linéaire de $2n^2+2n+1$ fonctions telles que $\cos rx \cos sy$, $\cos ry \sin sy$, ...; il est ainsi conduit à considérer des combinaisons linéaires à coefficients arbitraires p_i d'un certain nombre de fonctions données

$$p_1\varphi_1(x)+p_2\varphi_2(x)+\ldots+p_n\varphi_n(x)$$

ou

$$p_1\varphi_1(x,y)+p_2\varphi_2(x,y)+\ldots+p_n\varphi_n(x,y).$$

En suivant pas à pas la marche adoptée par M. Tonelli, il étend sous certaines conditions à ces nouvelles combinaisons linéaires la plupart des résultats du Mémoire de M. Tonelli. Il obtient ainsi divers modes nouveaux de représentation approchée d'une fonction dans un domaine donné, en prenant par exemple pour fonctions $\varphi_i(x)$ des fonctions hyperboliques, des fonctions sphériques de Legendre, etc., et en déterminant les coefficients p_i d'après la méthode de Tchebycheff par la condition que le maximum dans le domaine de la valeur absolue de la différence entre la fonction et sa valeur approchée ait la plus petite valeur possible.

Ciani (*E.*). — Una interpretazione geometrica del gruppo totale di sostituzioni sopra sei elementi. [Une interprétation géométrique du groupe total des substitutions à six éléments.] (223-253).

Le groupe total des substitutions de six éléments peut être interprété comme le groupe total G_{720} des 720 collinéations de l'espace S_4 à quatre dimensions qui permutent de toutes les façons possibles six points de cet espace S_4. On est donc conduit à faire l'étude de l'hexagone dans S_4 ou, ce qui revient au même,

l'étude de l'hexaèdre, configuration formée de six espaces quelconques à trois dimensions contenus dans S_4. C'est cette étude que fait l'auteur. Il donne en particulier l'interprétation géométrique des sous-groupes connus du groupe G_{720}, et il étudie les hypersurfaces des cinq premiers ordres invariantes par les substitutions du groupe G_{720}.

Scorza (G.). — Le superficie a curve sezioni di genre 3. [Les surfaces dont les sections planes sont des courbes de genre 3] (255-326).

Soient F^n une surface algébrique irréductible d'ordre n de l'espace S_r ($r \geq 3$) et $|C|$ le système linéaire de ses sections hyperplanes. On suppose que le genre de $|C|$ soit 3. Soit $|C^*|$ le système linéaire des courbes du quatrième ordre de dimension maxima qui découpe sur toute courbe de $|C|$ des groupes de la série canonique g_4^2. Si l'on exclut les surfaces ordinaires du quatrième ordre, la dimension de $|C^*|$ est au plus 2. Le cas où cette dimension est égale à 2 a été traité par M. Castelnuovo (*Atti Accad. delle Scienze di Torino*, 1890). L'auteur traite ici le cas où la dimension de $|C^*|$ est inférieure à 2 et il détermine les surfaces F^n normales de l'espace ordinaire.

Ces surfaces sont d'ordre 6 et elles contiennent ∞^1 coniques qui peuvent être situées :

α. Ou bien deux par deux dans les plans d'un faisceau ayant pour axe une droite double de F;

β. Ou bien une par une dans les plans tangents d'un cone elliptique de troisième classe;

γ. Ou enfin une par une dans les plans tangents d'une développable elliptique de classe 4, non conique.

Ces trois catégories de surfaces donnent lieu à un grand nombre de types suivant la nature de la ligne double. L'auteur classe et étudie ces différents types de surfaces.

S. LATTÈS.

ACTA MATHEMATICA.

Tome XXXI (1907).

Poincaré (H.). — Sur l'uniformisation des fonctions analytiques.

L'auteur précise un certain nombre de points laissés de côté dans le Mémoire *Sur un théorème de la théorie générale des fonctions* (*Bull. Soc. math. France*, t. XI). Considérant la notion de fonction analytique au sens de Weierstrass, M. Poincaré fait correspondre à la suite d'éléments contigus qui représente une fonction analytique dans un certain domaine, une surface de Riemann

ayant généralement une infinité de feuillets, puis montre par l'application de la méthode de balayage et du théorème de Harnack, qu'étant donné un système de fonctions analytiques, on peut lui associer un certain domaine simplement connexe, pour lequel existe la fonction de Green. De cette fonction se déduit une fonction z qui permet la représentation conforme de la surface de Riemann sur un cercle. L'auteur indique, en dernier lieu, les propriétés des fonctions uniformes de z : ces fonctions jouissent de propriétés analogues à celles des fonctions fuchsiennes.

Schlesinger (*L.*). — Sur la résolution du problème de Riemann.

L'auteur démontre l'existence de n fonctions holomorphes pour toute valeur finie de z, sauf en σ points $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$, où elles sont régulières au sens de Fuchs, et subissent des substitutions linéaires arbitrairement données quand on franchit les coupures (a_ν, ∞).

Husson (*C.*). — Sur un théorème de M. Poincaré, relativement au mouvement d'un solide pesant.

M. Husson démontre le théorème suivant :

Pour qu'il existe, dans le mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe, une intégrale première algébrique qui ne se réduise pas à une combinaison des intégrales classiques, il est nécessaire que l'ellipsoïde d'inertie relatif au point de suspension soit de révolution.

Ce théorème avait été démontré par M. Poincaré dans le cas particulier où le produit du poids du corps par la distance du point de suspension au centre de gravité est très petit; l'auteur le démontre dans le cas général.

König (*J.*). — Sur les fondements de la théorie des ensembles et le problème du continu (deuxième Communication).

L'auteur précise d'abord le concept de *définition logique*, en distinguant entre la *forme* et le *sens* d'une définition, puis introduit des définitions *pseudo-finies* (comprenant une infinité dénombrable de signes, mais ces signes étant tous identiques à partir d'un rang fini n). L'introduction de ces définitions, et l'application successive du *procédé diagonal* de M. Cantor, conduit M. König à ce résultat que, si l'on pouvait regarder la deuxième classe de nombres $Z(\aleph_0)$ comme un ensemble, celui-ci devrait être dénombrable.

Dulac (*H.*). — Sur les séries de Mac Laurin à plusieurs variables.

M. Dulac démontre le théorème suivant :

Une série dont les termes sont des polynomes homogènes à un nombre quelconque de variables, définit une fonction holomorphe dans le voisinage de l'origine, à la condition que cette série soit uniformément convergente dans le domaine D *formé par l'ensemble des valeurs réelles et voisines de zéro, des variables.*

En dernier lieu, l'auteur applique ce résultat à prouver que, dans le domaine complexe, le développement

$$F = x^2 + y^2 + f_3(x, y) + f_4(x, y) + \dots$$

satisfaisant formellement à l'équation aux dérivées partielles

$$[y + \varphi_2(x, y)]\frac{\partial F}{\partial x} - [x + \Psi_2(x, y)]\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

(les f, φ, Ψ étant des polynomes homogènes de degré égal à l'indice) définit une fonction holomorphe pour $x = y = 0$.

Cotton (*E.*). — Sur l'intégration approchée des équations différentielles.

L'auteur considère le système

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

et lui applique la méthode des approximations successives de M. Picard, mais en prenant pour première approximation n fonctions de t continues dans l'intervalle $(0, h)$, les f_i étant assujetties à satisfaire la condition de Lipschitz. M. Cotton démontre qu'on peut toujours choisir des fonctions initiales assez près de satisfaire aux conditions initiales pour que les erreurs, par rapport aux solutions exactes, soient moindres en valeur absolue que des nombres arbitrairement petits. Ensuite, l'auteur envisage toutes les intégrales situées dans un certain domaine, comme l'a fait M. Painlevé, et enfin étudie l'erreur commise, en grandeur et en signe, en appliquant un théorème de M. Petrovitch. Dans tout ce Mémoire, M. Cotton se borne à considérer les valeurs réelles des variables.

Petrini (*H.*). — Les dérivées premières et secondes du potentiel.

Ce très long Mémoire est consacré à l'étude des dérivées du potentiel newtonien d'une masse attirante, dans le cas général où la densité peut être discontinue. Après avoir donné les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de ces dérivées, l'auteur applique les résultats obtenus à l'intégration de l'équation de Poisson :

Si φ est une fonction quelconque, finie et intégrable, l'équation $\Delta V = -4\pi\varphi$ n'a généralement aucune solution. Mais on peut toujours trouver (et en général d'une seule manière) une fonction Θ, jouissant pour tout domaine T *de la propriété*

$$\int_T \Theta \, dv = 0$$

telle que l'équation $\Delta V = -4\pi\varphi + \Theta$ ait des solutions, si ΔV est défini par

l'égalité

$$\Delta V = \lim_{\substack{h_1=0\\ h_2=0\\ h_3=0}} \sum_{x,\,y,\,z} \frac{1}{h_1}\left[\frac{\partial V(x+h_1,\,y,\,z)}{\partial x} - \frac{\partial V(x,\,y,\,z)}{\partial x}\right].$$

Hadamard (*J.*). — Théorie des équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques, et du problème de Cauchy.

M. Hadamard généralise la méthode de M. Volterra en utilisant directement les solutions fondamentales et en faisant disparaître, par l'emploi d'un nouveau symbole d'intégration, les difficultés qui se présentent lorsqu'on veut effectuer les différentiations indiquées par les formules de M. Volterra. L'auteur arrive aux résultats suivants : le problème *intérieur* est toujours *possible* et *déterminé*, sous certaines conditions de dérivabilité imposées aux données; tandis que, pour le problème *extérieur*, les données sont surabondantes.

Phragmén (*E.*) *et Lindelöf* (*E.*). — Sur une extension d'un principe classique de l'Analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier.

Les auteurs présentent diverses généralisations (puis diverses applications de ces généralisations) du théorème suivant :

Si $f(x)$ est une fonction analytique régulière dans un domaine T, *et si, pour tout point ξ du contour, on a*

$$|f(x)| \leq C + \varepsilon \qquad (\varepsilon \text{ arbitrairement petit})$$

dès que x, restant à l'intérieur de T, *se rapproche suffisamment du point ξ, on aura, pour tout point intérieur à* T,

$$|f(x)| \leq C.$$

PIERRE DROUIN.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XLI; 1917. — SECONDE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

RECUEILS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS CE VOLUME.

Acta mathematica. T. XXVIII, 1904 (55-72); T. XXIX, 1905 (72-84); T. XXX, 1906 (101-111); T. XXXI, 1907 (125-128).

Annali della R. Scuola Normale superiore di Pisa. T. VIII, 1899 (31-45).

Annali di Matematica pura ed applicata. T. XV, 1908 (93-101); T. XVI, 1909, (120-125).

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. T. 162 et 163, 1916 (111-120).

Journal für die reine und angewandte Mathematik. T. CXLIV, 1914 (20-30).

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. T. XVI, 1902 (45-55).

The quaterly Journal of pure and applied Mathematics. T. XXXVII, 1906 (5-20); T. XXXVIII, 1907 (85-93).

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS

D'ANALYSES.

FIN DES TABLES DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XLI.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
57460 Quai des Grands-Augustins, 55.



